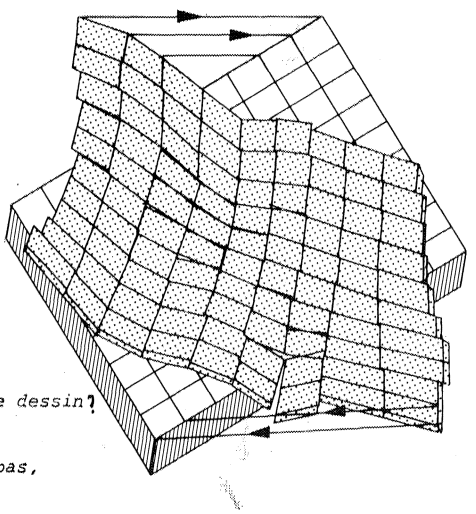
PROBLEME INVERSE EN DEFORMATION FINIE

Application au segment hercynien de Bretagne centrale



Que représente-t-il ce dessin?
tout ce qui arrive
et l'ombre
tout ce qui n'arrive pas,
un chef d'oeuvre.

P.A. BIROT

Marie-Noël PERCEVAULT

Rennes 1983

4 MAI 1983

UNIVERSITE DE RENNES I
BIBLIOTHÈQUE
INSTITUT DE GÉOLOGIE

SERIE : C
N° d'Ordre : 767
N° de Série : 293

3247
Numéro d'inventaire Bibliothèque
INSTITUT de GEOLOGIE de RENNES

THESE

Présentée

DEVANT L'UNIVERSITE DE RENNES I

U.E.R. Structure et Propriétés de la Matière

Pour obtenir

Le Titre de : DOCTEUR EN TROISIEME CYCLE

Spécialité : Sciences de la Terre. Méthode d'études des Socles

Option : Géologie Structurale

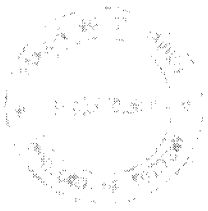
Par

Marie-Noël PERCEVAULT

Sujet de la Thèse : *Problème inverse en déformation finie. Application au segment hercynien de Bretagne Centrale.*

Soutenue le 21 JANVIER 1983 devant la Commission d'Examen :

MM. P. CHOUKROUNE, Professeur à l'Université de Rennes I — *Président*
P. COBBOLD, Maître de recherche au CNRS (Rennes) — *Directeur*
A. ETCHECOPAR, Maître-assistant à l'Université de Montpellier
P. SIRIEYS, Professeur à l'INSA de Toulouse
C. LE CORRE, Professeur à l'Université de Marrakech (Maroc)
— *Examinateurs*



INSTITUT de GÉOLOGIE
de RENNES
Numero d'inventaire Bibliothèque 3247

UNIVERSITÉ DE RENNES
BIBLIOTHÈQUE
INSTITUT DE GÉOLOGIE

Je m'embrouille

Ce qui l'une de l'autre éloigne
deux personnes habitant
deux villages différents
c'est l'espace qui les sépare

Donc, afin qu'elles se rejoignent
il suffit qu'allant à la gare
L'une des deux prenne le train
jusqu'au lieu où l'autre se tient

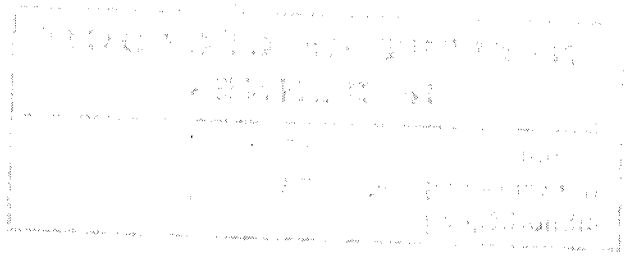
A moins qu'on ne trouve un moyen
soit de contracter l'étendue
soit même de la supprimer

Mais alors comme tout se tient
tout serait à recommencer
car il ne resterait plus rien
ni les personnes ni les trains

Donc ce problème ne vaut rien

Le Fleuve Caché

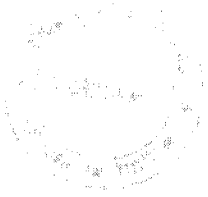
Jean TARDIEU

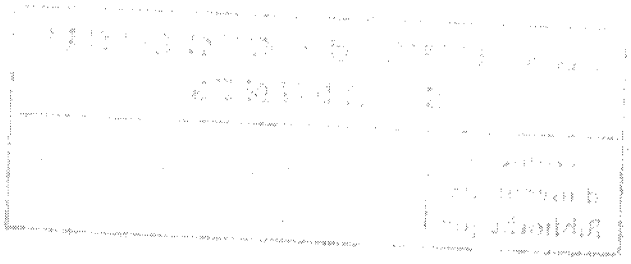


UNIVERSITÉ DE RENNES
BIBLIOTHÈQUE
INSTITUT DE GÉOLOGIE

INSTITUT de GÉOLOGIE
de RENNES
Numéro d'inventaire Bibliothèque
3247

Je remercie toutes les personnes qui par leur amitié et leur compétence ont contribué à l'élaboration de ce travail. Je pense notamment à P. Cobbold et D. Gapais et, aussi, à tous ceux qui ont assuré la réalisation matérielle de cet ouvrage.





PLAN du MEMOIRE

INTRODUCTION GENERALE

1 - METHODOLOGIE DE LA DEFORMATION INVERSE 5

1. INTRODUCTION 7
2. APPROCHE THEORIQUE 13
3. ETUDE D'EXEMPLES THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX 27

2 - APPLICATION DE LA METHODE DE LA DEFORMATION INVERSE AUX STRUCTURES HERCYNIENNES DE BRETAGNE CENTRALE 47

INTRODUCTION 51
1. CONTEXTE GEOLOGIQUE 55
2. APPORT DE LA DEFORMATION INVERSE 65
3. CONCLUSIONS 84

CONCLUSION GENERALE 85

ANNEXE A 93

AJUSTEMENT D'ELEMENTS FINIS : DEVELOPPEMENT DES EQUATIONS UTILISEES 97

ANNEXE B 107

DECOMPOSITION POLAIRE D'UNE MATRICE ASYMETRIQUE 108

ANNEXE C 111

MISE EN PLACE DU PROGRAMME DE DEFORMATION INVERSE PUZZLE 113

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 139

INTRODUCTION GENERALE

N'importe quelle roche déformée a "une histoire". Elle passe d'une condition initiale à travers toute une suite d'états successifs de déformation avant d'arriver à son état final déformé.

Ce processus est connu sous le nom de "déformation progressive". Lorsque la roche se déforme, un marqueur sphérique originel évolue en une série d'ellipsoïdes dont les formes varient en continu jusqu'à ce que la déformation s'arrête (D. Flinn 1962) (Fig. 1).

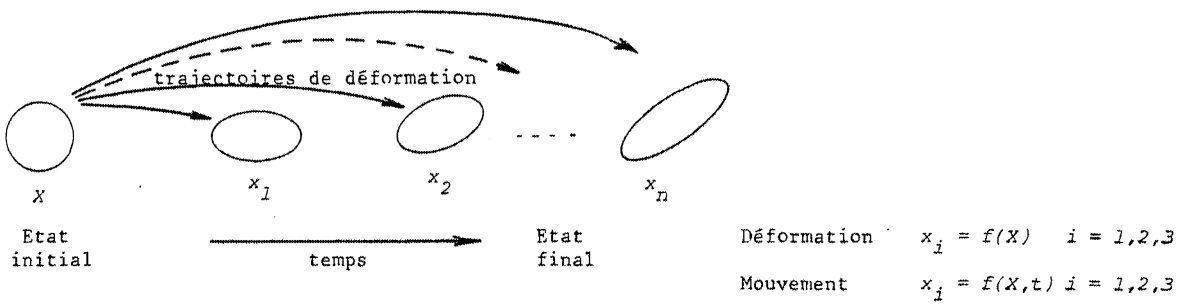


Fig. 1 - Schématisation de la déformation progressive

La déformation progressive implique des variations de la déformation dans l'espace et le temps. L'état final de la déformation représente l'accumulation de petites déformations élémentaires appelées "déformations infinitésimales". A chaque moment, la somme totale des états infinitésimaux constitue l'état fini de la déformation.

Dans la théorie de la déformation finie, seuls l'état non déformé initial et l'état déformé final d'un corps sont considérés. La déformation est une relation géométrique entre ces 2 états et ne dépend pas du chemin suivi de l'un à l'autre $x_i = f(X)$ (Fig. 1). Lorsque la déformation progressive intègre le paramètre temps t, la famille des déformations finies successives, $x = f(X,t)$ est appelée "le mouvement".

Pour raisonner en terme de déformation progressive, la connaissance de l'état initial non déformé manque à l'observation.

Le but de ce travail a été de mettre au point une méthode permettant d'obtenir un mo-

dèle d'une structure initiale non déformée d'une région, à partir des seules données structurales de l'état de déformation finie observé. C'est ce que l'on appelle la déformation inverse qui nous aide à traduire les modalités de l'histoire de la déformation progressive depuis l'état initial vers l'état final.

Pour de telles déterminations une méthode numérique a été mise au point (P. Cobbold et M.N. Percevault, 1982) et automatisée sur ordinateur (M.N. Percevault).

Ce mémoire est divisé en deux parties :

- La première, essentiellement méthodologique et technique, est la plus importante de mon travail. C'est une étude théorique sur la déformation suivie par la mise au point d'un programme de modélisation mathématique mettant en place la méthode de déformation inverse. Le départ de cette étude est basé sur les travaux de P.R. Cobbold (1978).

D'un point de vue méthodologie, le but de ce travail est

. de déterminer, à partir de la géométrie des structures et des mesures de distorsion d'une zone déformée, un modèle de son état initial non déformé.

. d'en déduire le mode de déformation liant l'état initial et l'état final du domaine étudié.

Après avoir exposé brièvement dans le premier chapitre, les travaux antérieurs à cette étude, j'ai développé la méthodologie de la déformation inverse dans le chapitre 2. Cette partie théorique est plus détaillée dans l'annexe A, afin de permettre la compréhension du programme écrit en langage Basic sur un microordinateur HP 9845A et décrit dans l'annexe C. Enfin, j'ai testé la technique en utilisant des modèles de zones cisaillées, plissées, diapiriques dans le chapitre 3.

- La seconde a servi de support à cette partie théorique par le biais d'une application géologique. Le choix de la région centre-armoricaine a été guidé par le fait qu'il s'agit d'un domaine bien connu du point de vue de la géométrie des structures et de la déformation finie.

Après avoir détaillé les caractéristiques géologiques de la région, (chapitre 1), on démontre que la déformation peut être interprétée comme un mouvement cisaillant de la région (chapitre 2).

NOMENCLATURE

Z_i, z_i	Coordonnées cartésiennes d'un point matériel pour l'état non déformé et déformé d'un élément interne.
Z_i^*, z_i^*	Coordonnées cartésiennes d'un point matériel pour l'état non déformé et déformé d'un élément externe.
Y_i, Y_i^*	Même chose pour un état intermédiaire.
$\overline{Y}_i$, $\overline{Z}_i$	Moyenne des points internes dans un état intermédiaire, dans un état non déformé.
${}_o{}^Y{}_i$	Partie déviatorique d'un vecteur Y_i par rapport au vecteur moyen $\overline{Y}_i$.
D	Déviation d'un élément dans son trou.
B_i	Vecteur translation.
$M_{kj} = \overline{{}_o{}^Z{}_k \; {}_o{}^Z{}_j}$	Matrice de covariance.
R	Tenseur rotationnel
D	Tenseur des gradients de déformation.
c	Matrice des composantes cartésiennes du tenseur de déformation de Cauchy.
S	$\sqrt{c}$
λ_i	Directions principales d'étirement dans la direction Z_i.
Pos_i^I	Coordonnées du centre de l'élément I.
Lg_i^I	Demi-longueur de l'élément I dans la direction Z_i.
V, v	Expression d'un vecteur avant déformation, après déformation
L, ℓ	Pôle d'un vecteur avant déformation, après déformation.

Les majuscules indiquent un état non déformé,
Les minuscules indiquent un état déformé,
La barre dénote une moyenne.

Première Partie

METHODOLOGIE
DE LA DEFORMATION INVERSE

1. INTRODUCTION 7

1.1 DEFINITION DE LA DEFORMATION INVERSE 9

1.2 TRAVAUX ANTERIEURS 9

1.3 PRINCIPES DE LA METHODE 11

2. APPROCHE THEORIQUE 13

2.1 BASE MATHEMATIQUE POUR L'UTILISATION D'ELEMENTS FINIS 13

PROBLEME POSE

DESCRIPTION DE LA METHODE D'EULER ET DE LA METHODE D'EULER MODIFIEE

2.2 ETAPES SUCCESSIVES DE RESOLUTION DE LA DEFORMATION INVERSE : UTILISATION DE LA METHODES DES ELEMENTS FINIS 15

DETERMINATION DU RESEAU D'ELEMENTS FINIS (1ère Etape)

SUPPRESSION DE LA DEFORMATION DANS LES ELEMENTS FINIS (2ème Etape)

AJUSTEMENT D'ELEMENTS FINIS (3ème Etape)

2.3 ETUDE PARTICULIERE D'UNE SEULE COUCHE D'ELEMENTS : ESTIMATION DE LA ROTATION RIGIDE DANS LE PLAN VERTICAL 21

DEFINITION D'UN PLAN ET DU POLE D'UN PLAN

DEFORMATION INVERSE DU POLE & DANS L'ETAT DEFORME

ESTIMATION DES ROTATIONS RIGIDES DANS LE PLAN VERTICAL

DISCUSSION

2.4 ESTIMATION D'ERREURS 23

ERREURS D'INTEGRATION

ERREURS DANS LES DONNEES

2.5 CONCLUSIONS 25

3. ETUDE D'EXEMPLES THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX 27

3.1 MODELE QUADRATIQUE 27

DEFINITION DU MODELE QUADRATIQUE

CONSTRUCTION DU MODELE

RESULTATS

3.2 STRUCTURES PLISSEES 33

PLI CONCENTRIQUE

PLI SEMBLABLE

3.3 ZONE DE CISAILLEMENT SIMPLE 38

3.4 DOME DIAPIRIQUE EXPERIMENTAL 40

3.5 CONCLUSIONS 45

1
INTRODUCTION

1.1 DEFINITION DE LA DEFORMATION INVERSE

La déformation inverse est la relation géométrique entre un état final déformé et un état initial non déformé. La méthodologie de la déformation inverse permet de déterminer un état initial non déformé, en ayant les valeurs principales et les orientations de la déformation en un nombre de points suffisants à travers un corps déformé. Ainsi l'obtention de l'inversion des effets de la déformation finie nous aide à discuter des caractères de la déformation progressive aboutissant à la structure finie observée (zone de cisaillement, plissée, diapirique). La technique se base sur la méthode des éléments finis ; elle peut être appliquée à tous les corps déformés de façon hétérogène et à volume constant, sur lesquels des mesures de déformation ont été effectuées. Le problème des incompatibilités de déformation locale résultant de discontinuités mineures peut être résolu par l'utilisation des éléments finis.

1.2 TRAVAUX ANTERIEURS

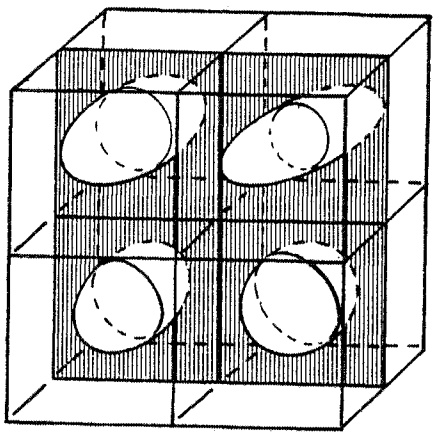
De nombreux auteurs se sont intéressés au problème de la déformation inverse au fur et à mesure que les données de déformation finie sont devenues plus étendues et plus précises.

E. Cloos (1947) est le premier à obtenir des données de déformation finie abondantes dans une petite région et à tenter un déplissement sur la base de telles mesures. Il faut noter le travail particulier de J.R. Hossack (1978), qui a développé une technique d'intégration le long des trajectoires principales de déformation afin d'estimer une déformation régionale. Par une approche différente pour calculer la forme prétectonique, O. Oertel (1974) introduit la notion pratique de domaines triangulaires dans lesquels la déformation est supposée homogène. Sa tentative n'a pas été concluante du fait qu'il n'a pas tenu compte de l'hétérogénéité de la déformation amenant des discontinuités dans la structure.

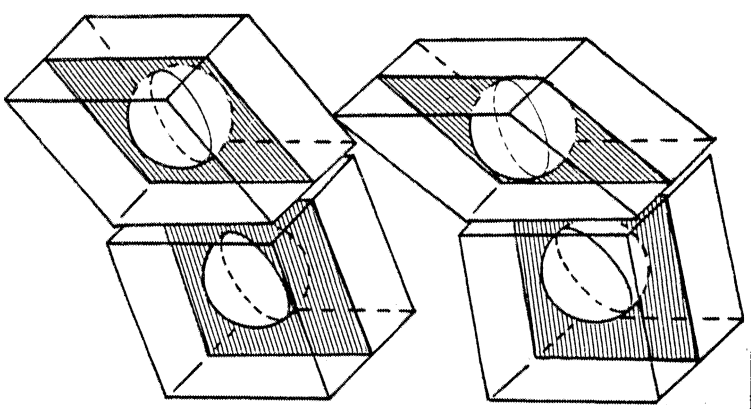
L'idée fut développée par W.M. Schwerdtner (1977). Il a divisé un pli concentrique idéal en domaines carrés. Puis, il a montré que les parallélogrammes résultants de la déformation inverse doivent être translatés et tournés afin qu'ils s'assemblent sans vide ni recouvrement. On retrouve ainsi la géométrie initiale de la zone charnière. La procédure d'ajustement fut

Fig. 2 - Détermination de la configuration antetectonique originale d'une région orogénique.

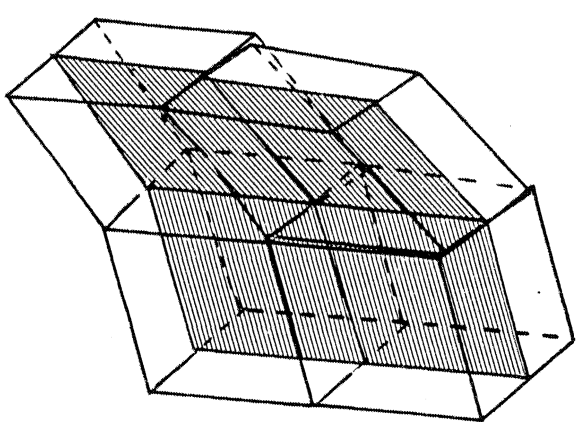
a - Etat final déformé : découpage en éléments finis. Dans la première étape, la région est divisée en 4 éléments jointifs. Chaque élément est identifié par des paramètres de position, d'orientation et de forme. Les valeurs principales et les orientations de la déformation sont aussi connues pour chaque élément dans lesquels nous supposons la déformation homogène.



b - Etat intermédiaire. La deuxième étape consiste à enlever la déformation de chaque élément. Les éléments deviennent de nouveaux parallélogrammes de forme et d'orientation différente mais au lieu de rester jointifs, des vides et des recouvrements apparaissent.



c - Etat initial non déformé. La troisième étape permet de retrouver une continuité du domaine étudié en effectuant des translations et des rotations afin d'assembler les éléments. On obtient l'état initial non déformé de la région étudiée.



faite à la main, en utilisant des pièces de papier pour des domaines non déformés.

Une technique d'automatisation fut proposée par A. Etchecopar (1974-1977) et élaborée par P.R. Cobbold pour l'application à la déformation inverse. P.R. Cobbold (1979) a observé que de tels domaines sont équivalents aux éléments finis, comme dans les problèmes mécaniques. Il a introduit une procédure numérique pour minimiser les vides et les recouvrements entre les éléments planaires afin de permettre un ajustement plus rapide et objectif.
A ce stade, l'utilisation d'éléments rectangulaires parallèles aux trajectoires de déformation fut invoquée comme une façon de simplifier les calculs. Mais, de récents développements indiquent que la base numérique peut être présentée de façon simple (P.R. Cobbold et M.N. Percevault, 1982), indépendante de la forme de l'élément et valable pour des situations tridimensionnelles aussi bien que bidimensionnelles. C'est cette méthode de déformation inverse qui est présentée dans les pages qui suivent.

1.3 PRINCIPE DE LA METHODE

Cette méthode a été mise au point en collaboration avec P.R. Cobbold, qui s'est plus attaché à la partie théorique. Le déroulement de la technique est schématisé par trois étapes, nous conduisant au modèle de l'état initial non déformé du domaine étudié.

-- dans la première étape, la région déformée est divisée tout d'abord en un nombre donné d'éléments jointifs de taille finie (Fig. 2a). Dans cette étude, il s'agit de parallélogrammes rectangles ou quelconques. Chacun est identifié par des paramètres de forme, de position et d'orientation. Les valeurs principales et les orientations de la déformation sont aussi connues pour chaque élément dans lequel on suppose la déformation homogène et isochorique.

-- la deuxième étape consiste à enlever la déformation de chaque élément (Fig. 2b). Les éléments deviennent de nouveaux parallélogrammes de forme et d'orientation différentes, mais au lieu de rester jointifs, des vides et des recouvrements apparaissent.

-- la troisième étape consiste à retrouver une continuité du domaine étudié. Le problème est donc d'assembler les éléments afin d'obtenir le moins de vides et de recouvrements possible entre eux. La technique d'ajustement utilisée, indépendante de la forme des éléments, permet d'effectuer les translations et les rotations nécessaires pour assembler les éléments. A ce stade, c'est l'état initial non déformé de la région étudiée qui est décrit (Fig. 2c).

2

APPROCHE THEORIQUE

2.1 BASE MATHEMATIQUE POUR L'UTILISATION D'ELEMENTS FINIS

PROBLEME POSE

Si les coordonnées cartésiennes d'un point matériel sont Z pour l'état non déformé et z pour l'état déformé, la déformation (C. Truesdell et R. Toupin, 1960) est représentée par la transformation

$$z = z(Z) \tag{1}$$

De façon similaire, l'inverse

$$Z = Z(z) \tag{2}$$

sera appelé la déformation inverse. Le problème mathématique est d'obtenir (1) et (2), avec d'autres informations.

Supposons, en premier, qu'à chaque point de l'état déformé z, nous ayons donné les gradients de déformation inverse c'est à dire les 9 composantes cartésiennes,

$$\frac{\partial Z_i}{\partial z_j} = Z_{ij}(z) \qquad (i,j = 1,2,3) \tag{3}$$

comme fonctions de position, z.

Les équations (3) sont alors 9 équations différentielles partielles à 3 inconnues, Z_i. En les intégrant, (1) et (2) peuvent être théoriquement obtenues ; ainsi, le problème est résolu.

Cependant, les gradients de déformation inverse doivent satisfaire 6 conditions de compatibilité

$$\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\frac{\partial Z_i}{\partial z_j}\right) = \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{\partial Z_i}{\partial z_k}\right) \tag{4}$$

Sinon, la réponse n'est pas unique.

Dans les problèmes géologiques réels, il n'est pas assuré que les données soient sans erreur et que les conditions de compatibilité (4) soient parfaitement satisfaites.

On recherche donc une méthode flexible d'intégration qui puisse surmonter les problèmes d'incompatibilité entre les données. Des méthodes numériques simples sont décrites en premier et fournissent une base mathématique pour l'utilisation des éléments finis.

DESCRIPTION DE LA METHODE D'EULER ET DE LA METHODE D'EULER MODIFIEE

Les méthodes d'Euler et d'Euler modifiée sont des méthodes numériques approchées pour résoudre des équations différentielles ordinaires telles que

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \tag{5}$$

En intégrant :

$$y = \int f'(x)\, dx = f(x) \tag{6}$$

Si les valeurs de $f'(x)$ sont connues pour toutes les valeurs de x, la plus simple méthode numérique d'intégration est la méthode d'Euler. L'axe x est divisé en une série d'intervalles égaux Δx. Le gradient $f'(x)$ est considéré constant au début de chaque intervalle (Fig. 3a). Par étapes successives, une solution approchée est construite. Sa forme graphique est connue comme étant le polygone de Cauchy. Bien que la méthode d'Euler soit la plus simple, elle n'est pas très exacte.

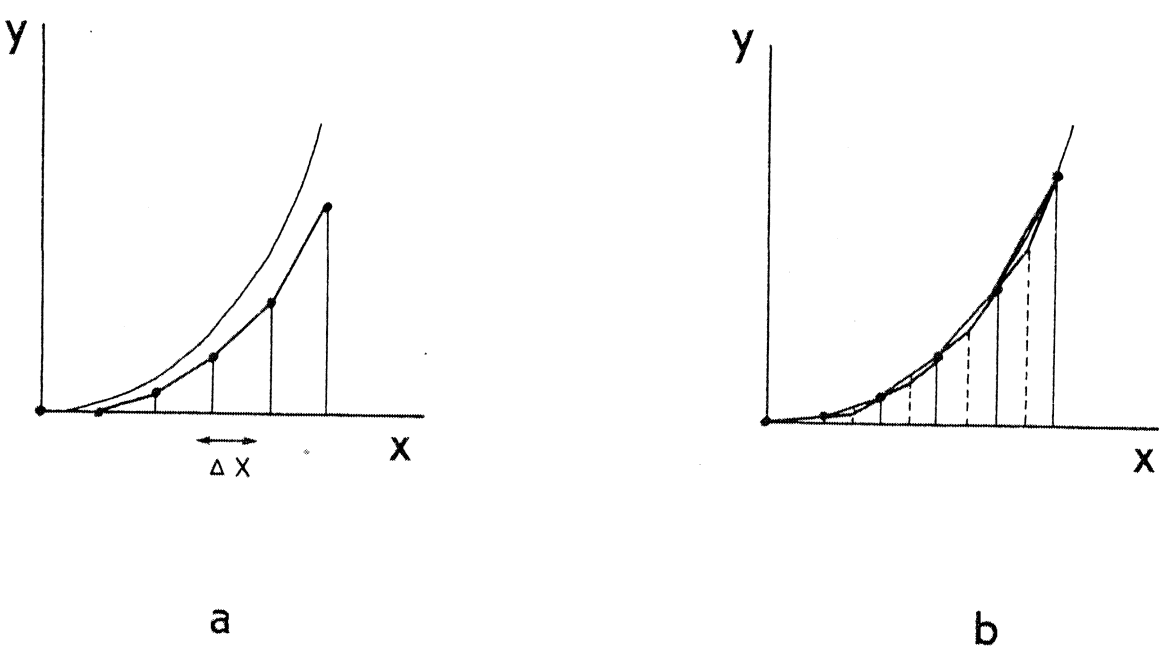


Fig. 3 - Intégration numérique d'une équation différentielle ordinaire. La courbe fine représente la fonction $y = x^2$ qui est l'intégrale exacte de $dy/dx = 2x$ avec $y = o$ qd $x = o$.

a) - Méthode d'intégration d'Euler, montrant les valeurs estimées de y (points) et la pente dy/dx (segments de lignes droites épaisses, formant le polygone de Cauchy) au début de chaque intervalle, Δx.

b) - méthode d'Euler modifiée. Ces pentes dy/dx (segments épais) sont projetées à l'avant et à l'arrière depuis le milieu de l'intervalle. Les valeurs estimées de y(points) tombent exactement sur la courbe $y = x^2$.

La méthode d'Euler modifiée est beaucoup plus exacte grâce à une très petite modification. L'axe x est divisé en intervalles égaux, comme avant, mais le gradient $f'(x)$ est pris au milieu de l'intervalle (Fig. 3b).

La solution approchée est ensuite construite.

Dans les 2 cas, la solution est d'autant plus exacte que la largeur des intervalles diminue et à la limite s'annule. Dans ce cas, la réponse exacte est obtenue Pour les intervalles finis cependant, une réponse exacte est fournie par la méthode d'Euler, quelle que soit la largeur de l'intervalle si y est une fonction linéaire de x, (son gradient est constant dans l'intervalle et le graphe de y en fonction de x est une ligne droite). Sous ces conditions, les points du polygone de Cauchy s'alignent le long de l'intégrale exacte.

Pour la méthode d'Euler modifiée, une solution exacte est obtenue non seulement pour une fonction linéaire de x, mais aussi pour une fonction quadratique (Fig. 3b). Ceci illustre l'amélioration apportée par la méthode d'Euler modifiée : on a une réponse exacte si le gradient $f'(x)$ est une fonction linéaire de position et on aura une très bonne réponse pour des fonctions plus complexes.

2.2 ETAPES SUCCESSIVES DE RESOLUTION DE LA DEFORMATION INVERSE : UTILISATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.

DETERMINATION DU RESEAU D'ELEMENTS FINIS (1ère Etape)

On applique la méthode d'Euler modifiée pour intégrer les équations différentielles partielles (3). Par analogie avec ce qui est fait dans les équations différentielles ordinaires, des intervalles égaux sont pris dans les 3 directions z_i, dans l'état déformé. Ceci définit un réseau d'éléments finis, qui sont en fait des cubes (ou des carrés en 2 dimensions) (Fig. 4a). Les gradients de déformation inverse sont déterminés au centre de chaque élément et supposés constants pour chacun.

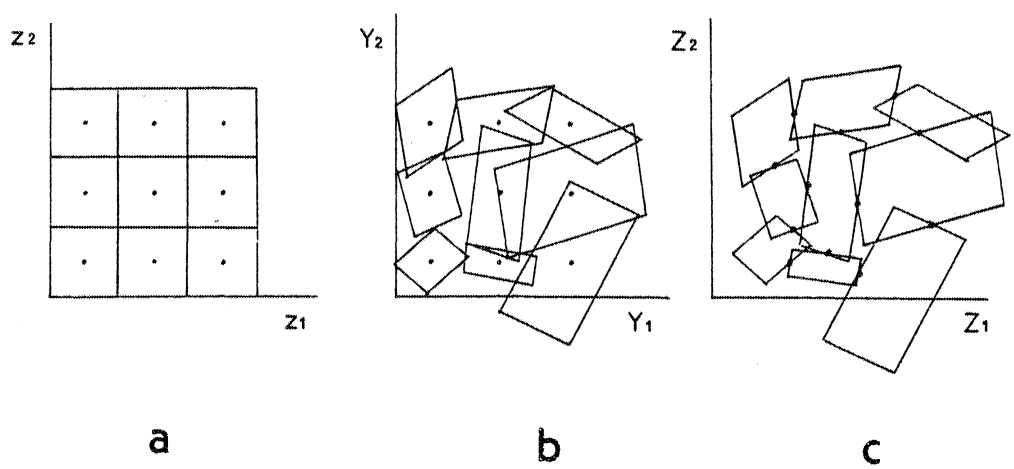


Fig. 4 - Intégration des gradients de déformation inverse utilisant les éléments finis.
a) grille initiale d'éléments carrés
b) éléments non déformés, dans leurs positions d'origine
c) mêmes éléments non déformés, dans leurs nouvelles positions. Les centres des faces coïncident.

Ainsi, il existe une façon simple d'effectuer une déformation inverse de chaque élément en utilisant la théorie de la déformation homogène.

SUPPRESSION DE LA DEFORMATION DANS LES ELEMENTS FINIS (2ème Etape)

La déformation homogène signifie qu'un ellipsoïde est transformé en un autre ellipsoïde pendant la déformation. Pour le réseau précédemment défini (1ère étape), on suppose que l'ellipsoïde inclu dans chaque élément fini est transformé pendant la déformation inverse en une sphère dans l'état initial non déformé de l'élément (Fig. 2a.b). L'état de la déformation est donné par les composantes tensorielles de Cauchy c_{ij} dans l'état déformé. L'ellipsoïde de déformation représente la forme quadratique $c_i\ x_i\ x_j = 1$.

Dans le cas où les axes de référence coïncident avec les directions principales, la matrice c prend la forme diagonale

$$c = \begin{pmatrix} 1/\lambda 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda 3^2 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Les axes principaux de déformation ayant subi une rotation R pendant la déformation, les composantes c^* par rapport aux axes de référence sont données par :

$$c^* = R\ .\ c\ .\ R^t$$

c et c^* ont les mêmes valeurs propres.

La déformation inverse appliquée au centre de chaque élément est représentée par d tel que

$$d = R^t\ c^{1/2}$$

où d exprime la matrice des gradients de déformation.

R^t le tenseur rotationnel transposé qui oriente l'élément

$c^{1/2}$ traduit la forme de l'élément. On a $c^{1/2} = S$

En faisant ceci, les éléments deviennent des parallélépipèdes (ou des parallélogrammes Fig. 4b). Des vides et des recouvrements apparaissent entre eux.

AJUSTEMENT D'ELEMENTS FINIS (3ème Etape)

-- Nécessité d'introduire une méthode de minimisation

Pour construire la solution le long de chacune des directions z_i, on amène le centre des faces des éléments adjacents en coïncidence à nouveau par une translation rigide (Fig. 4c). Les nouvelles positions z_i des centres des éléments représentent la solution numérique du problème.

Par analogie avec les équations différentielles ordinaires, nous supposons que la méthode des éléments finis, étant une méthode d'Euler modifiée, donne la solution exacte si l'expression (2) est une fonction quadratique. C'est ce qui est illustré par le modèle isochorique bidimensionnel (Fig. 5) qui sera plus longuement développé dans le chapitre suivant.

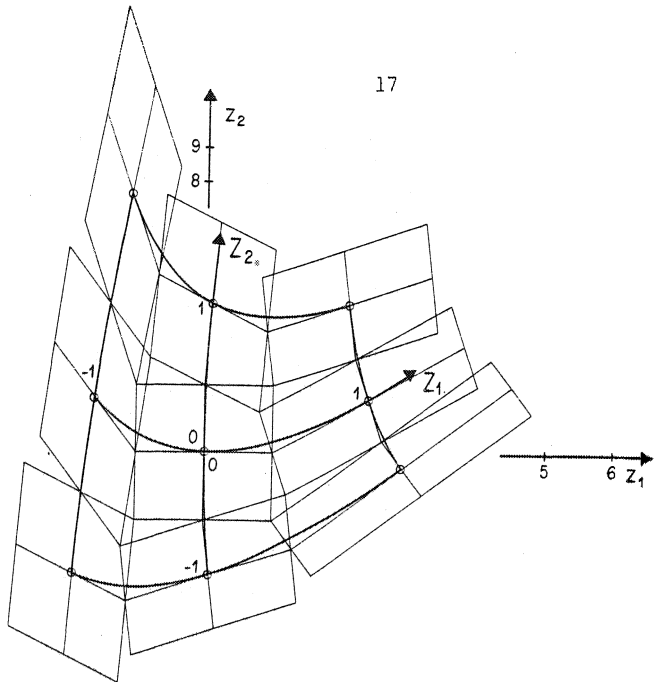


Fig. 5 - Modèle quadratique de déformation montrant les nouvelles coordonnées (z_1, z_2) et les anciennes coordonnées (Z_1, Z_2) dans l'état non déformé.
Les éléments non déformés sont positionnés de telle façon que les centres des faces coïncident. Notons que les centres des éléments tombent sur les courbes de coordonnées Z_1 Z_2.

Mais, si la fonction (2) est exprimée comme une série de puissances avec des termes de plus haut ordre que 2, les gradients de déformation inverse, même s'ils sont donnés au centre des éléments, ne permettent pas de faire coïncider les paires des centres des faces comme dans le modèle quadratique.

Des erreurs numériques peuvent amener des incompatibilités locales. Des variations dans les gradients de déformation inverse peuvent fausser le problème ou l'améliorer, mais il est toujours nécessaire que les paires des centres des faces coïncident le plus possible. Pour respecter cette condition, on introduit une méthode de minimisation des distances interfaciales (distances entre les paires des centres des faces) comme celle décrite page 18.

Avant, considérons un problème géologiquement plus réaliste, où les gradients de déformation inverse ne sont pas complètement connus, mais où les ellipsoïdes de déformation seuls sont connus. On peut ainsi déterminer les rotations et les translations rigides. Une rotation rigide ne change pas la forme d'un élément, aussi, la même méthode d'intégration peut être appliquée pour la minimisation des distances interfaciales. Ceci est un avantage de la méthode des éléments finis.

En considérant la méthode des éléments finis comme équivalente à une méthode d'Euler modifiée d'intégration, on peut choisir les éléments dans l'état déformé comme étant des cubes identiques (ou des carrés), afin d'assurer des intervalles égaux et réguliers dans toutes les directions. Cette restriction n'est pas réellement nécessaire ni ne garantit pas toujours que les erreurs soient minimisées par ce fait. Par contre, il y a quelques justifications pour réduire localement la taille des éléments lorsque les gradients de déformation sont plus importants pour faire coïncider les frontières d'éléments autant que possible avec les surfaces de discontinuité dans le champ de déformation (par exemple les frontières entre les couches de propriétés rhéologiques différentes). En pratique, nous utilisons des parallélépipèdes de dimensions proches et traçons un réseau tel que les centres des faces des éléments adjacents coïncident.

-- Définition de la déviation d'un élément

Une conséquence de l'utilisation des éléments de taille finie et d'erreurs dans les données de déformation apparait lorsque les déformations ont été enlevées, un élément n'a pas

besoin d'avoir la même forme que le trou défini par ses voisins immédiats.

Nous définissons la déviation d'un élément par rapport à son trou que l'on minimise ensuite pour obtenir le meilleur ajustement. Une brève discussion mathématique de cette procédure fut donnée par P.R. Cobbold (1979) pour des problèmes bidimensionnels. C'est une analyse tridimensionnelle plus générale qui est abordée ici.

Considérons un élément défini par des points z sur sa frontière dans l'état déformé. Dans l'état non déformé, l'élément est défini par des points frontières Z et le trou qu'il occupe par des points frontières Z^*.

De plus, dans un état intermédiaire, les points frontières sont Y et Y^* (Fig. 6).

La déviation D de l'élément dans son trou, dans l'état intermédiaire, est définie comme :

$$D = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} |Y^* - Y|^2 = \overline{(Y_i^* - Y_i)^2} \qquad (9)$$

où n est le nombre de points frontières considérés et où la barre indique une moyenne arithmétique. Une définition similaire fut utilisée par O. Grioli (1940) pour analyser la déviation d'une déformation par rapport à une autre. Mais, il a considéré tous les points situés sur la frontière d'une sphère, il utilise donc une intégrale volumique au lieu de la sommation (9).

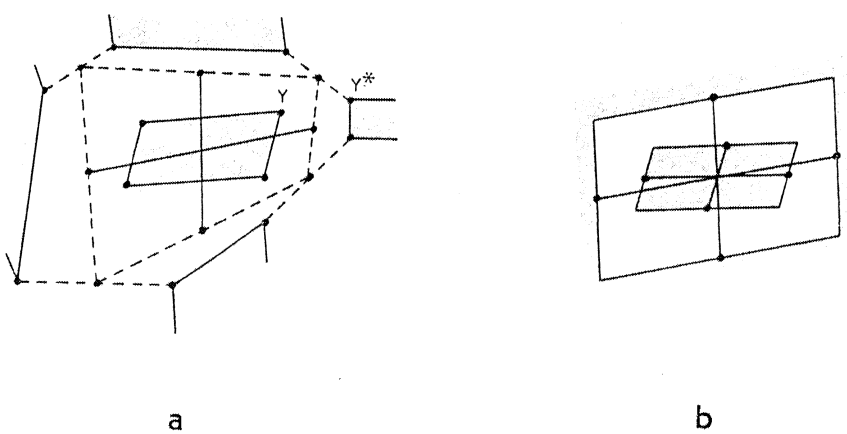


Fig. 6a - L'élément dans son vrai trou (en pointillé). Les coins Y sont ceux de l'élément central, les coins Y^* sont ceux des éléments voisins.
b - L'élément dans son trou équivalent (en blanc).

La déviation D est définie comme une distance carrée moyenne et peut être minimisée directement comme dans n'importe quelle procédure des moindres carrés.

-- *Minimisations*

Minimisation par rapport à une translation inconnue.

Supposons qu'en passant de l'état intermédiaire à l'état non déformé, le trou soit rigide et stationnaire, tandis que l'élément subit une translation rigide seulement. Ceci peut

être exprimé mathématiquement comme

$$\begin{aligned} Y^* &= Z^* \\ Y &= Z + B \end{aligned} \tag{10}$$

où B est un vecteur translation. La substitution de (10) dans (9) produit

$$D = \overline{(Z_i^* - Z_i - B_i)^2} \tag{11}$$

Pour minimiser (11), différencions par rapport à la translation inconnue et posons le résultat égal à zéro :

$$\frac{\partial D}{\partial B_i} = \overline{2(Z_i^* - Z_i - B_i)} = 0$$

comme B est supposé constant sur l'élément, (4) peut être écrit

$$B_i = \overline{Z_i^*} - \overline{Z_i} \tag{12}$$

Ici Z_i est le vecteur moyen des points autour de l'élément et Z_i^* le vecteur moyen des points autour du trou. Pour minimiser la déviation D, l'élément doit être translaté jusqu'à ce que les vecteurs moyens coïncident. Un résultat similaire d'une forme moins générale fut donné par A. Etchecopar (1974).

-- Minimisation par rapport à la rotation inconnue

Supposons que D ait déjà été minimisé par rapport à la translation de l'élément tel que $Y_i^* = \overline{Y_i}$. Une rotation rigide sur le vecteur moyen ne changera pas sa position, ainsi les précédents résultats sont conservés. Pour simplifier les mathématiques, on écrit :

$${}_oY_i = Y_i - \overline{Y_i} \tag{13}$$

où ${}_oY_i$ est la déviation de Y_i de la valeur moyenne, $\overline{Y_i}$. Une rotation rigide de l'élément autour de $\overline{Y_i}$ et dans un trou rigide stationnaire est exprimée comme

$$\begin{aligned} {}_oY_i^* &= {}_oZ_i^* \\ {}_oY_i &= R_{ij}\ {}_oZ_j \end{aligned} \tag{14}$$

où R_{ij} est un tenseur rotationnel.

La substitution de (14) dans (9) produit

$$\begin{aligned} D &= \overline{({}_oZ_i^* - R_{ij}\ {}_oZ_j)^2} \\ D &= \overline{({}_oZ_i^*)^2} + \overline{({}_oZ_j)^2} - 2\,R_{ij}\ \overline{{}_oZ_i^*\ {}_oZ_j} \end{aligned} \tag{15}$$

Les deux premiers termes sur le côté droit de (15) sont invariants par rapport à la rotation, tandis que dans le 3ème terme, la quantité ${}_oZ_i^*\ {}_oZ_j$ est invariante.

La déviation est un minimum quand ${}_oZ_i^*\ {}_oZ_j$ est un maximum. Aussi, aucune rotation n'intervient si $R_{ij} = \delta_{ij}$, le tenseur unité. ${}_oZ_i^*\ {}_oZ_j$ tend à devenir sa trace ${}_oZ_i^*\ {}_oZ_i$. Mais la trace d'un tenseur est maximale si ce dernier est symétrique. Ainsi, nous concluons que D est minimum par rapport à la rotation quand ${}_oZ_i^*\ {}_oZ_j$ est un tenseur symétrique. S'il n'est pas symétrique, il peut être exprimé comme le produit de composantes symétriques et orthogonales. La composante orthogonale est l'inverse de la rotation qui rend ${}_oZ_i^*\ {}_oZ_j$ symétrique et ainsi minimise D.

Une méthode numérique efficace de décomposition d'une matrice asymétrique est donnée dans l'annexe B.

REMARQUE

La minimisation par rapport à une déformation inconnue et une rotation peut être possible. Même si D a déjà été minimisé par rapport à la translation et à la rotation des éléments, il est possible de le réduire à nouveau en permettant une déformation supplémentaire de l'élément, accompagné d'une rotation. Cette technique est utilisable pour modifier les données de déformation d'origine mais aussi, pour estimer les erreurs dans les données ou dans des dilatations inconnues.

-- Assemblage numérique

Le calcul des translations et rotations a été effectué sur un "microordinateur" dont le langage est adapté au traitement des matrices. Pour assembler un réseau d'éléments, la procédure d'ajustement est exécutée pour le premier élément. Tous les voisins sont fixes, la procédure est ensuite répétée pour le deuxième élément, tous les voisins ainsi que le premier élément sont considérés fixes, ainsi de suite jusqu'à ce que le dernier élément soit assemblé. On effectue un cycle à travers la région entière.

Ensuite, un autre cycle est exécuté de la même façon, suivi par des cycles successifs jusqu'à ce que les ajustements soient négligeables.

La procédure d'ajustement produit une convergence dans tous les exemples étudiés jusqu'à maintenant (environ 20), mais la convergence peut être lente.

Dans quelques exemples, des instabilités ont été observées. Elles disparaissent plus tard mais elles empêchent une convergence rapide. Dans d'autres cas, des parties de la région deviennent temporairement bloquées dans une configuration métastable.

Pour ces raisons, nous avons créé une procédure plus rapide mais moins exacte, adaptée pour les premières étapes d'ajustement. Chaque élément est assemblé dans l'espace défini par au plus deux autres éléments déjà consolidés. La technique d'assemblage rapide est utilisée pour un cycle seulement. Cette procédure accomplit la plupart des translations et rotations demandées. De plus, des ajustements fins peuvent être ensuite accomplis en utilisant la méthode d'ajustement plus complète, décrite précédemment. Les programmes écrits pour un "microordinateur" sont développés dans l'annexe C.

2.3 ETUDE PARTICULIERE D'UNE SEULE COUCHE D'ELEMENTS : ESTIMATION DE LA ROTATION RIGIDE DANS LE PLAN VERTICAL

Les données géologiques ne nous permettent pas souvent d'obtenir le gradient vertical de déformation. De ce fait, les exemples traités se limitent en général à une seule couche d'éléments dans le plan horizontal. Mais l'utilisation seule de la méthode précédemment décrite, ne nous indique pas les rotations rigides des éléments finis dans le plan vertical, lors de la déformation inverse.

L'utilisation des plans de stratification* semble être une possibilité d'estimer ces quantités. Les plans de stratification sont définis par deux angles dans l'état déformé θ l'azimut et, ψ l'inclinaison. On suppose que ces plans sont horizontaux dans l'état initial non déformé ($\psi = o$). Les rotations rigides entre ces deux états des plans de stratification déterminent celles des éléments finis lors de la déformation inverse (M.N. Percevault, en préparation).

Pour effectuer cette détermination, on fait une déformation inverse du pôle du plan de stratification que l'on ramène à la verticale par rotation autour de l'horizontale du plan de stratification.

DEFINITION D'UN PLAN ET DU POLE D'UN PLAN

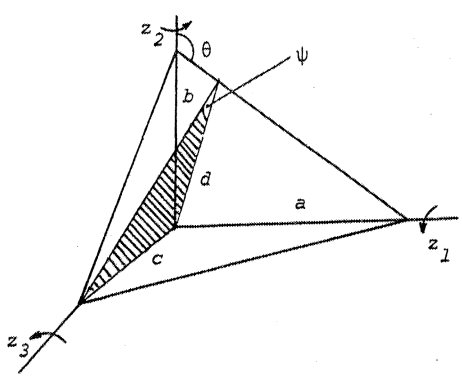


Fig. 7 - Représentation d'un plan d'azimut θ et de pendage ψ d'équation $az_1 + bz_2 + cz_3 + d = 0$

L'équation du plan s'écrit

$$az_1 + bz_2 + cz_3 + d = 0 \tag{16}$$

le pôle correspondant

$$\ell = \begin{pmatrix} 1/a \\ 1/b \\ 1/c \end{pmatrix} \tag{17}$$

---

* - Cette idée fut émise par W.M Schwerdtner

En reliant celà aux angles θ et ψ, l'expression vectorielle (17) nous conduit à (Fig.7) (18).

$$\begin{aligned} \tan(\pi - \theta) &= a/b \\ \tan \psi &= c/d \\ \sin(\pi - \theta) &= d/b \end{aligned} \qquad \text{d'où} \qquad \ell = \begin{vmatrix} -1/\tan\psi \cos\theta \\ 1/\tan\psi \sin\theta \\ 1 \end{vmatrix} \qquad (18)$$

DEFORMATION INVERSE DU POLE ℓ D'UN PLAN DANS L'ETAT DEFORME

L'équation du plan peut s'écrire $v^t \ell = 0$ (W.H. Owers 73) où
ℓ représente le pôle du plan et,
v^t l'expression transposée du vecteur plan.

Cette expression montre que le vecteur v qui définit le plan sera normal au pôle ℓ.

Si on considère une ligne définie par le vecteur V dans un milieu ensuite soumis à une déformation homogène finie S, le vecteur v après déformation est donné par :

$$v = S\,V \qquad (19)$$

Cette équation apporte des informations de changement en orientation et longueur d'une ligne par l'effet de la déformation S,

l'expression de la déformation inverse S^{-1} sera

$$V = S^{-1}\,v \qquad (20)$$

l'équation du plan normal à L s'écrit

$$V^t\,L = 0 \qquad (21)$$

la substitution de (20) donne

$$(S^{-1}\,v)^t\,L = 0$$
$$v^t\,(S^{-1})^t L = 0$$

Ceci peut être écrit sous la forme

$$v^t\,\ell = 0$$

avec ℓ vecteur normal au plan après déformation

$$\ell = (S^{-1})^t\,L \qquad (22)$$

Cette expression est similaire à (19).

Dans l'expression (19), la réorientation des lignes est gouvernée par le tenseur de déformation S et celle du pôle par $(S^{-1})^t$.

ESTIMATION DES ROTATIONS RIGIDES DANS LE PLAN VERTICAL

Le pôle du plan de stratification L défini dans l'état non déformé est parallélisé avec l'axe vertical z_3. Ces rotations rigides déterminent celles des éléments finis.

Mais, ceci perturbe la continuité du domaine obtenu par la minimisation précédente (page 18). Il est donc nécessaire d'effectuer des déplacements rigides (translations) et des rotations autour de l'axe vertical afin d'obtenir le modèle de la structure continue dans un état non déformé.

DISCUSSION

Deux types d'ajustement peuvent être utilisés lors du rapprochement des éléments :

.. par des rotations rigides autour des trois axes cartésiens en se basant sur les minimisations précédemment décrites page 18.

.. dans le cas particulier d'étude d'une seule couche d'éléments, on oriente l'élément dans le plan vertical par l'indication d'un paramètre géologique. Pour notre étude, il s'agit des plans de stratification. Puis, on effectue des translations et des rotations rigides par rapport à l'axe vertical.

J'ai utilisé conjointement les deux types d'ajustements dans les exemples étudiés, le premier type d'ajustement permettant une convergence beaucoup plus rapide des éléments.

2.4 ESTIMATION D'ERREURS

Des erreurs dans le champ de déformation obtenu par l'intégration de la déformation peuvent se présenter de deux façons.

ERREURS D'INTEGRATION

Celles-ci résultent de la technique d'intégration et de la taille finie des éléments employés. Leur magnitude peut être estimée globalement, en utilisant ce qui est connu sur les erreurs dans la méthode d'Euler modifiée de résolution d'équations différentielles ordinaires.

Ici, les erreurs sont de l'ordre h^3 ou h est une longueur fractionnelle. Ainsi, l'utilisation de 10 éléments conduira à une erreur d'environ $(0.1)^3 = 0.001$ ou 0.1% de la longueur d'une ligne.

Si l'interprétation se fait dans plus d'une direction, comme dans une technique d'éléments finis, les erreurs dans les trois directions sont interdépendantes à cause des conditions de compatibilités (4) approchées par les critères de minimisation. Ainsi, il peut y avoir des augmentations comme des diminutions locales dans les magnitudes d'erreurs estimées au-dessus.

Comme dans les solutions d'éléments finis de problèmes mécaniques, une façon d'éviter des erreurs d'intégration est de répéter une intégration trois ou quatre fois. On utilise successivement des éléments de plus petites tailles afin de voir la façon dont les réponses diffèrent. Si les différences sont négligeables, on peut considérer les éléments de taille suffisamment petite et accepter les résultats. Jusqu'à maintenant, aucun test de ce genre n'a été tenté alors que les intégrations de la déformation utilisent les éléments finis. C'est un test qui s'avère nécessaire maintenant que la technique commence à être utilisée plus fréquemment.

ERREURS DANS LES DONNEES

Si les données sont des déformations naturelles, elles seront inévitablement sujettes à des erreurs dues à :

.. des mesures défectueuses

.. des marqueurs de déformation inadéquats.

.. des dilatations inconnues et d'autres raisons.

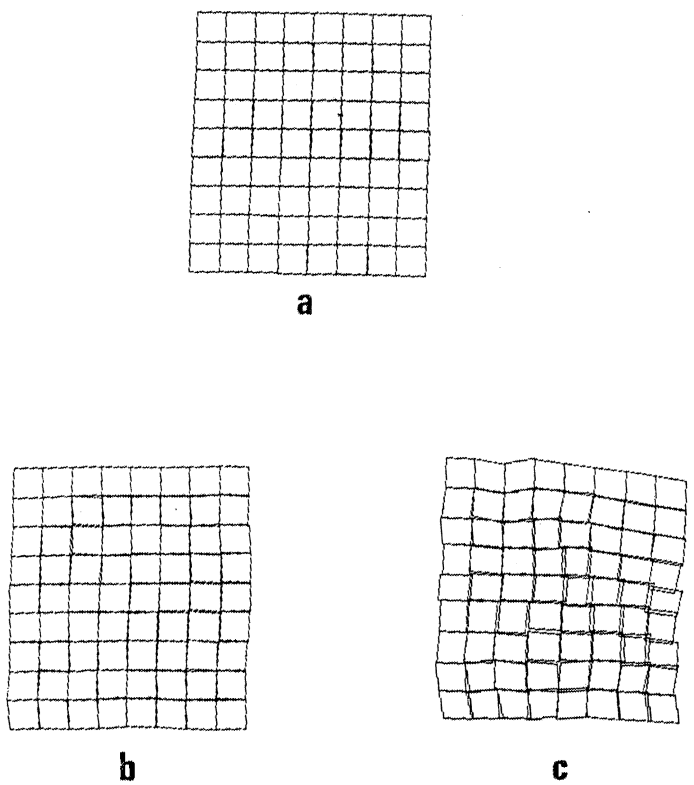


Fig. 8 - Effets d'erreurs dans les données de déformation finie.

a - Réseau d'éléments carrés dans l'état non déformé. Aucune erreur dans les données de départ.

b - Erreurs de ± 10% dans les valeurs principales de déformation.

c - Erreurs de ± 10% dans les valeurs principales et les orientations de la déformation.

Si les erreurs ne sont pas trop importantes et sont distribuées au hasard en termes de position et d'orientation spatiales, nous pouvons espérer compenser l'une par l'autre durant la procédure de minimisation. Comme illustration, considérons une région d'éléments plans

identiques dans l'état non déformé (Fig. 8a). Si des erreurs de ± 10% pour les valeurs d'intensité de la déformation principale sont introduites (Fig. 8b), elles sont presque complètement compensées durant l'intégration.

Des erreurs complémentaires sur l'orientation, de ± 10%, amènent des perturbations supplémentaires (Fig. 8c) mais, la compensation joue encore.

Si les erreurs sont systématiques, elles s'accumulent inévitablement durant l'intégration spatiale et doivent être prises en compte, mais, l'intégration peut produire encore le modèle de base d'un champ de déformation et ainsi est intéressante.

Une mesure sur l'incertitude de l'erreur au hasard peut être obtenue en calculant la déviation totale des distances interfaciales. Des erreurs systématiques, par contre, peuvent avoir seulement un petit effet sur la déviation totale. En particulier, une dilatation homogène n'a pas d'effet sur la configuration de l'élément : le changement de volume systématique est donc indétectable, si seulement les déformations déviatoriques sont disponibles comme données. Pour conclure ce paragraphe, les erreurs induites par les changements de volume pourront faire l'objet de travaux ultérieurs.

2.5 CONCLUSIONS

La technique d'éléments finis pour l'intégration spatiale de la déformation est essentiellement équivalente à la méthode d'Euler modifiée pour l'intégration numérique d'équations différentielles ordinaires.

Les éléments finis permettent de faire varier à volonté la dimension des mailles de façon fine autour d'une hétérogénéité. Il est pratique de prendre toutefois des formes d'élément comme des parallélépipèdes ou des parallélogrammes aussi égaux que possible dans l'état final déformé. L'ordre des éléments est important car, c'est sur la base d'un réarrangement les uns par rapport aux autres des éléments, que se fait l'ajustement.

Une mesure de rapprochement entre un élément et le trou défini par ses voisins est la déviation D définie comme la distance carrée moyenne entre les points frontières de l'élément et les points frontières du trou.

Un critère pour le meilleur ajustement d'un élément dans son trou est de minimiser la déviation. Ceci produit la translation et rotation inconnues que l'élément doit subir pour assurer un meilleur ajustement.

Des parallélépipèdes non déformés seront assemblés par minimisation des distances entre les centres des faces d'éléments adjacents.

L'ajustement d'un réseau d'éléments est plus aisément résolu par l'utilisation d'un calculateur. Chaque élément est tourné dans son trou défini par ses voisins stationnaires. Un sous-programme rapide permet d'obtenir rapidement un résultat approximatif après un cycle d'opérations d'ajustement. Un autre sous-programme plus rigoureux améliore le résultat au cours de plusieurs cycles d'itérations.

Le programme de déformation inverse PUZZLE a une place mémoire de 33K. Le réseau déformé peut être composé de 160 éléments au maximum. Il demande quelques minutes à une heure d'exécution sur un calculateur HP 9845A suivant les cas d'études.

Enfin, une tolérance sur des erreurs dans les données est intégrée par la méthode des éléments finis, si on admet une incertitude maximale de 10% sur les valeurs d'intensité de la déformation et de 10% sur l'orientation des axes de la déformation.

3

ETUDE D'EXEMPLES THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX

La technique de la déformation inverse mise au point et traduite par le programme (PUZZLE) a été testée sur quelques exemples théoriques et modèles analogiques : modèle quadratique, zone de cisaillement, dôme diapirique. Toute cette partie a été présentée à la table ronde du CNRS sur les "strain patterns" (M.N. Percevault, 1982).

3.1. MODELE QUADRATIQUE

Par analogie avec ce qui arrive pour les équations différentielles ordinaires, nous pouvons suspecter que la méthode des éléments finis, étant une méthode d'Euler modifiée, donne la solution exacte si la déformation inverse $z = z(z)$ est l'expression d'une fonction quadratique. C'est ce que nous vérifions dans cette partie en étudiant un modèle bidimensionnel isochorique.

Après avoir expliqué brièvement la construction de cet exemple, on analysera les résultats successivement obtenus lors du rapprochement des éléments par le programme de déformation inverse.

DEFINITION DU MODELE QUADRATIQUE

On considère un vecteur $\vec{u}\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ (Fig. 9) et, on assimile celui-ci à une somme de n vecteurs élémentaires (Fig. 10).

$$\vec{u} = \int d\vec{u} = n\ \delta\vec{u} \qquad (23)$$

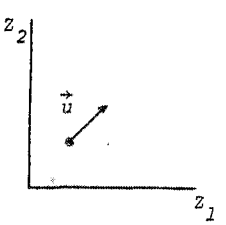


Fig. 9 - Représentation du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $z_1\ z_2$

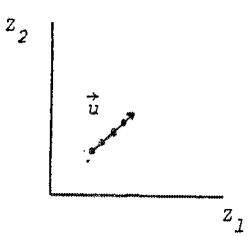


Fig. 10 - Représentation du vecteur $\vec{u}$ en n vecteurs élémentaires dans le repère $z_1\ z_2$

avec

$$\delta\vec{u} = \begin{pmatrix} z_1/n \\ z_2/n \end{pmatrix}$$

Sa position va s'exprimer par

$$\begin{pmatrix} iz_1/n \\ iz_2/n \end{pmatrix} \tag{24}$$

Recherchons l'expression du vecteur après déformation

$$z_i = D_{ij}\, z_j$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ai\ z_1/n + bi\ z_2/n + 1 & ci\ z_1/n + di\ z_2/n \\ ei\ z_1/n + fi\ z_2/n & gi\ z_1/n + hi\ z_2/n + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1/n \\ z_2/n \end{pmatrix} \tag{25}$$

D exprime la matrice des gradients de déformation.

Après développement, on en déduit que

$$\begin{aligned} z_1 &= \Delta z_1 + z_1 \\ z_2 &= \Delta z_2 + z_2 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\Delta z_1 = \frac{1}{2}\,(a\, z_1^2 + (b + c)\, z_1 z_2 + d\, z_2^2)$$

$$\Delta z_2 = \frac{1}{2}\,(e\, z_1^2 + (f + g)\, z_1 z_2 + h\, z_2^2)$$

z_1 et z_2 expriment les positions des centres des éléments après déformation.

CONSTRUCTION DU MODELE

Pour la construction du modèle, j'ai choisi 25 éléments dont les centres sont répartis comme l'indique le tableau 1A. La détermination des matrices des gradients de déformation D (tableau 1B) permet de connaître les nouvelles positions des éléments après déformation (tableau 1C).

L'effet de la déformation dans le modèle quadratique amène en coïncidence les paires des centres des faces. Les centres des éléments (mais pas les autres points) sont des positions exactes de l'état non déformé.

Le programme PUZZLE cherche à obtenir cette même solution lors des itérations pour l'ajustement. On va donc voir s'il existe une évolution de l'organisation des éléments ainsi obtenue lorsque l'on applique le programme.

RESULTATS

L'introduction de cet exemple (Fig. 11a) dans le programme PUZZLE ne nous conduit pas à une stabilité des éléments en bordure (Fig. 11b).

Col / Lign	1	2	3	4	5
1	-2 2	-1 2	0 2	1 2	2 2
2	-2 1	-1 1	0 1	1 1	2 1
3	-2 0	-1 0	0 0	1 0	2 0
4	-2 -1	-1 -1	0 -1	1 -1	2 -1
5	-2 -2	-1 -2	0 -2	1 -2	2 -2

Tableau 1A - Position des centres des éléments avant déformation pour les 25 éléments $\binom{Z1}{Z2}$

Z_2 \ Z_1	-2	-1	0	1	2
2	- 0.8 22.4	- 0.8 14.4	0.8 6.4	4 8	8.8 9.8
1	- 3 14	- 2.2 7.6	0.2 4.4	4.2 4.4	9.8 7.6
0	- 4.8 6.4	- 3.2 1.6	4 0	4.8 1.6	11.2 6.4
-1	- 6.2 6.4	- 3.8 - 3.6	0.2 -3.6	5.8 -0.4	13 6
-2	- 7.2 - 6.4	- 4 - 8	0.8 -6.4	7.2 -1.6	15.2 6.4

Tableau 1B - Position des centres des éléments après déformation $\binom{z1}{z2}$

Z_2 \ Z_1	-2		-1		0		1		2	
2	-0.2 -2.4	0.6 2.2	0.2 - 1.6	0.4 1.8	0.6 -0.8	0.2 1.4	1 0	0 1	1.4 0.8	-0.2 0.6
1	0 -2	0.5 2	0.4 - 1.2	0.3 1.6	0.8 -0.4	0.1 1.2	1.2 0.8	-0.1 0.6	1.6 1.2	-0.3 0.4
0	0.2 -1.6	0.4 1.8	0.6 -0.8	0.1 1.4	1 0	0 1	1.4 0.8	-0.2 0.6	1.8 1.6	-0.4 0.2
-1	0.4 -1.2	0.3 1.6	0.8 -0.4	0.1 1.2	1.2 0.4	-0.1 0.8	1.6 1.2	-0.3 0.4	2 2	-0.5 0
-2	0.6 -0.8	0.2 1.4	1 0	0 1	1.4 0.8	-0.2 0.6	1.8 1.6	-0.4 0.2	2.2 2.4	-0.6 -0.2

Tableau 1C - Matrice des gradients de déformation D

Le tableau 2 indique la position des centres des éléments avant et après ajustement.

Si maintenant, on fixe les éléments périphériques de l'exemple considéré, on obtient une stabilité des éléments (Tableau 3).

Ceci souligne l'importance des problèmes liés aux conditions de bordure. L'ajustement sera plus exact au centre du modèle (moins exact sur les bords). On voit ici l'intérêt d'utiliser un nombre aussi élevé que possible d'éléments finis.

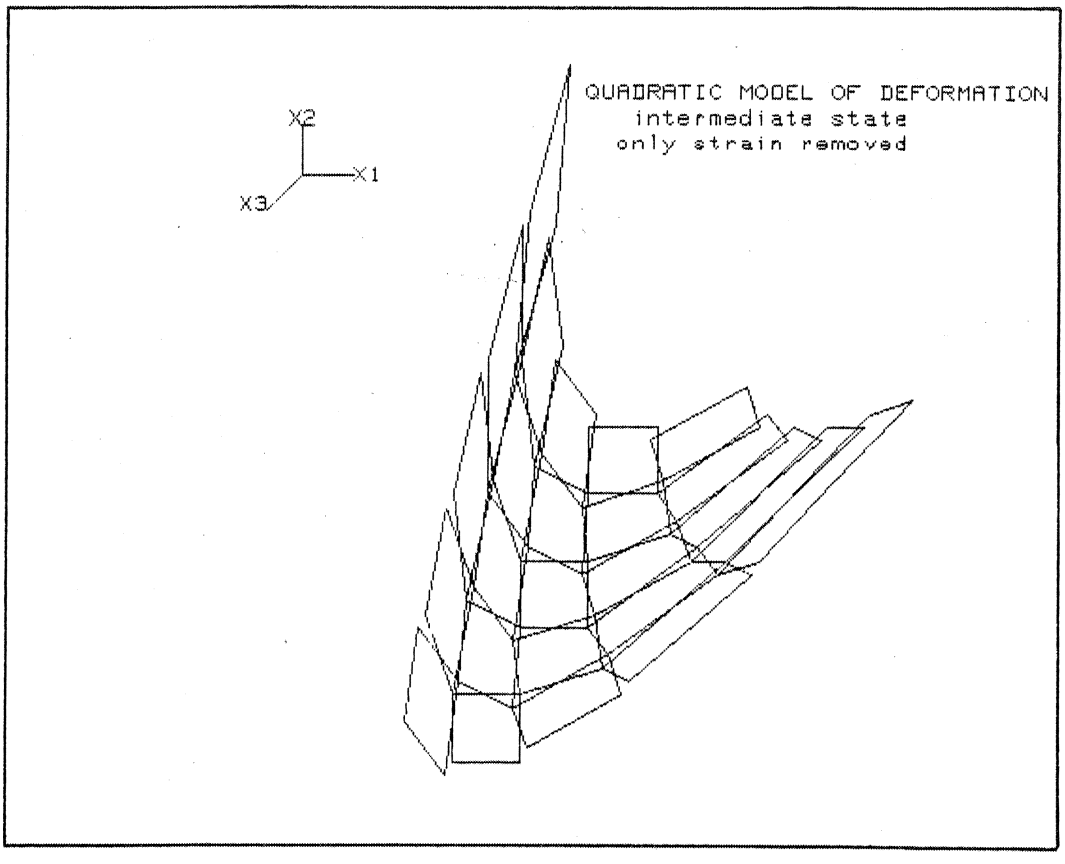


Fig. IIa - Modèle quadratique de déformation montrant les éléments non déformés, positionnés de telle façon que les centres des faces coïncident.

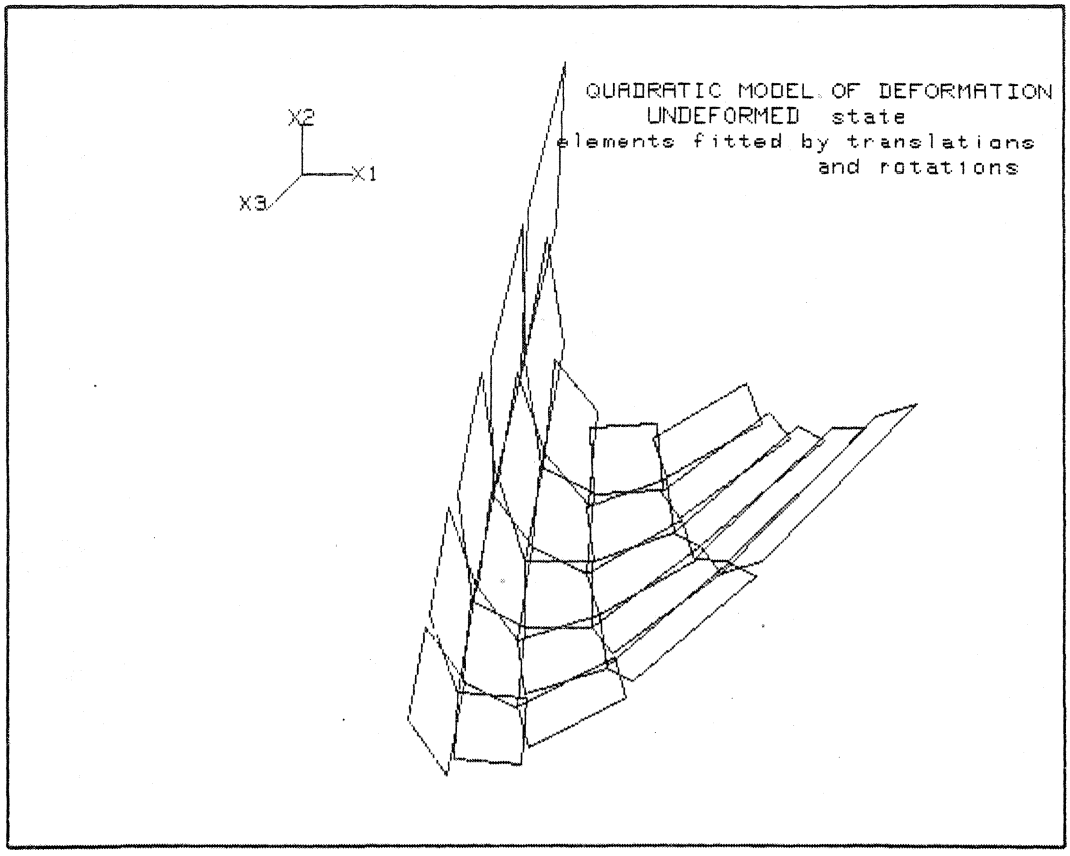


Fig. 11b - Modèle quadratique de déformation. Les éléments non déformés ont été assemblés par la partie ajustement du programme de déformation inverse. On observe une variation de la position des éléments de bordure (cf. Tableau 2).

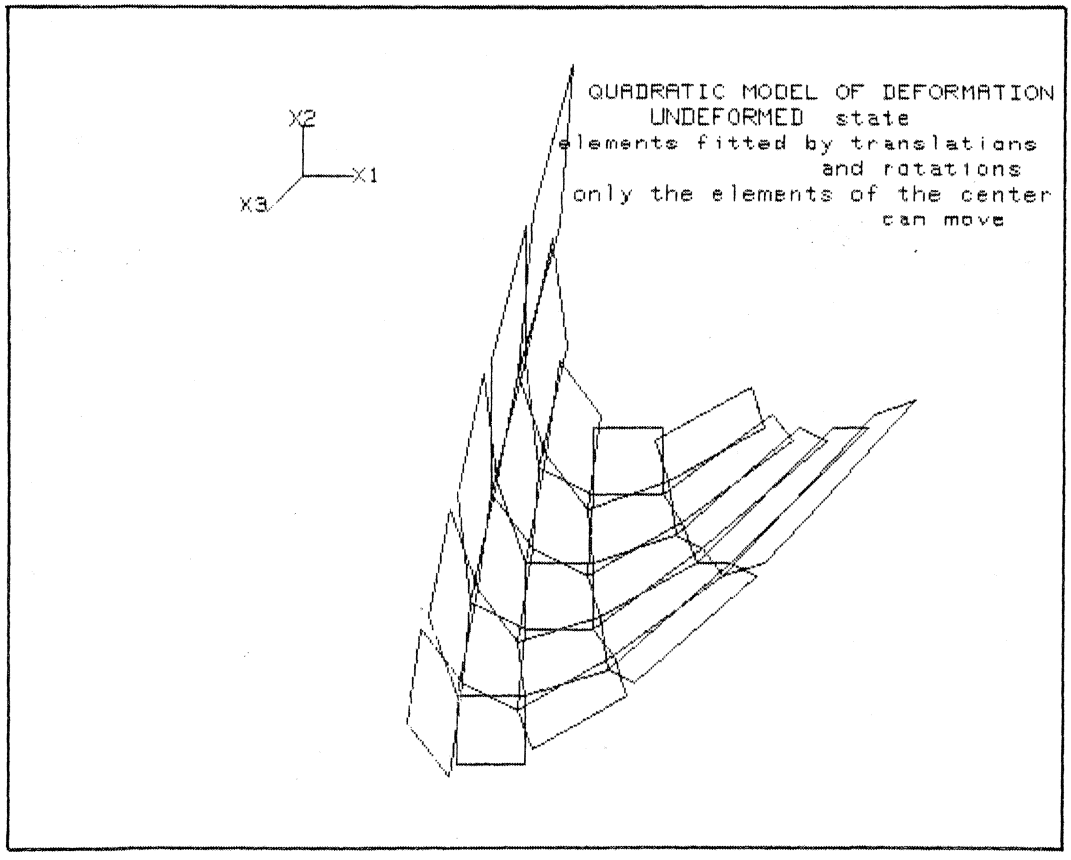


Fig. 11c - Modèle quadratique de déformation. Dans cet exemple, les éléments de bordure ont une position fixe. Seuls les éléments centraux sont mobiles. On observe une parfaite stabilité de l'ensemble (tableau 3).

z1	z2
- .80	22.40
- .80	14.40
.80	9.60
4.00	8.00
8.80	9.60
-3.00	14.00
-2.20	7.60
.20	4.40
4.20	4.40
9.80	7.60
-4.80	6.40
-3.20	1.60
0.00	0.00
4.80	1.60
11.20	6.40
-6.20	- .40
-3.80	-3.60
.20	-3.60
5.80	- .40
13.00	6.00
7.20	-6.40
-4.00	-8.00
.80	-6.40
7.20	-1.60
15.20	6.40

Tableau 2a - Position des centres des éléments (du modèle quadratique) dans leur état déformé. (z1,z2)

z1	z2
- .94	22.42
- .83	14.41
.77	9.61
3.97	8.02
8.76	9.70
-3.02	14.00
-2.17	7.60
.24	4.40
4.24	4.41
9.81	7.63
-4.80	6.39
-3.18	1.60
.01	- .00
4.81	1.60
11.22	6.39
-6.20	- .41
-3.79	-3.60
.21	-3.60
5.81	- .40
13.02	5.98
-7.20	-6.38
-4.07	-8.01
.76	-6.46
7.21	-1.66
15.38	6.26

Tableau 2b - Variation des positions des centres des éléments lors de l'application de la partie ajustement (par translations et rotations) du programme de déformation inverse.

z1	z2
- .80	22.40
- .80	14.40
.80	9.60
4.00	8.00
8.00	9.60
-3.00	14.00
-2.20	7.60
.20	4.40
4.20	4.40
9.80	7.60
-4.80	6.40
-3.20	1.60
0.00	0.00
4.80	1.60
11.20	6.40
-6.20	- .40
-3.80	-3.60
.20	-3.60
5.80	- .40
13.00	6.00
-7.20	-6.40
-4.00	-8.00
.80	-6.40
7.20	-1.60
15.20	6.40

Tableau 3a - Position des centres des éléments (du modèle quadratique) dans leur état déformé. (z1,z2)

z1	z2
- .80	22.40
- .80	14.40
.80	9.60
4.00	8.00
8.80	9.60
-3.00	14.00
-2.20	7.60
.20	4.40
4.20	4.40
9.80	7.60
-4.80	6.40
-3.20	1.60
0.00	0.00
4.80	1.60
11.20	6.40
-6.20	- .40
-3.80	-3.60
.20	-3.60
5.80	- .40
13.00	6.00
-7.20	-6.40
-4.00	-8.00
.80	-6.40
7.20	-1.60
15.20	6.40

Tableau 3b - Stabilité des éléments en bordure du réseau. L'application de la partie ajustement (par translations et rotations) du programme de déformation inverse n'a pas d'effet sur la position des centres des éléments.

3.2 STRUCTURES PLISSEES

Deux exemples de plis ont été traités, celui d'un pli concentrique et celui d'un pli semblable.

PLI CONCENTRIQUE

Cet exemple illustre la déformation inverse d'un pli concentrique divisé en 36 éléments (4 couches x 9 colonnes) (Fig. 12a). Les données de déformation finie ont été calculées théoriquement pour chaque élément (Fig. 12b, tableaux 4b,c).

Les positions des centres des éléments sont exprimés par $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_n * R_i \\ \sin \theta_n * R_i \end{pmatrix}$ pour chaque élément n $(n = 1 \text{ à } 9)$ de la ième couche $(i = 1 \text{ à } 4)$ (Fig. 12a, tableau 4a). Leurs dimensions sont données dans le tableau 4d et leurs orientations dans le tableau 4e.

La technique de la déformation inverse appliquée à cette structure plissée (Fig. 13a) permet de définir une couche initiale parfaitement plane (Fig. 13c). Le découpage du domaine déformé (Fig. 13a) en rectangles ne couvre pas parfaitement toute la structure. Ceci peut être la cause du très léger épaississement de la couche initiale (Fig. 13c).

Une inclinaison du modèle initial non déformé (Fig. 13c) est dûe à l' ajustement des éléments qui se fait par rapport au premier élément. Cette observation met en évidence un point important de la technique utilisée. En effet, nous n'avons pas d'indication sur la rotation rigide entre l'état déformé et l'état non déformé obtenu.

Le temps de déroulement de l'opération est de quelques minutes. Les données de déformation finie sont des termes exacts. Les éléments sont des rectangles (forme géométrique simple).

Ceci accélère nettement les calculs et améliore la rapidité de la convergence. Cet exemple peut être analysé en trois dimensions et demande à peu près le même temps d'exécution.

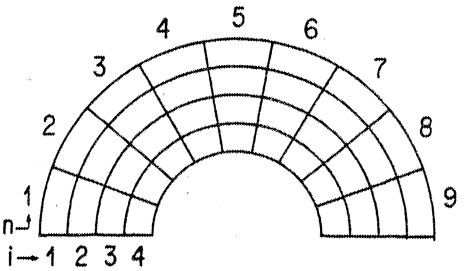


Fig. 12 - a .division du pli en 36 éléments (4 lignes de 9 éléments)

couche : i
colonne : n

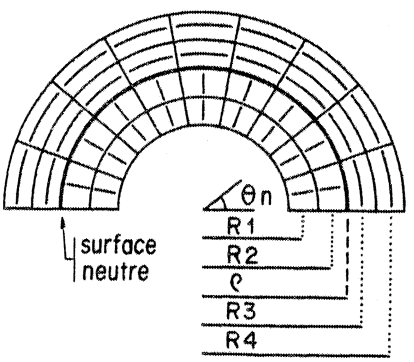


Fig. 12 - b .trace de la schistosité dans chaque élément du pli.

R_i $(i = 1 \text{ à } 4)$ distance du centre de l'élément au centre du pli

ρ distance du centre du pli à la surface neutre.

θ_n angle d'orientation de la schistosité pour les n éléments de chaque couche.

Si $R_i \leqslant \rho$ orientation de la schistosité θ_n. $(i=1à4)$

Si $R_i > \rho$ orientation de la schistosité $\theta_n + \pi/2$ $(i=1à4)$

$\lambda_1 = R_i/\rho$ $(i=1à4)$

$\lambda_2 = \rho/R_i$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-6.4 1.13	-5.63 3.25	-4.18 4.98	-2.22 6.11	0 6.5	2.22 6.11	4.18 4.98	5.63 3.25	6.4 1.13
2	-5.42 0.96	-4.76 2.75	-3.54 4.21	-1.88 5.17	0 5.5	1.88 5.17	3.57 4.21	4.76 2.75	5.42 0.96
3	-4.43 0.78	-3.9 2.25	-2.89 3.45	-1.54 4.23	0 4.5	1.54 4.23	2.89 3.45	3.9 2.25	4.43 0.783
4	-3.45 0.61	-3.03 1.75	-2.25 2.68	-1.2 3.29	0 3.5	1.2 3.29	2.25 2.68	3.03 1.75	3.45 0.61

Tableau 4A - Position des centres des éléments $\begin{pmatrix} z1 \\ z2 \end{pmatrix}$ dans leur état déformé.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.3 0.76	1.3 0.76	1.3 0.76	1.3 0.76	1.3 0.76	1.3 0.76	1.3 0.76	1.3 0.76	1.3 0.76
2	1.1 0.9	1.1 0.9	1.1 0.9	1.1 0.9	1.1 0.9	1.1 0.9	1.1 0.9	1.1 0.9	1.1 0.9
3	0.9 1.1	0.9 1.1	0.9 1.1	0.9 1.1	0.9 1.1	0.9 1.1	0.9 1.1	0.9 1.1	0.9 1.1
4	0.7 1.4	0.7 1.4	0.7 1.4	0.7 1.4	0.7 1.4	0.7 1.4	0.7 1.4	0.7 1.4	0.7 1.4

Tableau 4B - Valeurs des axes principaux de l'ellipse de déformation $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-80	-60	-40	-20	0	20	40	60	80
2	-80	-60	-40	-20	0	20	40	60	80
3	-80	-60	-40	-20	0	20	40	60	80
4	-80	-60	-40	-20	0	20	40	60	80

Tableau 4C - Orientation du grand axe de l'ellipse de déformation λ_1 (angle mesuré sens horaire)

	Pour les colonnes de 1 à 9
1	2.27 1
2	1.92 1
3	1.57 1
4	1.22 1

Tableau 4D

- Longueur des côtés des éléments dans leur état déformé suivant $\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-80	-60	-40	-20	0	20	40	60	80
2	-80	-60	-40	-20	0	20	40	60	80
3	-80	-60	-40	-20	0	20	40	60	80
4	-80	-60	-40	-20	0	20	40	60	80

Tableau 4E

- Orientation des éléments dans leur état final déformé (angle mesuré sens horaire).

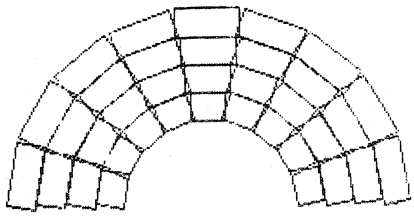


Fig. 13a - Etat final déformé

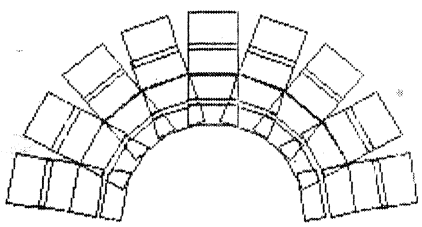


Fig. 13b - Etat après déformation inverse

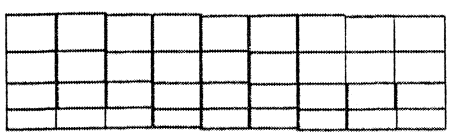


Fig. 13c - Etat initial non déformé

PLI SEMBLABLE

Le pli étudié est divisé en 39 éléments (3 lignes x 13 colonnes), (Fig. 15a). Les mesures de déformation finie en intensité et orientation sont calculées de façon théorique (Fig. 14). Elles sont résumées dans le tableau 5b et c.

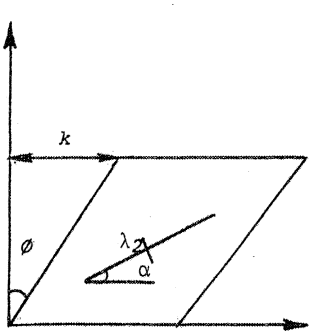


Fig. 14 - Déformation d'un élément rectangulaire
k taux de cisaillement
ϕ angle de cisaillement
α orientation de l'axe principal de déformation λ_1.
λ_1 λ_2 axes principaux de déformation

$$\lambda_1^2 = (1 + k^2/2) + k\,(1 + k^2/4)^{1/2}$$

$$\lambda_2^2 = (1 + k^2/2) - k\,(1 + k^2/4)^{1/2}$$

$$\alpha = 1/2\,(\pi/2 - \mathrm{arctg}\ k/2)$$

Les résultats obtenus lors de la déformation (Fig. 15b) sont très encourageants. On conserve au cours de la déformation inverse la même dimension du segment AB (Fig. 15).

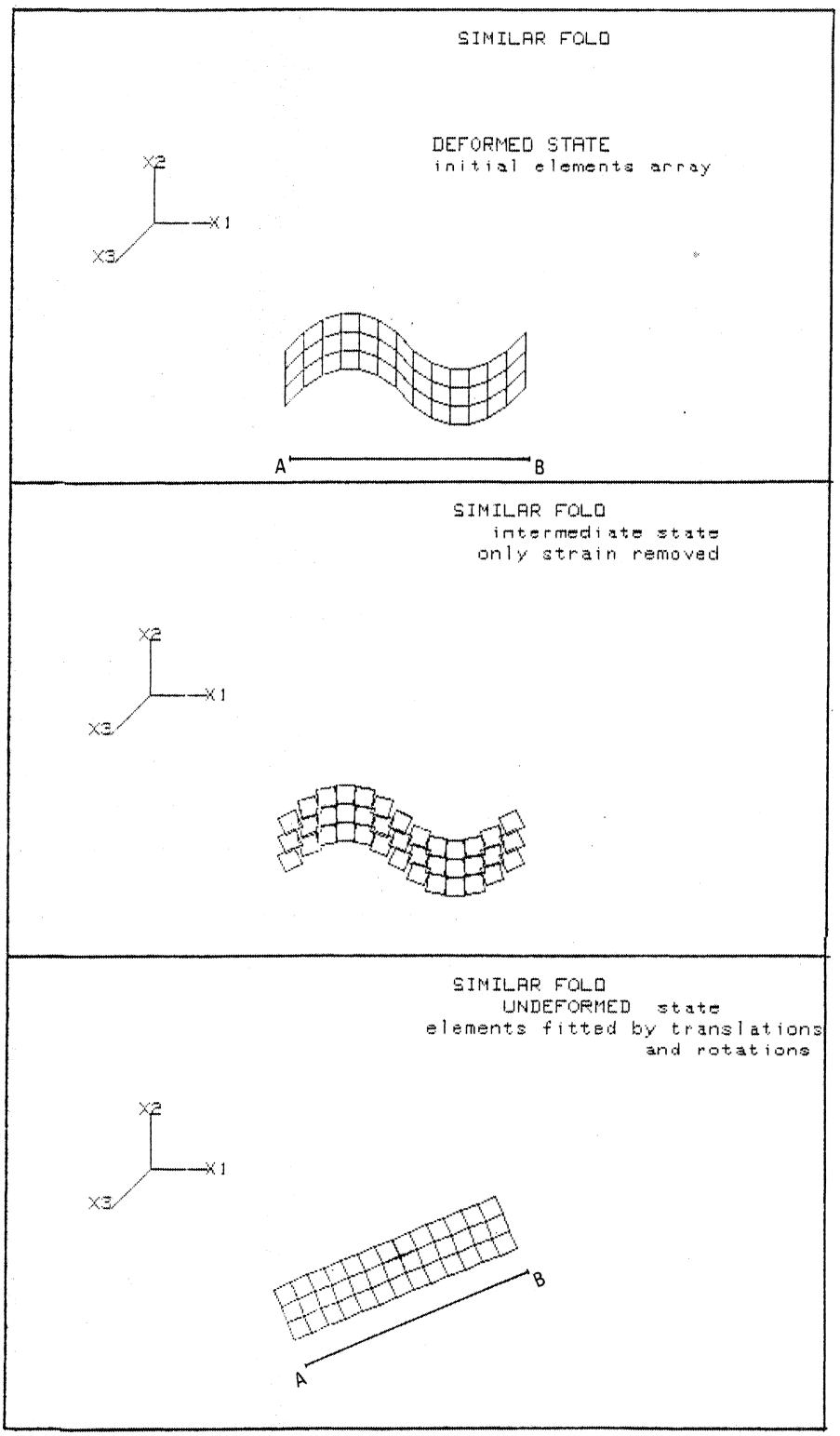


Fig. 15 - Déformation inverse d'un pli semblable.

a - Etat final déformé

b - Etat intermédiaire

c - Etat initial non déformé

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0.5 3	1.5 3.83	2.5 4.33	3.5 4.5	4.5 4.33	5.5 3.83	6.5 3	7.5 2.17	8.5 1.67	9.5 1.5	10.5 1.67	11.5 2.17	12.5 3
2	0.5 2	1.5 2.83	2.5 3.33	3.5 3.5	4.5 3.33	5.5 2.83	6.5 2	7.5 1.17	8.5 0.67	9.5 0.5	10.5 0.67	11.5 1.17	12.5 2
3	0.5 1	1.5 1.83	2.5 2.33	3.5 2.5	4.5 2.33	5.5 1.83	6.5 1	7.5 0.17	8.5 -0.33	9.5 -0.5	10.5 -0.33	11.5 -0.17	12.5 1

Tableau 5A - Position des centres des éléments dans leur état déformé $\begin{pmatrix} z1 \\ z2 \end{pmatrix}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Pour les 3 couches	2.62 0.38	1.92 0.52	1.39 0.72	1 1	1.39 0.72	1.92 0.52	2.62 0.38	1.92 0.52	1.39 0.72	1 1	1.39 0.72	1.92 0.52	2 0

Tableau 5B - Valeurs des axes principaux de l'ellipse de déformation $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Pour les 3 couches	58.3	54.2	49.7	0	-49.7	-54.2	-58.3	-54.2	-49.7	0	49.7	54.2	58.3

Tableau 5C - Orientation du grand axe de l'ellipse de déformation λ_1 (angle mesuré sens horaire).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Pour les 3 couches	45	33.7	18.43	0	-18.43	-33.7	-45	-33.7	-18.43	0	18.43	33.7	45

Tableau 5D - Angle de cisaillement de l'élément dans son état final déformé.

3.3. ZONE DE CISAILLEMENT SIMPLE

Une étude théorique sur une zone de cisaillement simple a été menée. Les mesures de déformation ont été calculées de façon théorique et sont schématisées par la figure 16.

On suppose que le domaine est non déformé en dehors de la zone cisaillée. La déformation inverse de ce domaine confirme la bonne marche du programme (Fig. 17a, b, c).

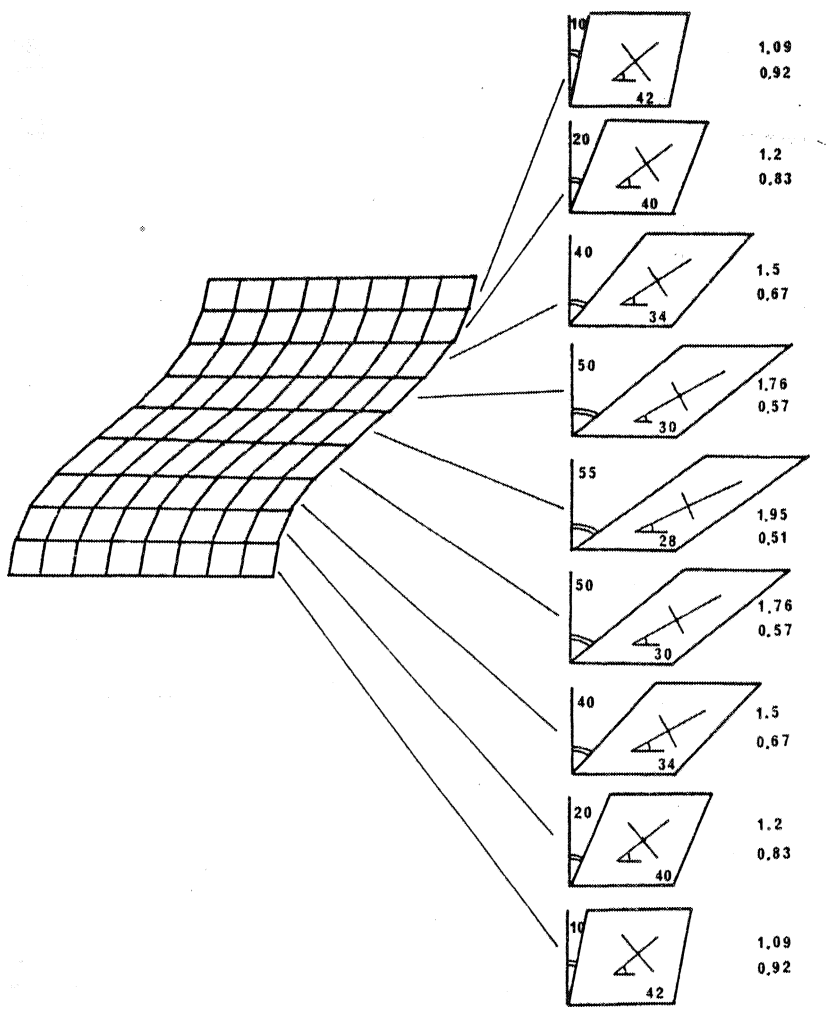
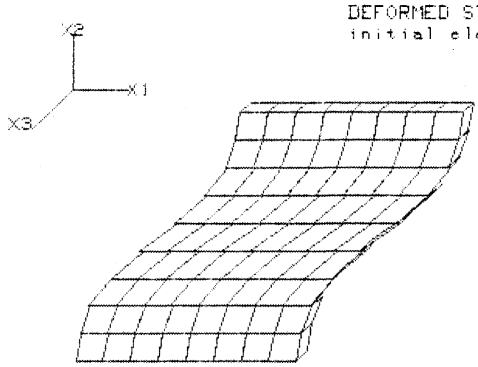
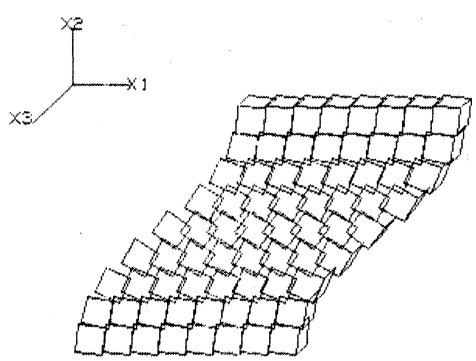


Fig. 16 - Découpage en éléments finis d'une zone cisaillée : la quantification de la déformation liée à la forme cisaillée de l'élément est définie selon la figure 14.

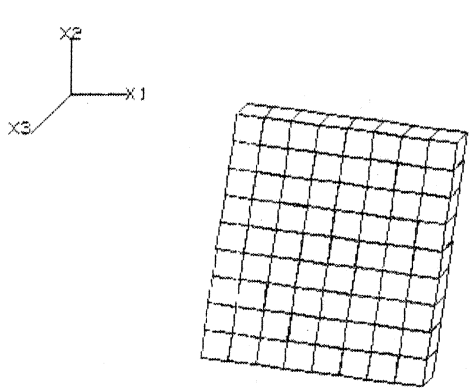
Fig. 17 - Déformation inverse d'une zone cisaillée



a -
Etat final déformé



b -
Etat intermédiaire



c -
Etat initial non déformé

3.4 DOME DIAPIRIQUE EXPERIMENTAL

Cette étude reprend les résultats expérimentaux de J.M. Dixon (1975) sur la distribution de la déformation finie dans et autour de structures diapiriques obtenues par centrifugation de modèles en silicone.

Je me suis intéressée pour ma part au modèle de déformation d'un diapir immature (Fig. 18). Les données de J.M. Dixon sur ce modèle sont résumées dans le tableau 6.

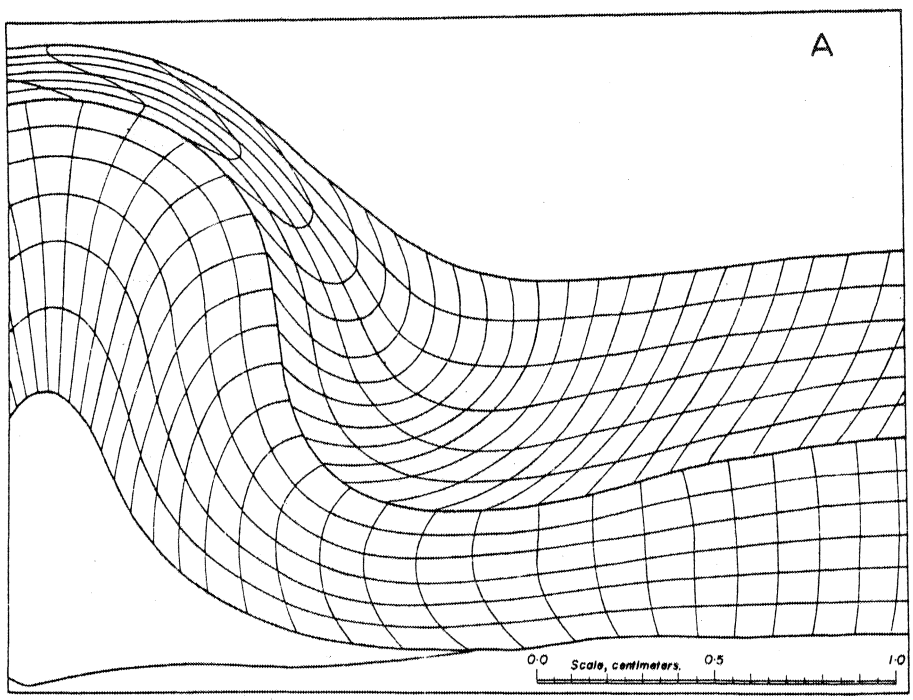


Fig. 18 - Découpage en éléments finis d'un diapir immature (J.M. Dixon 1975).

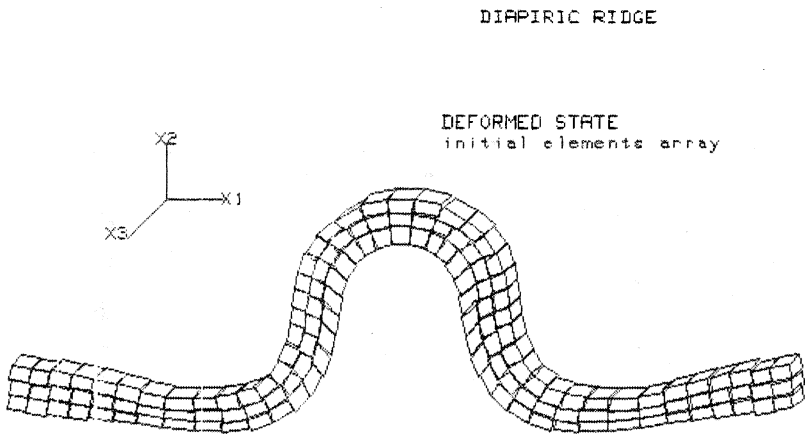
L'état initial obtenu par déformation inverse (Fig.19a,b,c) correspond à une couche plane (Fig.19c) mais légèrement inclinée (car la rotation rigide de l'ensemble est inconnue).

Quelques perturbations apparaissent dans la couche initiale ainsi qu'une légère augmentation de longueur d'environ 3%. Ceci peut être du :

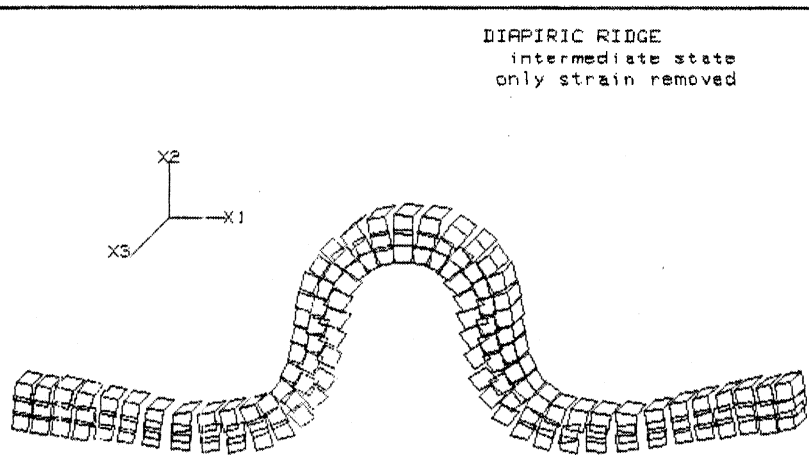
- .. aux formes des éléments utilisés qui n'épousent pas parfaitement la trame donnée par J.M. Dixon
- .. aux légères imperfections du réseau défini dans l'état déformé
- .. aux valeurs de déformation finie déterminées
- .. à des perturbations initiales dans le modèle de Dixon
- .. aux erreurs d'intégration.

Le temps de calcul nécessaire à un exemple bidimensionnel de plus de 150 éléments est de 5 à 6 minutes. L'étude d'une couche d'éléments, traitée en 3 dimensions (Fig. 19) demande 8 à 10 minutes d'exécution.

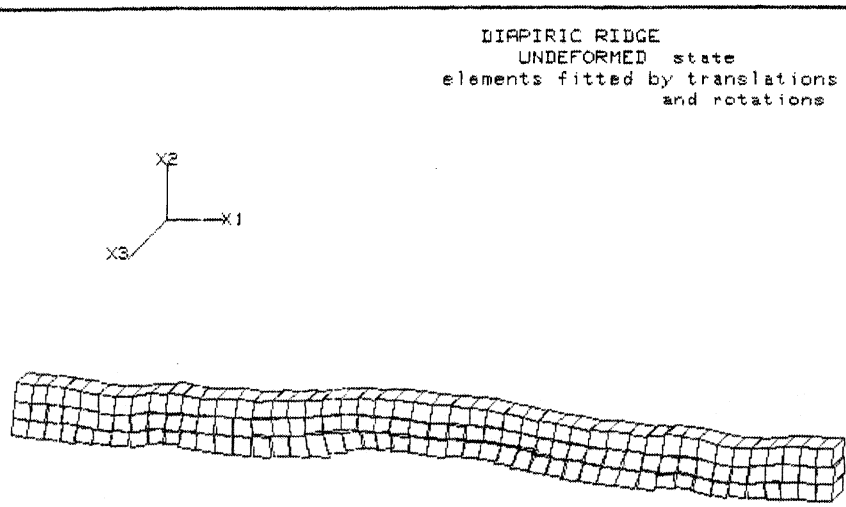
Fig. 19 - Déformation inverse d'un dome diapirique



a -
Etat final déformé



b -
.ntermédiaire



c -
Etat initial non déformé

	1	2	3	4
1	-16 5	-16.2 4.3	-16.2 3.6	-16.3 3
2	-14.8 4.7	-14.9 4	-15 3.4	-15 2.8
3	-13.5 4.3	-13.6 3.7	-13.6 3.2	-13.7 2.6
4	-12 4.1	-12 3.5	-12 3	-12.1 2.5
5	-10.6 4.1	-10.4 3.5	-10.4 2.9	-10.5 2.3
6	- 9.4 4.2	- 9 3.5	- 9 2.9	- 9 2.3
7	- 8.2 4.5	- 7.8 3.8	- 7.6 3.2	- 7.6 2.5
8	- 7.3 5.1	- 6.8 4.4	- 6.5 3.7	- 6.4 3
9	- 6.5 5.8	- 5.9 5.3	- 5.5 4.5	- 5.5 3.6
10	- 6 6.8	- 5.3 6.2	- 4.8 5.5	- 4.6 4.5
11	- 5.7 7.9	- 5 7.4	- 4.3 6.5	- 3.9 5.4
12	- 5.5 8.8	- 4.7 8.4	- 4 7.7	- 3.5 6.3
13	- 5.4 9.8	- 4.6 9.4	- 3.8 8.8	- 3.1 7.6
14	- 5.3 10.7	- 4.5 10.4	- 3.7 9.8	- 2.9 8.8
15	- 5 11.7	- 4.3 11.4	- 3.5 10.8	- 2.8 9.7
16	- 4.5 12.6	- 3.8 12.3	- 3 11.7	- 2.4 10.8
17	- 3.8 13.5	- 3.1 13.1	- 2.5 12.4	- 2 11.4
18	- 2.7 14.2	- 2.2 13.7	- 1.8 12.9	- 1.4 11.9
19	- 1.4 14.8	- 1.2 14	- 1 13.2	- 0.7 12.1
20	0 14.9	0 14.2	0 13.3	0 12.1
21	1.4 14.8	1.2 14	1 13.2	0.7 12.1
22	2.7 14.2	2.2 13.7	1.8 12.9	1.4 11.9
23	3.8 13.5	3.1 13.1	2.5 12.4	2 11.4
24	4.5 12.6	3.8 12.3	3 11.7	2.4 10.8
25	5 11.7	4.3 11.4	3.5 10.8	2.8 9.7
26	5.3 10.7	4.5 10.4	3.7 9.8	2.9 8.8
27	5.4 9.8	4.6 9.4	3.8 8.8	3.1 7.6
28	5.5 8.8	4.7 8.4	4 7.7	3.5 6.3
29	5.7 7.9	5 7.4	4.3 6.5	3.9 5.4
30	6 6.8	5.3 6.2	4.8 5.5	4.6 4.5
31	6.5 5.8	5.9 5.3	5.5 4.5	5.5 3.6
32	7.3 5.2	6.8 4.4	6.5 3.7	6.4 3
33	8.2 4.5	7.8 3.8	7.6 3.2	7.6 2.5
34	9.4 4.2	9 3.5	9 2.9	9 2.3
35	10.6 4.1	10.4 3.5	10.4 2.9	10.5 2.3
36	12 4.1	12 3.5	12 3	12.1 2.5
37	13.5 4.3	13.6 3.7	13.6 3.2	13.7 2.6
38	14.8 4.7	14.9 4	15 3.4	15 2.8
39	16 5	16.2 4.3	16.2 3.6	16.3 3
	1	2	3	4

Tableau 6A. - Coordonnées des centres des éléments dans leur état déformé suivant $\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$

	1	2	3	4
1	1.2 0.7	1.25 0.7	1.3 0.6	1.2 0.6
2	1.3 0.7	1.3 0.6	1.3 0.5	1.3 0.6
3	1.4 0.7	1.5 0.55	1.4 0.5	1.4 0.55
4	1.6 0.7	1.7 0.55	1.7 0.5	1.6 0.6
5	1.4 0.7	1.5 0.6	1.5 0.5	1.5 0.6
6	1.3 0.8	1.3 0.7	1.4 0.5	1.5 0.6
7	1.1 0.8	1.2 0.7	1.3 0.7	1.3 0.6
8	1.1 0.8	1.2 0.75	1.3 0.7	1.2 0.7
9	1.1 0.9	1.1 0.8	1.2 0.8	1.1 0.7
10	1 0.9	1.2 0.8	1.2 0.8	1.2 0.8
11	1.1 0.8	1.1 0.85	1.1 0.9	1.1 0.8
12	0.9 0.9	1 0.9	1.1 0.9	1 0.9
13	1 0.9	1 0.9	1.1 1	1.2 0.8
14	0.9 0.8	1 0.8	1.1 1.1	1.1 0.9
15	1.1 0.8	1.1 0.8	1 1.1	1 0.9
16	1.2 0.7	1 0.8	1 1.1	0.8 1.1
17	1.2 0.7	1.1 0.8	0.8 1	0.7 1.3
18	1.4 0.7	0.9 0.75	0.8 1	0.7 1.2
19	1.4 0.7	1.2 0.8	1 1	0.7 1.2
20	1.45 0.7	1.2 0.7	1 1	0.8 1.2
21	1.4 0.7	1.2 0.8	1 1	0.7 1.2
22	1.4 0.7	0.9 0.75	0.8 1	0.7 1.2
23	1.2 0.7	1.1 0.8	0.8 1	0.7 1.3
24	1.2 0.7	1 0.8	1 1.1	0.8 1.1
25	1.1 0.8	1.1 0.8	1 1.1	1 0.9
26	0.9 0.8	1 0.8	1.1 1.1	1.1 0.9
27	1 0.9	1 0.9	1.1 1	1.2 0.8
28	0.9 0.9	1 0.9	1.1 0.9	1 0.9
29	1.1 0.8	1 0.85	1.1 0.9	1.1 0.8
30	1 0.9	1.2 0.8	1.2 0.8	1.2 0.8
31	1.1 0.9	1.1 0.8	1.2 0.8	1.1 0.7
32	1.1 0.8	1.2 0.75	1.3 0.7	1.2 0.7
33	1.1 0.8	1.2 0.7	1.3 0.7	1.3 0.6
34	1.3 0.8	1.3 0.7	1.4 0.5	1.5 0.6
35	1.4 0.7	1.5 0.6	1.5 0.5	1.5 0.6
36	1.6 0.7	1.7 0.55	1.7 0.5	1.6 0.6
37	1.4 0.7	1.5 0.55	1.4 0.5	1.4 0.55
38	1.3 0.7	1.3 0.6	1.3 0.5	1.3 0.6
39	1.2 0.7	1.25 0.7	1.3 0.6	1.22 0.6
	1	2	3	4

Tableau 6B. - Longueur des côtés des éléments suivant (Z_1, Z_2)

	1	2	3	4
1	-10	- 5	0	0
2	-10	- 5	0	0
3	- 5	- 5	0	0
4	0	0	0	0
5	-10	0	0	0
6	-10	0	0	0
7	-10	0	5	10
8	0	10	5	15
9	0	10	15	20
10	0	10	25	15
11	8	10	30	20
12	10	15	35	30
13	10	15	35	40
14	10	12	30	40
15	0	10	20	40
16	0	0	15	30
17	-10	0	0	20
18	-10	0	0	15
19	0	0	0	0
20	0	0	0	0
21	0	0	0	0
22	10	0	0	-15
23	10	0	0	-20
24	0	0	-15	-30
25	0	-10	-20	-40
26	-10	-12	-30	-40
27	-10	-15	-35	-40
28	-10	-15	-35	-30
29	- 8	-10	-30	-20
30	0	-10	-25	-15
31	0	-10	-15	-20
32	0	-10	- 5	-15
33	10	0	- 5	-10
34	10	0	0	0
35	10	0	0	0
36	0	0	0	0
37	5	5	0	0
38	10	5	0	0
39	10	5	0	0
	1	2	3	4

Tableau 6C. - Ce tableau définit la forme des éléments : carré ou parallélogramme. L'angle représente le cisaillement suivant Z_1 dans le plan Z_1 Z_2 de l'élément dans son état déformé.

	1	2	3	4
1	-15	-13	-10	- 8
2	-15	-13	-10	- 8
3	-10	-10	- 8	- 8
4	0	- 5	- 5	- 5
5	0	0	0	0
6	5	8	10	5
7	15	21	20	15
8	35	34	30	25
9	55	50	50	35
10	65	65	60	50
11	78	70	70	60
12	80	80	80	65
13	82	85	80	75
14	80	85	80	75
15	74	70	70	75
16	54	54	55	65
17	40	38	40	40
18	30	25	25	27
19	12	12	12	12
20	0	0	0	0
21	-12	-12	-12	-12
22	-30	-25	-25	-27
23	-40	-38	-40	-40
24	-54	-54	-55	-65
25	-74	-70	-70	-75
26	-80	-85	-80	-75
27	-82	-85	-75	-75
28	-80	-80	-75	-65
29	-78	-70	-70	-60
30	-65	-65	-60	-50
31	-55	-50	-45	-35
32	-35	-34	-30	-25
33	-15	-21	-20	-15
34	- 5	- 8	-10	- 5
35	0	0	0	0
36	0	5	5	5
37	10	10	8	8
38	15	13	10	8
39	15	13	10	8
	1	2	3	4

Tableau 6D. - Orientation des éléments dans le repère (Z_1, Z_2). Angle mesuré sens antihoraire.

	1	2	3	4
1	1.31 0.76	1.33 0.75	1.39 0.72	1.39 0.72
2	1.42 0.7	1.47 0.68	1.45 0.69	1.5 0.67
3	1.5 0.67	1.65 0.61	1.53 0.65	1.62 0.62
4	1.59 0.68	1.76 0.57	1.59 0.63	1.72 0.58
5	1.46 0.68	1.5 0.67	1.51 0.66	1.67 0.6
6	1.45 0.69	1.45 0.69	1.48 0.68	1.57 0.64
7	1.25 0.8	1.3 0.77	1.42 0.7	1.47 0.68
8	1.11 0.9	1.34 0.75	1.43 0.7	1.52 0.66
9	1.07 0.93	1.32 0.76	1.42 0.7	1.5 0.67
10	1.07 0.93	1.32 0.76	1.48 0.68	1.52 0.66
11	1.07 0.93	1.29 0.78	1.54 0.65	1.64 0.61
12	1.06 0.94	1.24 0.81	1.54 0.65	1.7 0.59
13	1.05 0.95	1.27 0.79	1.55 0.65	1.76 0.57
14	1.05 0.95	1.16 0.86	1.52 0.66	1.85 0.54
15	1.15 0.87	1.09 0.92	1.33 0.75	1.71 0.18
16	1.25 0.8	1.08 0.93	1.24 0.81	1.63 0.61
17	1.36 0.74	1.13 0.88	1.17 0.85	1.49 0.67
18	1.39 0.72	1.16 0.86	1.1 0.9	1.43 0.7
19	1.43 0.7	1.23 0.81	1.02 0.98	1.32 0.76
20	1.44 0.69	1.22 0.82	1.05 0.95	1.31 0.76
21	1.43 0.7	1.23 0.81	1.02 0.98	1.32 0.76
22	1.39 0.72	1.16 0.86	1.1 0.91	1.43 0.7
23	1.36 0.74	1.13 0.88	1.17 0.85	1.49 0.67
24	1.25 0.8	1.08 0.93	1.24 0.81	1.63 0.61
25	1.15 0.87	1.09 0.92	1.33 0.75	1.71 0.58
26	1.05 0.95	1.16 0.86	1.52 0.66	1.85 0.54
27	1.05 0.95	1.27 0.79	1.55 0.65	1.76 0.57
28	1.06 0.94	1.24 0.81	1.54 0.65	1.7 0.59
29	1.07 0.93	1.29 0.78	1.54 0.65	1.64 0.61
30	1.07 0.93	1.32 0.76	1.48 0.68	1.52 0.66
31	1.07 0.93	1.32 0.76	1.42 0.7	1.5 0.67
32	1.11 0.9	1.34 0.75	1.43 0.7	1.52 0.66
33	1.25 0.8	1.3 0.77	1.42 0.7	1.47 0.68
34	1.45 0.69	1.45 0.69	1.48 0.68	1.57 0.64
35	1.46 0.68	1.5 0.67	1.51 0.66	1.67 0.6
36	1.59 0.68	1.76 0.57	1.59 0.63	1.72 0.58
37	1.5 0.67	1.65 0.61	1.53 0.65	1.62 0.62
38	1.42 0.7	1.47 0.68	1.45 0.69	1.5 0.67
39	1.31 0.76	1.33 0.75	1.39 0.72	1.39 0.72
	1	2	3	4

Tableau 6E. - Valeurs des axes principaux de l'ellipse de déformation $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$.

	1	2	3	4
1	- 16	- 13	- 11	- 8
2	- 19	- 14	- 11	- 8
3	- 14	- 10	- 8	- 7
4	- 7	- 6	- 7	- 5
5	- 7	- 5	- 1	0
6	0	2	7	8
7	-171	-160	-156	-157
8	-153	-138	-139	-144
9	-134	-114	-116	-127
10	-110	- 98	-101	-111
11	- 95	- 75	- 89	- 96
12	- 69	- 73	- 79	- 88
13	- 71	- 70	- 76	- 81
14	- 96	- 68	- 72	- 79
15	+ 61	- 83	- 71	- 79
16	46	55	- 73	- 77
17	34	33	- 75	- 80
18	21	20	- 79	- 82
19	13	12	- 89	- 86
20	2	2	83	90
21	- 13	- 11.6	89	86
22	- 21	- 20	79	82
23	- 34	- 33	75	80
24	- 46	- 55	73	77
25	- 61	83	71	79
26	96	68	72	79
27	71	70	76	81
28	69	73	79	88
29	95	75	89	96
30	110	98	101	111
31	134	114	116	127
32	153	138	139	144
33	171	160	156	157
34	0.3	- 2	- 7	- 8
35	7	5	1	0
36	7	6	7	5
37	14	10	8	7
38	19	14	11	8
39	16	13	11	8
	1	2	3	4

Tableau 6F. - Orientation du grand axe de l'ellipse. Angle mesuré sens antihoraire.

3.5 CONCLUSIONS

Le découpage du domaine étudié se fait en essayant de considérer le plus grand nombre possible d'éléments, mais ce maillage est directement conditionné par le nombre de sites de mesure de l'ellipsoïde de déformation.

Il est avantageux de choisir des éléments de formes simples et de dimensions petites pour augmenter la convergence et aussi la rapidité d'exécution du programme. Le quadrillage doit être constitué d'éléments jointifs et couvrir la totalité du domaine.

Les problèmes d'effet de bordure perturbent les éléments frontières du réseau. Le modèle non déformé est donc d'autant plus exact vers le coeur du domaine d'où l'intérêt réitéré ici d'essayer d'obtenir le plus grand nombre d'éléments finis possible.

Les erreurs relatives autres que celles dues aux incertitudes sur les mesures de déformation (dues à l'application de la méthode : découpage, calculs) peuvent être intégrées dans leur ensemble par la méthode des éléments finis.

La rotation rigide absolue, entre l'état final déformé et l'état initial non déformé au cours de la déformation reste inconnue. Seules des évidences géologiques pourront permettre d'orienter le modèle obtenu après déformation inverse (paléomagnétisme).

Les résultats de ces exemples tests se sont avérés positifs. La technique de déformation inverse a donc été appliquée à un domaine géologique régional : la Bretagne centrale.

Deuxième Partie

APPLICATION DE LA METHODE DE DEFORMATION INVERSE AUX STRUCTURES HERCYNIENNES DE BRETAGNE CENTRALE

INTRODUCTION 51

1. CONTEXTE GEOLOGIQUE 55

1.1 GEOMETRIE DES STRUCTURES ET PROBLEME DU REGIME DE DEFORMATION 55

1.2 ANALYSE DE LA DEFORMATION FINIE 57

METHODE D'ANALYSE

RESULTATS ET DISCUSSION

2. APPORT DE LA DEFORMATION INVERSE 65

2.1 APPROCHE BIDIMENSIONNELLE 65

INTERPOLATION

TECHNIQUE UTILISEE

CHOIX DE L'ORIENTATION D'UNE GRILLE CARTESIENNE

RESULTATS ET DISCUSSION

CONCLUSIONS

2.2 GENERALISATION A UNE ANALYSE EN TROIS DIMENSIONS 71

DIFFERENTES ETAPES DE LA METHODE

PROCEDURE ANALYTIQUE

INTERPRETATION DU MODELE OBTENU

3. CONCLUSIONS 84

INTRODUCTION

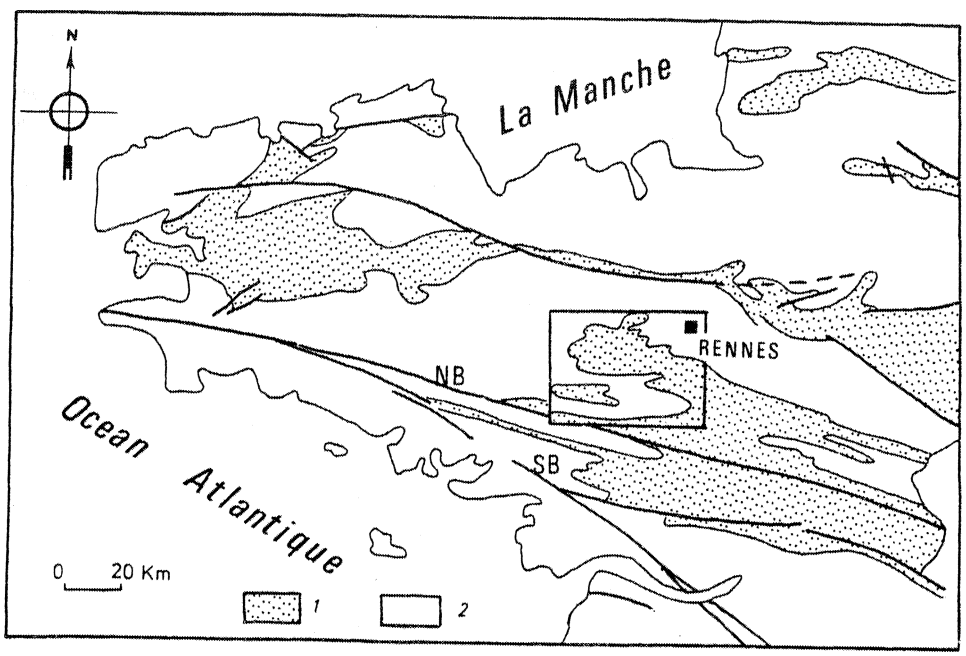


Fig. 1 - Carte géologique simplifiée du massif armoricain (FRANCE). La région étudiée est limitée par un rectangle. Les branches nord (NB) et sud (SB) du cisaillement sud-armoricain correspondent aux failles transcurrentes majeures.
1 : sédiments paléozoïques
2 : autres terrains indifférenciés.

Dans cette deuxième partie, la méthode de la déformation inverse est appliquée à un objet géologique réel : la Bretagne Centrale (Fig. 1).

Le domaine étudié s'étend sur 2000km^2 et correspond aux terminaisons occidentales des synclinaux du sud de Rennes. Il est limité au sud par une zone de cisaillement majeure : la branche nord du cisaillement sud-armoricain (Fig. 2).

Le choix de cette région a été motivé :

-- *par un intérêt d'ordre géologique,*

Les données structurales n'apportent pas d'arguments pour conclure en faveur d'un cisaillement transcurrent de l'ensemble du domaine. Par l'application de la technique de la déformation inverse, on se propose de tester cette hypothèse et de déterminer le mode de déformation globale responsable de l'état actuel de la région.

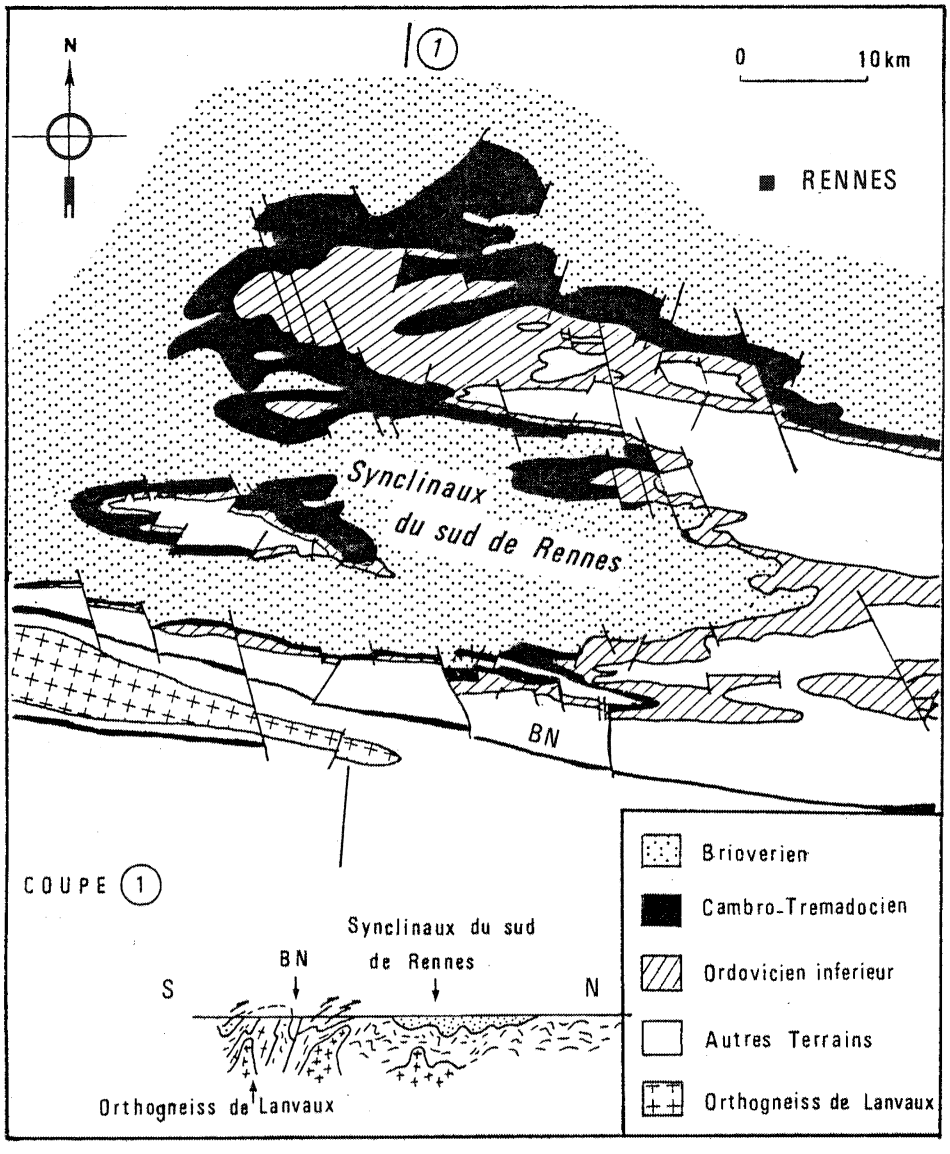


Fig. 2 - Carte géologique de la région étudiée et coupe synthétique NS (BN - branche nord du cisaillement sud-armoricain). D'après C. Le Corre, 1978.

-- par un intérêt méthodologique,

Les nombreuses études de terrain ont permis d'obtenir des données lithologiques, structurales grâce aux travaux notamment de C. Le Corre (1970, 1978) et B. Le Théoff (1977). L'histoire structurale se résume à une seule phase majeure de déformation ductile :

. celle-ci a été quantifiée de diverses façons à partir de galets déformés (B. Le Théoff, 1977), de tâches de réduction (S. Crambert, 1981), de fossiles déformés (M. Lopez-Muñoz, 1980).

Les galets ont été utilisés pour notre application car ils sont largement répartis sur tout le domaine (dans les niveaux conglomératiques de base du Paléozoïque).

. l'étude détaillée de la schistosité (C. Le Corre, 1978) permet d'obtenir l'orientation du plan principal de déformation X_1 X_2 (Fig. 3).

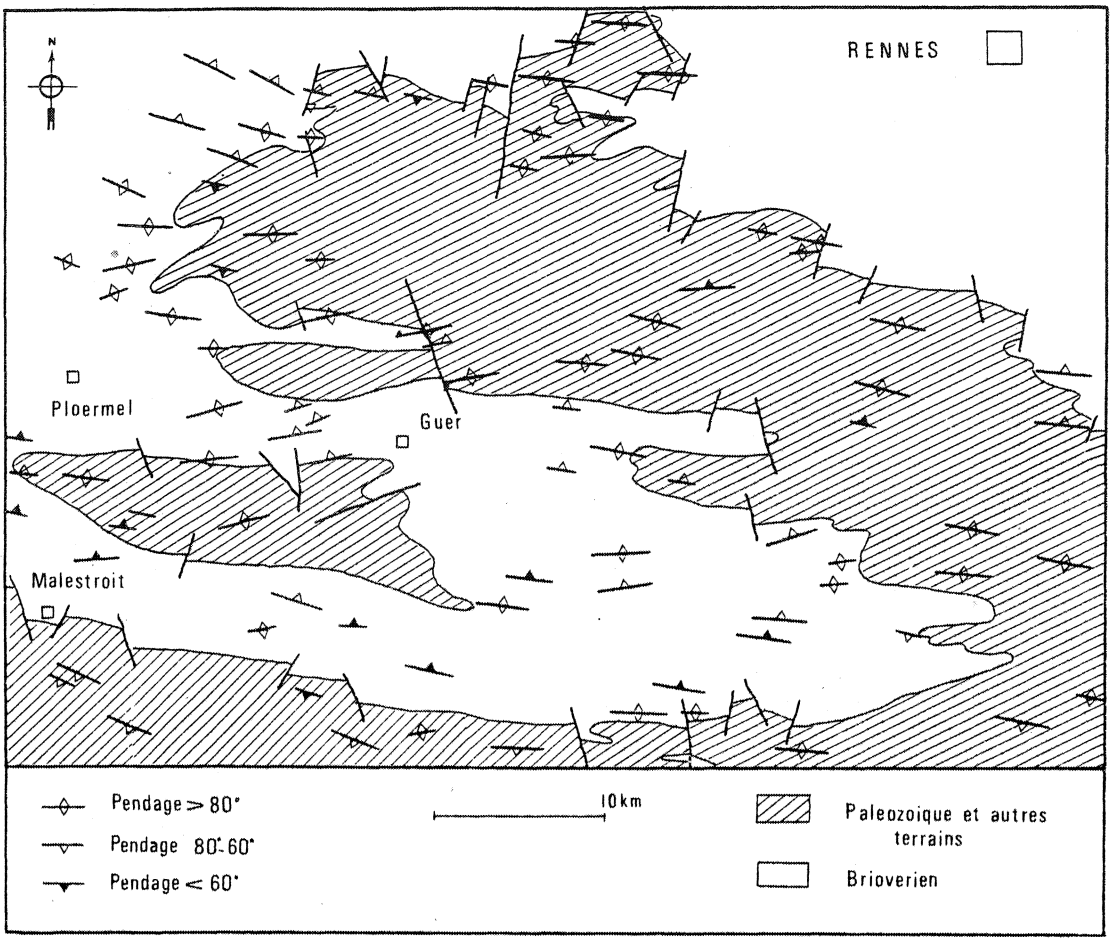


Fig. 3 - Traces de schistosité dans le Briovérien et le Paléozoïque de Bretagne centrale (C. Le Corre, 1978).

Après avoir exposé brièvement le contexte géologique régional, je développerai l'application de la méthode de la déformation inverse sur cette région. Elle sera suivie par une discussion des résultats.

1

CONTEXTE GEOLOGIQUE

1.1 GEOMETRIE DES STRUCTURES ET PROBLEME DE REGIME DE DEFORMATION

-- *Les séries sédimentaires de Bretagne Centrale* sont affectées par une déformation hercynienne caractérisée par des plis à grand rayon de courbure, d'axes N90 - N110 subhorizontaux, à tendance coffrés dans le nord de la partie méridionale (Fig. 4).

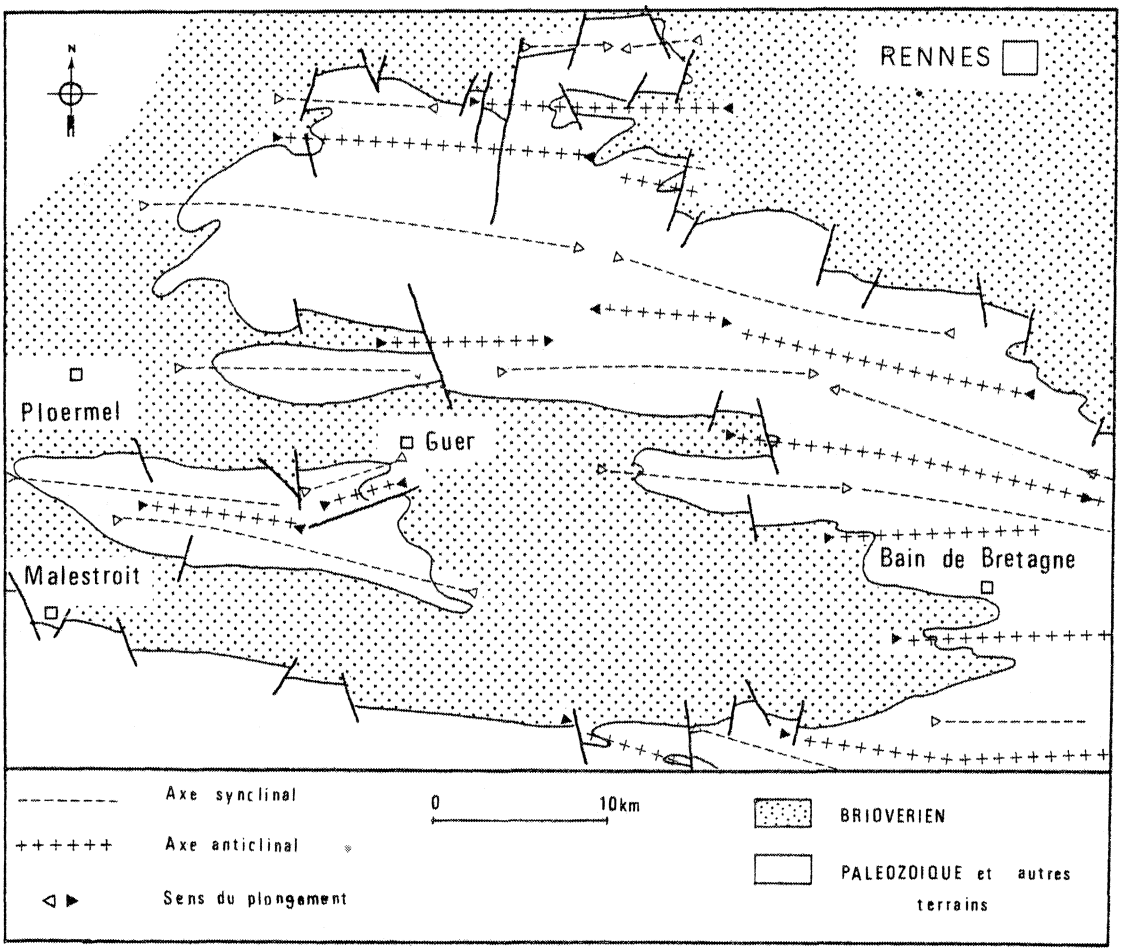


Fig. 4 - Carte des axes de plis (C. Le Corre, 1978).

Au cours de la déformation hercynienne, le Briovérien s'est comporté de la même façon que le Paléozoïque. Il n'a, à aucun moment, joué le rôle d'un socle vis à vis de celui-ci, n'ayant été déformé que par des plis superficiels, sans schistosité associée, visibles uniquement dans le nord de la région (C. Le Corre, 1977). Ceci permet de traiter les deux unités globalement comme un ensemble unique.

Sur la plupart des sites, on met en évidence une linéation d'allongement parallèle aux axes de plis et matérialisée au niveau des conglomérats par l'étirement des galets (C. Le Corre, 1970, 1978) ; (B. Le Théoff, 1977). Dans les formations argilo-silteuses, ces plis sont associés à une schistosité généralement subverticale, variant du N vers le S d'une schistosité de fracture jusqu'à une schistosité de flux (C. Le Corre, 1978), (Fig. 5).

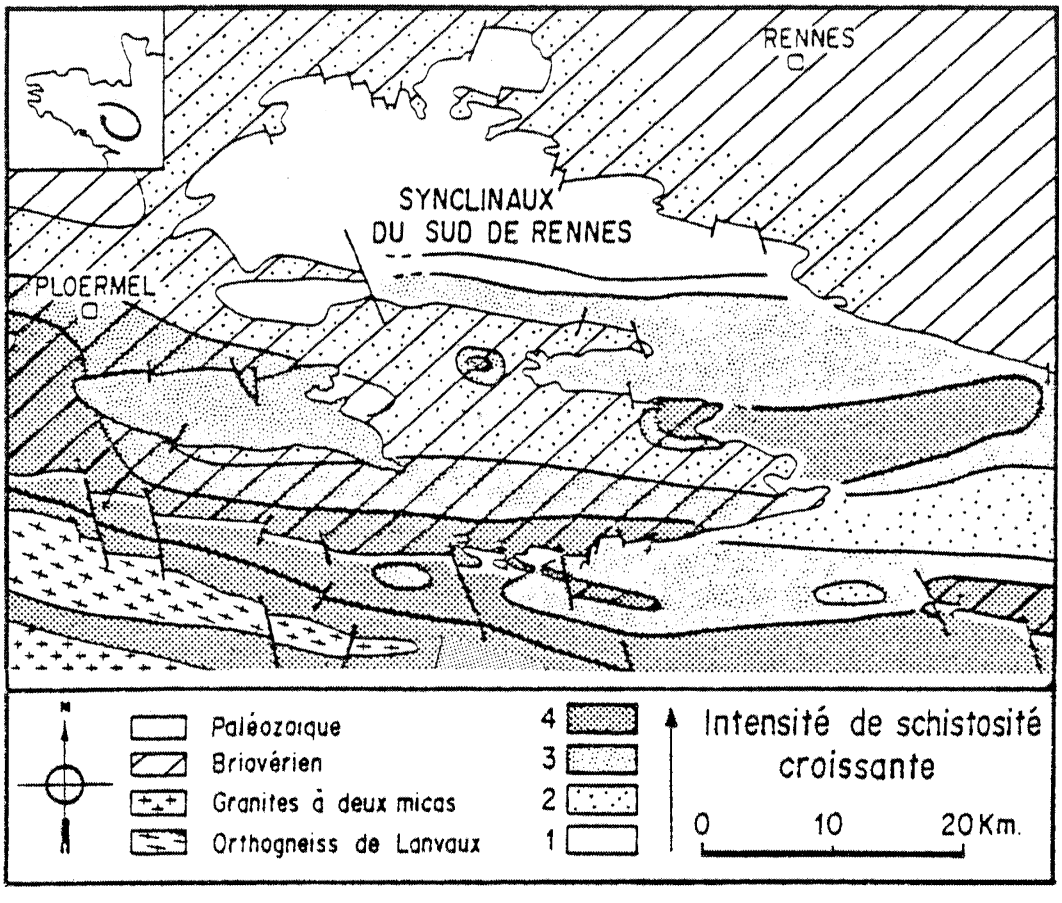


Fig. 5 - Carte des variations de typologie de la schistosité dans la région étudiée. D'après C. Le Corre (1978).

1 : Schistosité de fracture.
2 : Schistosité avec début de recristallisation.
3 : Schistosité de flux avec microlithons résiduels.
4 : Schistosité de flux pénétrative.

Ces données sont relatives aux formations schisteuses sous et sus-jacentes au grès armoricain.

L'existence d'un métamorphisme croissant du nord vers le sud est en accord avec le contexte géologique régional. De plus, l'analyse de tendance de la déformation finie, effectuée par

B. Le Théoff (1977), révèle l'existence d'un gradient du NW vers le SE, oblique aux structures. Ceci est également mis en évidence par la carte de typologie de la schistosité (C. Le Corre, 1978 ; S. Hanmer, C. Le Corre et D. Berthé, 1980), par l'étude de la déformation des grès armoricains (D. Gapais, 1979) et par l'analyse des tâches de réduction (S. Crambert, 1981).

-- *de nombreux travaux se sont attachés au problème du rôle d'une composante de cisaillement au cours de la tectogénèse hercynienne de ce segment de chaîne* (Ph. Matte et A. Ribeiro, 1975 ; J.L. Bouchez et J. Blaise, 1976 ; B. Pivette, 1978 ; M. Lopez-Muñoz 1981). A la limite sud du domaine étudié, l'existence d'une zone cisaillée a été mise en évidence par J. Cogné (1977), D. Berthé (1979), P. Jégouzo (1979).

Dans les synclinaux du sud de Rennes, la déformation est beaucoup moins intense. Peu de critères structuraux ont été observés à l'échelle de l'affleurement ou de l'échantillon qui témoignent d'une telle composante de cisaillement (B. Le Théoff, 1977 ; C. Le Corre, 1978).

Toutefois, l'analyse de fabrique de quartz liée à la déformation hercynienne (D. Gapais et C. Le Corre, 1980) ainsi que l'étude des structures cassantes appuient l'hypothèse d'une déformation cisaillante (J. Ouali et P. Choukroune, en préparation). De plus, la mise en évidence des gradients de déformation est un argument en faveur de l'existence d'une composante de rotation de la déformation (P.R. Cobbold, 1977). L'histoire structurale de la région étudiée est apparemment simple et semble se rapporter à une seule phase majeure ductile de déformation.

Le caractère cisaillant est largement discuté et maintenant localement démontré (D. Gapais et C. Le Corre, 1980). Toutefois, on n'a pas d'arguments structuraux prouvant un cisaillement dominant partout.

Je me propose d'appliquer la méthode de la déformation inverse en Bretagne Centrale afin de préciser l'importance relative du cisaillement régional et du raccourcissement crustal. Les résultats de la déformation finie obtenues par B. Le Théoff (1977) servent de base à l'application de la méthode.

1.2 ANALYSE DE LA DEFORMATION FINIE

Dans l'exposé qui suit, on considère comme connues les bases de la théorie de la déformation. Le lecteur pourra trouver les compléments dans l'ouvrage de J. Ramsay (1967). L'analyse quantitative de la déformation a pour but d'estimer numériquement les paramètres géométriques de l'ellipsoïde de déformation, caractérisés par les trois axes : l'axe λ_1 d'allongement, λ_2 intermédiaire et λ_3 de raccourcissement.

Deux hypothèses générales sont nécessaires à l'application des méthodes d'analyse de la déformation finie sur un domaine :

-- la déformation est homogène à l'échelle de l'affleurement.

-- la déformation se fait à volume constant.

METHODE D'ANALYSE
Echantillonnage

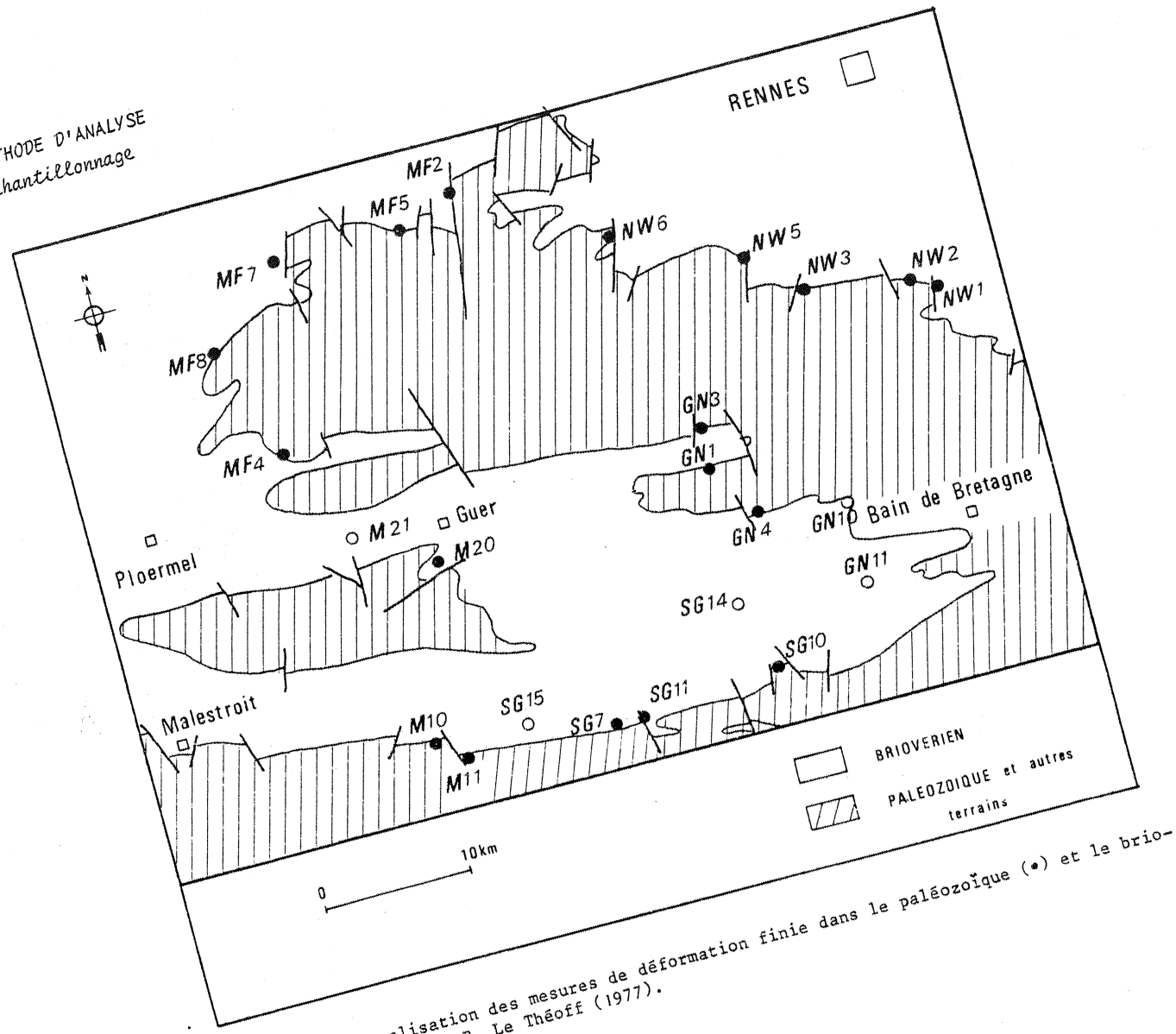


Fig. 6 - Carte de localisation des mesures de déformation finie dans le paléozoïque (•) et le briovérien (o) d'après B. Le Théoff (1977).

Les sites étudiés de conglomérats déformés sont au nombre de 24 (Fig. 6), et sont situés dans les niveaux conglomératiques de deux ensembles lithologiques :

-- une série briovérienne essentiellement grésopélitique et d'épaisseur inconnue, dans laquelle il existe localement un poudingue intraformationnel, principalement à galets de quartz (poudingue de Gourin), (Fig. 7).

-- une série paléozoïque à faciès varié dont le caractère discordant sur le Briovérien est localement bien visible et maintenant très classique dans le nord de la région (C. Le Corre, 1976). Elle débute par un conglomérat à faciès varié, soit un microconglomérat à galets silteux, soit un conglomérat à galets de grès plus ou moins abondants (poudingue de Montfort), (Fig. 7). Le dépot du conglomérat paléozoïque est classiquement rapporté au Cambro-Trémadocien.

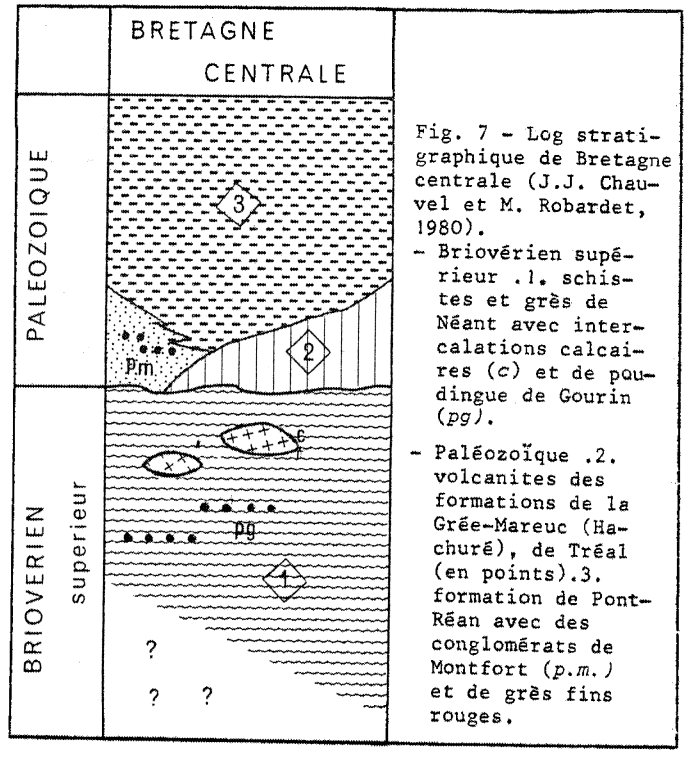


Fig. 7 - Log stratigraphique de Bretagne centrale (J.J. Chauvel et M. Robardet, 1980).
- Briovérien supérieur .1. schistes et grès de Néant avec intercalations calcaires (*c*) et de poudingue de Gourin (*pg*).
- Paléozoïque .2. volcanites des formations de la Grée-Mareuc (Hachuré), de Tréal (en points).3. formation de Pont-Réan avec des conglomérats de Montfort (*p.m.*) et de grès fins rouges.

Technique de mesure

Les rapports axiaux de l'ellipsoïde de déformation sont calculés à partir des mesures de longueur et d'orientation faites sur les galets, dans les plans principaux de déformation.

Les méthodes d'analyse sont les mêmes quelque soit le plan considéré, et font toutes appel à la même technique (D. Dunnet, 1969). On trace sur le plan de mesure une droite qui est soit la trace de la stratification ou de la schistosité, soit une droite quelconque *X X'* (Fig. 8a), (B. Le Théoff, 1977). On mesure les longueurs des axes principaux des sections elliptiques observée (*a*, *b*) et l'angle que fait le grand axe de l'ellipse avec la droite de référence (*Ø*).

On obtient ainsi pour chaque section principale plusieurs couples de valeurs (*Rf*, *Øf*) où *Rf* est le rapport des axes de l'ellipse et *Øf* l'angle défini par la figure 8a. La figure 8b présente un diagramme *Rf/Ø* obtenu à partir des abaques de D. Dunnet (1969) et se superposant le mieux à la distribution.

La combinaison des résultats dans les trois sections principales permet de déterminer les valeurs principales de l'ellipsoïde de déformation ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) pour l'affleurement considéré.

On en déduit le paramètre de forme *K* de *D*. Flinn (1962) et le paramètre d'intensité *R* de J. Watterson (1968) (Tableau 7 colonnes 1 et 2).

RESULTATS - DISCUSSION

Validité des résultats

De nombreux paramètres sont susceptibles d'influer sur les mesures de déformation des galets : nature des galets, taille, orientation et forme initiale, contraste rhéologique avec la matrice (B. Le Théoff, 1977).

Il est préférable de faire les mesures sur des galets de même nature que la matrice,

Tableau 7 - Tableau des valeurs de déformation finie en Bretagne centrale :
- paramètre de forme de D. Flinn (1962), K

$$K = \frac{\lambda_1/\lambda_2 - 1}{\lambda_2/\lambda_3 - 1}$$

- paramètre d'intensité de J. Watterson (1968), R

$$R = \lambda_1/\lambda_2 + \lambda_2/\lambda_3 - 1$$

- valeurs des axes principaux de l'ellipsoïde de déformation : λ_1, λ_2, λ_3.

Lithologie	Localité	Données de déformation finie de B. Le Theoff (1977)		Elongations principales calculées			Elongations (principales) corrigées	
		k (1)	r (2)	λ_1 (3)	λ_2 (4)	λ_3 (5)	λ_1 (6)	λ_3 (7)
Conglomérats de base Paléozoïque	NW1	4.6	4.2	2.75	0.75	0.48	2.38	0.42
	NW2	4.43	3.38	2.31	0.79	0.55	2.05	0.48
	NW3	1	2.46	1.73	1.00	0.58	1.73	0.58
	NW5	0.7	2.85	1.86	1.06	0.51	1.91	0.52
	NW6	0.48	3.7	2.15	1.15	0.41	2.30	0.44
	MF2	0.73	3.13	2.00	1.05	0.47	2.05	0.48
	MF4	3.3	1.65	1.37	0.92	0.80	1.31	0.76
	MF5	0.66	2.3	1.60	1.06	0.59	1.64	0.61
	MF7	1.53	1.96	1.51	0.96	0.69	1.48	0.68
	MF8	5	2.4	1.80	0.83	0.67	1.64	0.61
	GN1	1.35	2.6	1.83	0.96	0.57	1.79	0.55
	GN3	3.5	2.8	2.00	0.84	0.60	1.83	0.55
	GN4	0.41	2.85	1.76	1.15	0.49	1.89	0.53
	SG7	9.96	6.65	3.92	0.66	0.39	3.18	0.32
	SG10	1.46	4.5	2.84	0.92	0.38	2.72	0.36
	SG11	1	3.8	2.4	1.00	0.42	2.40	0.42
	M10	0.21	3.48	1.84	1.29	0.42	2.09	0.48
	M11	6.18	4.16	2.71	0.73	0.51	2.32	0.44
	M20	1	2.6	1.80	1.00	0.55	1.80	0.55
Conglomérats Intraformationnels Briovérien	M21	1.17	2.60	1.82	0.98	0.56	1.80	0.55
	SG14	1	2.12	1.56	1.00	0.64	1.56	0.64
	SG15	4.15	2.75	1.98	0.82	0.61	1.79	0.56
	GN10	0.29	2.50	1.57	1.17	0.54	1.70	0.59
	GN11	1.64	3.38	2.27	0.92	0.48	2.17	0.46

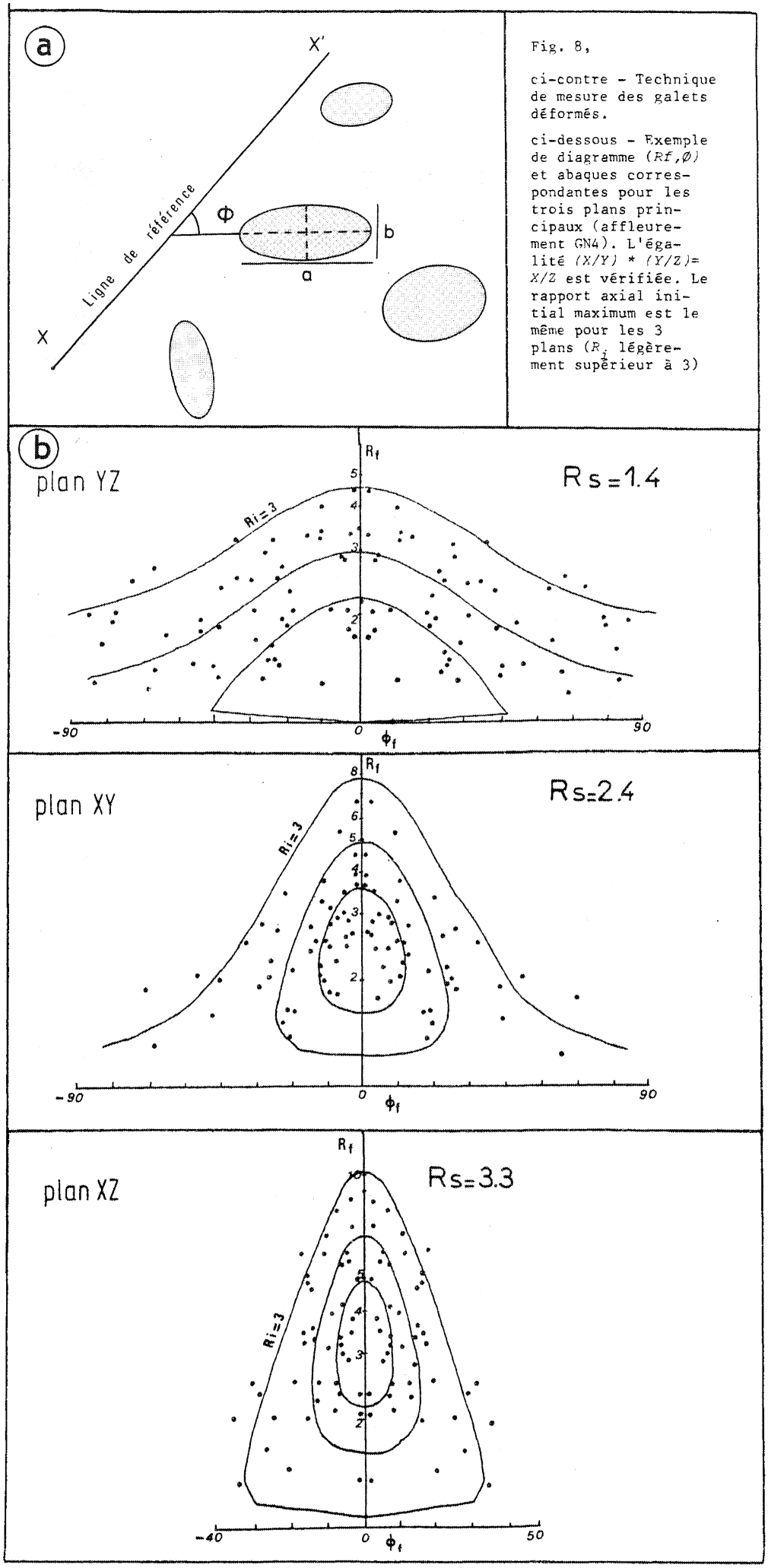


Fig. 8,

ci-contre - Technique de mesure des galets déformés.

ci-dessous - Exemple de diagramme $(Rf,\emptyset)$ et abaques correspondantes pour les trois plans principaux (affleurement GN4). L'égalité $(X/Y) * (Y/Z) = X/Z$ est vérifiée. Le rapport axial initial maximum est le même pour les 3 plans (R_i légèrement supérieur à 3)

surtout si l'intensité de la déformation est élevée. Le fait que la schistosité a souvent tendance à contourner les galets, montre qu'il existe une différence de comportement rhéologique. On recherche donc le contraste le plus faible possible.

Zonéographie de la déformation finie

A partir des données de B. Le Théoff (1977), résumées par le paramètre de forme K et d'intensité R (Tableau 7, colonnes 1 et 2), j'ai calculé les extensions principales λ_1, λ_2, λ_3 (Tableau 7, colonnes 3, 4 et 5) en supposant leur produit unitaire (c'est à dire sans changement de volume au cours de la déformation). λ_1 a une valeur maximale de 5.25 et λ_3 une valeur minimale de 0.27 alors que λ_2 varie dans une très petite marge autour de l'unité. Ceci suggère qu'à une échelle régionale, on puisse considérer en première approximation la déformation plane horizontale (pas de déformation le long de la direction verticale).

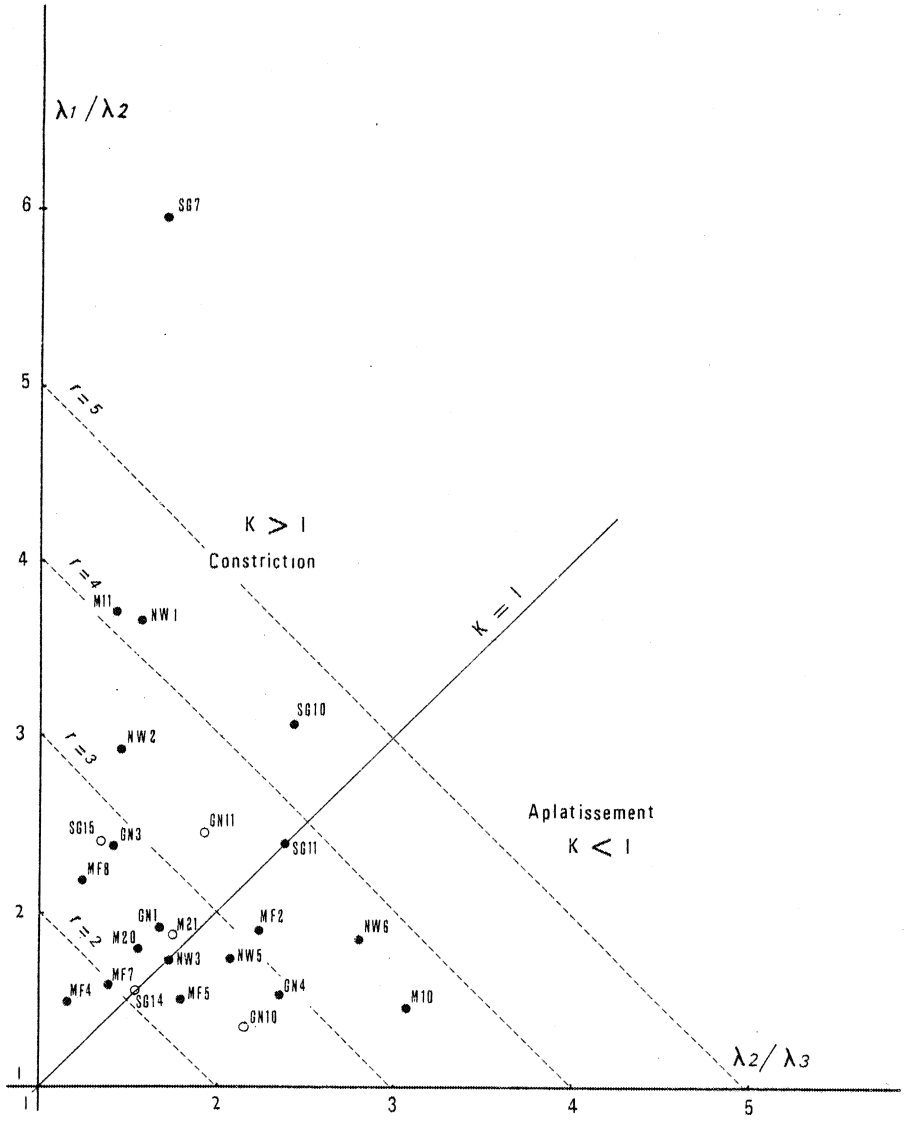


Fig. 9 - Diagramme de D. Flinn représentant les ellipsoïdes de déformation finie mesurés dans le Briovérien (o) et le Paléozoïque (•) de Bretagne Centrale.
K paramètre de D. Flinn
R paramètre d'intensité de J. Watterson.

Le rapport des mesures dans un diagramme de D. Flinn $\lambda_1/\lambda_2 = f(\lambda_2/\lambda_3)$ permet de préciser les points suivants (Fig. 9) :

-- l'indice de forme des ellipsoïdes (paramètre K) varie depuis des ellipsoïdes de type aplatissement à la constriction très prononcée. Ceci met en évidence le caractère très hétérogène de la déformation à l'échelle régionale.

-- l'intensité de la déformation finie (paramètre R est généralement assez faible, sauf dans les secteurs Sud et Est du domaine étudié.

La déformation régionale présente un caractère croissant du Nord vers le Sud. Parallèlement au gradient régional, il existe des gradients locaux dus à un effet des structures. Une déformation plus forte est enregistrée aux charnières des plis (par rapport au plan des plis), mais, le gradient NW-SE est conservé si on supprime les points de mesure dans les charnières. Dans le sud de la région, le champ de déformation est localement perturbé par la présence de granites syntectoniques. Ceci se marque par :

-- la trace des plans de schistosité,

-- l'orientation des directions de déformation finie.

Ceci nous conduit à éliminer la partie Sud du secteur pour garder un modèle simple dans l'étude qui va suivre.

2

APPORT DE LA DEFORMATION INVERSE

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'application bidimensionnelle de la méthode de la déformation inverse au domaine centre-armoricain (M.N. Percevault et P.R. Cobbold, 1980, 1982). La généralisation à trois dimensions est ensuite présentée (M.N. Percevault, 1981, 1982), puis, l'ensemble des résultats est discuté.

2.1 APPROCHE BIDIMENSIONNELLE

Les valeurs de déformation, en intensité (Tableau 7 , colonnes 3,4 et 5) et en orientation (Fig. 3), en Bretagne Centrale montrent que la déformation régionale est plane, horizontale avec des perturbations locales tridimensionnelles. On ôte l'effet des perturbations de façon à rendre le problème plan. Ensuite, le domaine est divisé en un réseau d'éléments finis parallèles aux trajectoires de déformation.

Les valeurs de déformation sont affectées au centre des éléments. Ces derniers sont ensuite dédéformés indépendamment de leurs voisins. Les vides et les recouvrements résultants sont minimisés en utilisant la méthode des moindres carrés qui permet aux éléments d'être translatés et tournés de façon rigide. On obtient ainsi la configuration du domaine dans l'état non déformé.

INTERPOLATION

Avant d'appliquer la méthode de déformation inverse bidimensionnelle, j'ai effectué une correction approximative des données de déformation finie. Par référence au tableau 7 (colonne 4), on observe que le climat général de la déformation est proche de la déformation plane avec l'hypothèse d'une variation de volume nulle. Aussi, je suppose λ_2 unitaire. Pour conserver le volume, les valeurs de λ_1 et λ_3 doivent augmenter et diminuer réciproquement. J'ai multiplié chaque λ_1 et λ_3 par le même facteur $\sqrt{\lambda_2}$. Ceci pour ne pas modifier le rapport λ_1/λ_3, (tableau 7, colonnes 6 et 7). Toutes les directions principales sont supposées être horizontales ou verticales. Le pendage de λ_1 est supposé identique à celui des traces de schistosité.

Les données de déformation sont éparses (Fig. 10), on a besoin donc de les interpoler avant d'appliquer la technique de la déformation inverse. En ignorant les problèmes possibles de compatibilité (P.R. Cobbold, 1980), j'ai simplement effectué une interpolation cartographique des valeurs de λ_1 (Fig. 11). La figure montre une bande de faible déformation s'étendant NW-SE de Paimpont à Pipriac et passant par Guer (La zone de Guer). Cette bande est bordée par deux couloirs vers le Nord-Est, la déformation augmente progressivement vers Rennes ; au Sud-Ouest, la déformation augmente beaucoup plus rapidement vers le Sud.

Un modèle similaire fut obtenu par B. Le Théoff (1977), lorsqu'il construisit une surface de tendance de deuxième ordre avec les valeurs du paramètre d'intensité R.

En dessinant les isoclines de pendage de schistosité, on définit aussi une région s'étendant du NW au SE vers Guer. Celle-ci doit être comparée avec la bande de Guer définie à partir des valeurs de déformation, (Fig. 11).

TECHNIQUE UTILISEE

J'utilise dans cette application en deux dimensions, la technique de P.R. Cobbold (1979), qui est basée sur celle de W.F. Schwerdtner (1977). Elle diffère de la méthode précédemment décrite en première partie, dans la mesure où le découpage en éléments se fait le long des trajectoires de déformation. C'est la seule méthode de résolution numérique de la déformation inverse connue en deux dimensions. Elle repose toutefois sur deux hypothèses très restrictives d'une déformation plane et isochorique.

Les étapes sont les suivantes :

-- Construction de trajectoires de déformation parallèles aux traces de schistosité.

-- Sélection de domaines approximativement équivalents limités par les trajectoires dans lesquelles les valeurs de déformation sont raisonnablement bien connues.

-- Division d'un domaine en éléments curvilignes parallèles aux trajectoires de déformation.

-- Remplacement des éléments curvilignes en rectangles équivalents.

-- Affectation des valeurs de λ_1 et λ_3 au centre de chaque élément.

-- Dédéformation de chaque élément indépendamment des autres. Les éléments restent rectangulaires mais la forme change. En général, des vides et des recouvrements apparaissent entre eux.

-- Translation et rotation d'éléments de telle sorte que les vides et les recouvrements soient minimisés. La sous-région acquiert une nouvelle forme générale, celle de l'état non déformé.

-- Pour aider à visualiser le déformation, on dessine une grille cartésienne sur l'état non déformé et son équivalent dans l'état déformé en utilisant les grilles curvilignes.

REMARQUES

Le nombre de vides et recouvrements restant après minimisation est lié à deux facteurs :

-- le taux de vides et recouvrements créés artificiellement quand les éléments curvilignes sont remplacés par des rectangles .

-- L'incompatibilité des données de déformation due aux erreurs de mesures, à l'inversion des perturbations tridimensionnelles ou à l'interpolation.

Le test d'arrêt permettant de juger du bon ajustement des éléments se base sur la minimisation des distances entre les noeuds des éléments.

CHOIX DE L'ORIENTATION D'UNE GRILLE CARTESIENNE

La technique de la déformation inverse ne produit pas une orientation unique de la région dans l'état non déformé. Aussi, la vraie rotation rigide à chaque point, relative à une trame géographique n'est pas connue. Il existe donc un nombre infini de façon d'orienter la grille cartésienne dont la fonction est d'aider à visualiser la déformation (Fig. 12a).

Après avoir procédé par tâtonnements, on a choisi une orientation telle que les lignes X_1 déformées soient approximativement parallèles à une faille majeure transcurrente : la branche Sud du cisaillement sud-armoricain N125. De cette façon, on veut tester l'hypothèse du cisaillement transcurrent sur l'ensemble de la région.

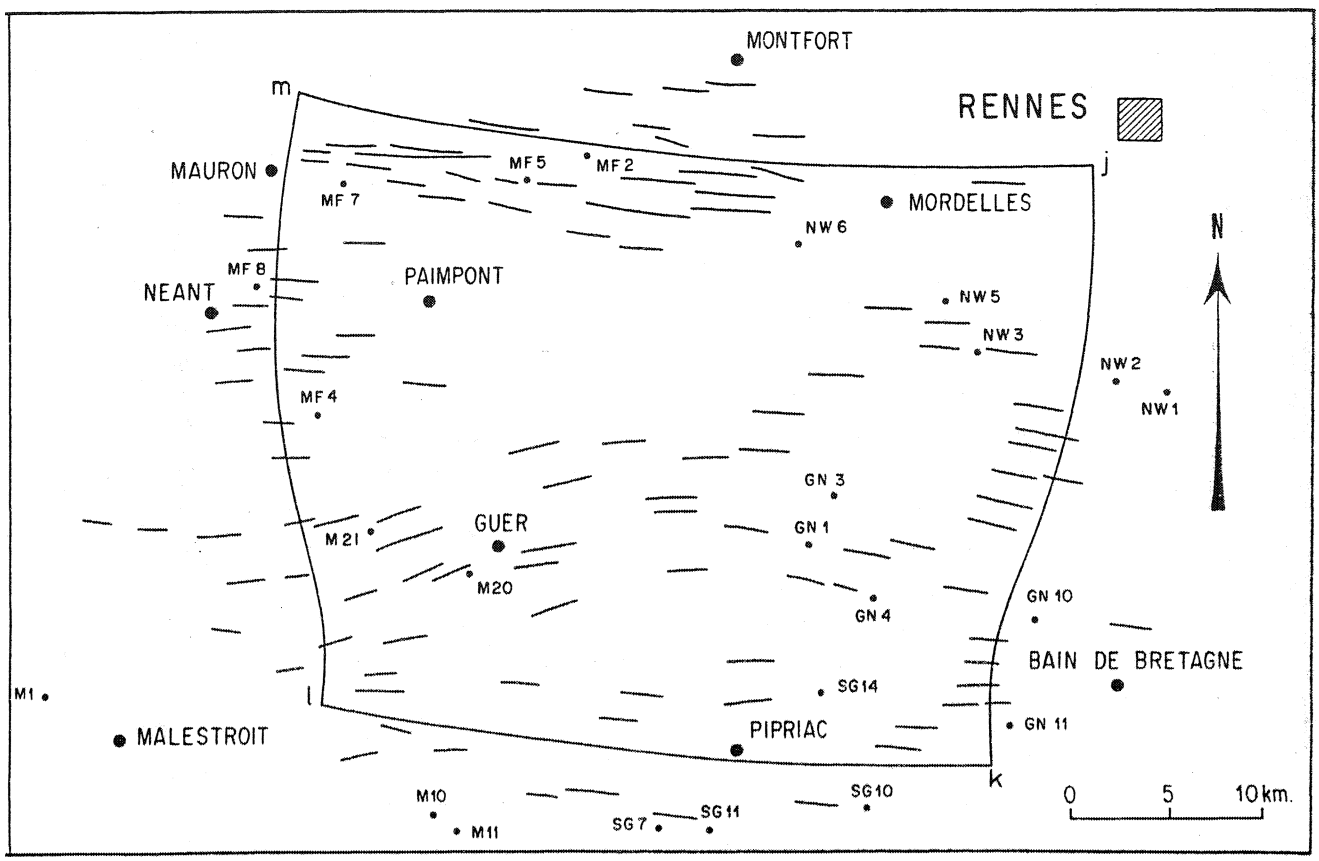


Fig. 10 - Données de mesures de déformation sur la région.
Lignes fines - traces de schistosité
NW2, NW3 - localisation des mesures
jklm - domaine considéré pour la déformation inverse

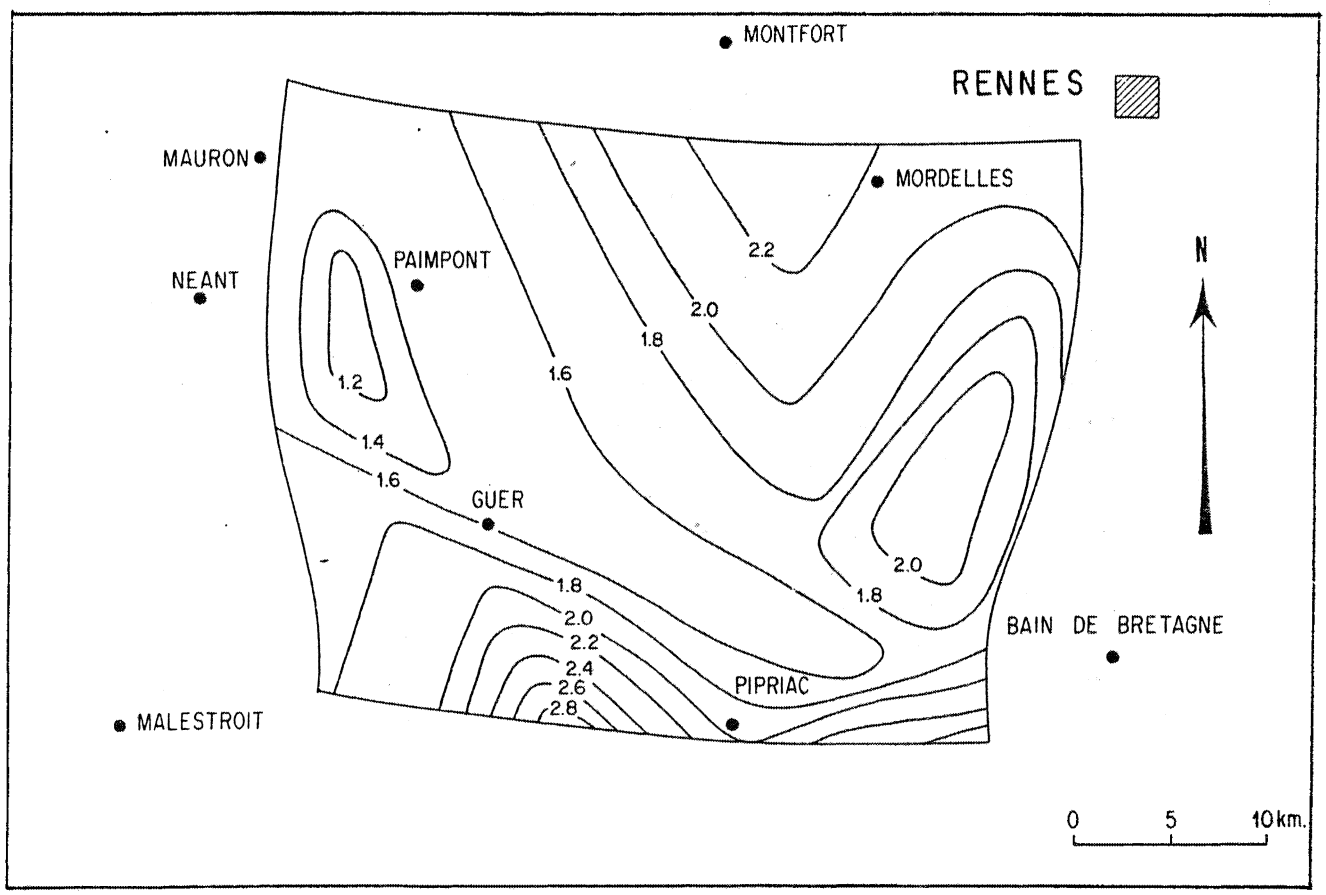


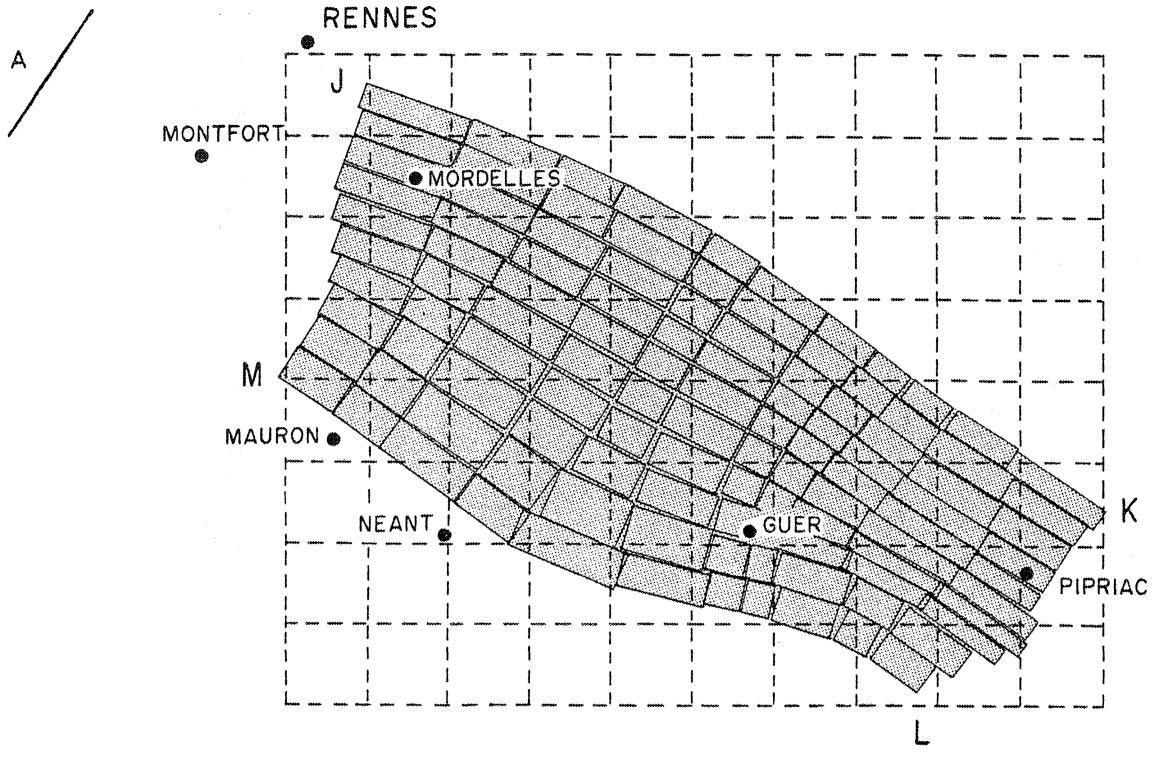
Fig. 11 - Carte des contours d'isointensité de l'étirement principal λ_1 obtenus par interpolation graphique des données du tableau 7 (colonne 6).

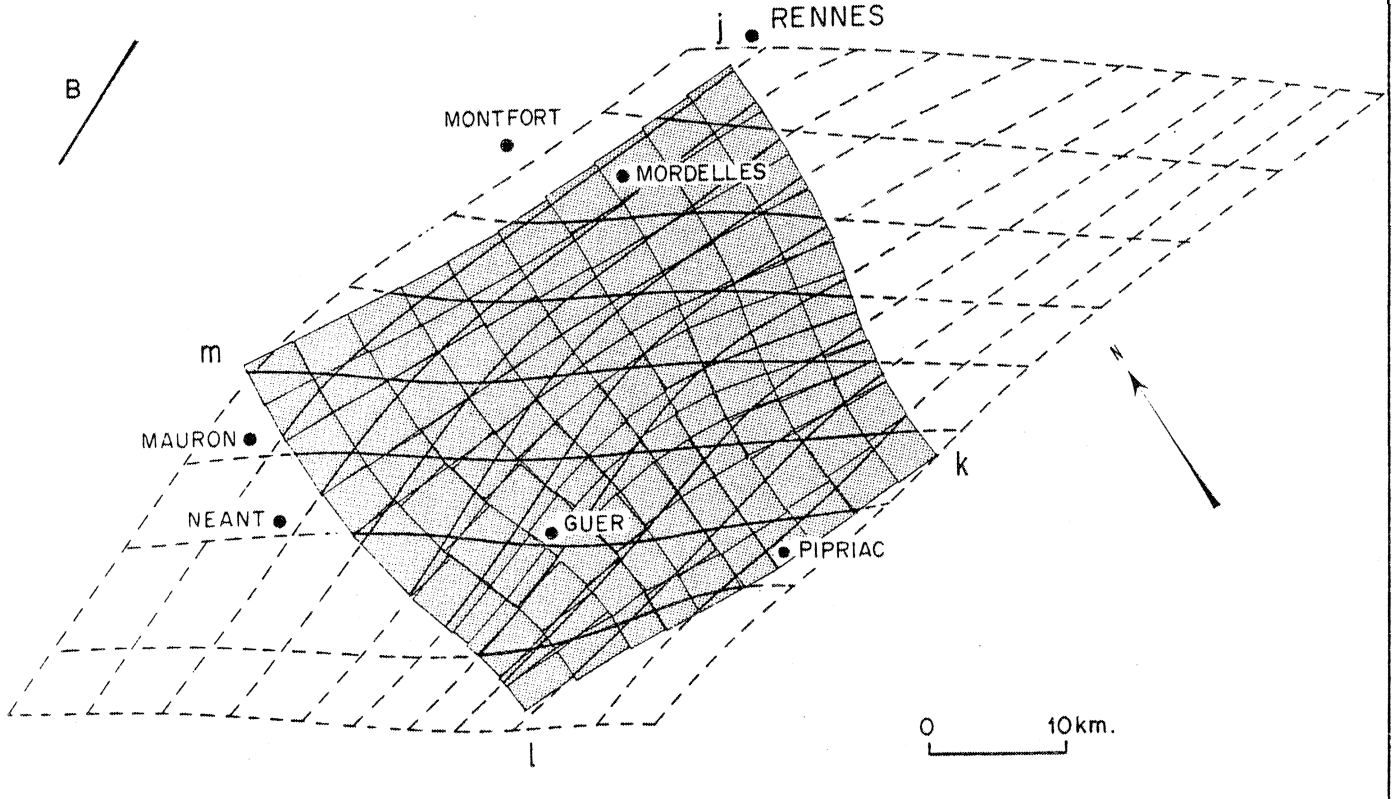
Fig. 12 - Résultats de la déformation inverse

Carte A : configuration du domaine dans l'état non déformé (en hachuré, *J,K,L,M,)*, obtenu par la déformation inverse.

Carte B : région dans son état actuel (après déformation). Le domaine choisi pour la déformation inverse (en hachuré *j,k,l,m)* est divisé en 110 éléments rectangulaires, tangents aux trajectoires de déformation.

La grille cartésienne (A) et son équivalent déformé (B) aide à la description de la déformation. L'extrapolation en dehors du domaine n'est qu'une interprétation.


A
RENNES
J
MONTFORT
MORDELLES
M
MAURON
NEANT
GUER
K
PIPRIAC
L


B
j
RENNES
MONTFORT
MORDELLES
m
MAURON
NEANT
GUER
PIPRIAC
k
l
N
0
10km.

RESULTATS - DISCUSSION

Considérons les résultats de la déformation inverse à deux niveaux (Fig. 12a et b).

Tout d'abord on remarque que les frontières extérieures du domaine s'assimilent à un parallélogramme avant et après déformation. Ainsi, la déformation régionale est globalement homogène. Cette information est de peu d'importance car la rotation rigide est inconnue.

La déformation apparaît comme un cisaillement simple hétérogène (avec une rotation rigide inconnue mais constante). Pour voir ceci, on peut comparer la grille cartésienne avec son équivalent déformé. La famille des X_1 est à peu près préservée.

En d'autres termes, les lignes tendent à rester droites et également espacées. Elles ont subi peu de changement de longueur. Mais, ceci ne signifie pas que la déformation soit homogène. Si on regarde la famille des X_2, on voit qu'elles tendent à être parallèles mais courbes. Le modèle général est une déformation en bande S sans extension le long de celles-ci.

Dans une telle structure, la déformation est un cisaillement simple hétérogène dont la direction est parallèle aux bandes et le sens est dextre. A partir de l'orientation des lignes X_2, on peut identifier une bande de faible déformation cisaillante à travers Guer déjà détectée par les figures 10 et 11. Le choix dans l'orientation de la région déformée se traduit par des bandes approximativement parallèles à une faille majeure transcurrente (la branche Sud du cisaillement sud-armoricain). Les zones au Nord-Est et au Sud-Ouest ont subi d'importants taux de cisaillement.

Pris avec le reste des évidences géologiques, ces observations suggèrent que la plupart de la déformation hercynienne en Bretagne centrale est en fait contrôlée par des mouvements transcurrents sur des failles crustales, comme dans les exemples décrits par R. Wilcox (1973). Il est donc possible d'assimiler le domaine centre-armoricain à une zone de cisaillement à l'échelle régionale (M.N. Percevault et P.R. Cobbold, 1982).

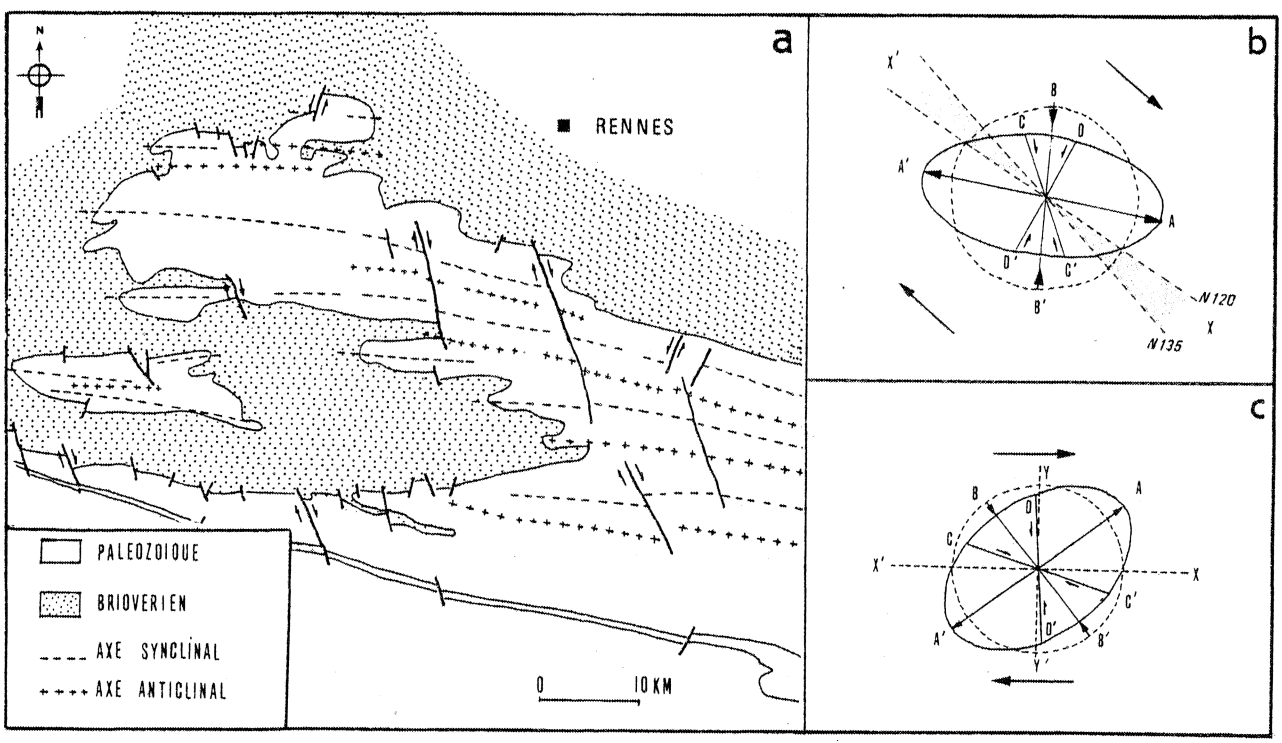


Fig. 13 - Zones de failles majeures transcurrentes associées à un cisaillement dextre :
a - Carte de la région étudiée avec les principaux éléments structuraux : système de failles conjuguées et axes de plis.
b - comparaison du shéma structural centre-armoricain avec le modèle de l'éllipse de déformation de R. Wilcox sur les zones de failles majeures transcurrentes associées à un cisaillement dextre. *XX'* plan cisaillant N120-N135 ; *CC', DD'* jeu de failles conjugées, *CC'* failles synthétiques dextres, *DD'* failles antithétiques senestres ; *AA'* axes de plis en échelon ; *BB'* direction principale de raccourcissement.
c - principaux éléments structuraux des zones de fractures majeures transcurrentes (R. Wilcox, 1973), lors d'un cisaillement dextre. *XX'* zone de fracture majeure ; *AA'* axes de plis en échelon ; *BB'* axe de compression maximum ; *CC', DD'* jeu de failles conjuguées.

Les structures de base du modèle défini par R. Wilcox (1973) sont comparables à celles du domaine centre-armoricain (Fig. 13) :

-- plis en échelon orientés de 20 à 35° (sens antihoraire) par rapport à la zone de décrochement majeur N120 à N135,

-- un jeu de failles conjuguées en échelon ; failles senestres orientées de 30 à 40° (sens horaire), failles dextres orientées de 70 à 80° (sens horaire), par rapport à la zone de fracture N120 à N135. L'angle entre ces failles est de 60°.

La déformation pénétrative (plissement) et non pénétrative (failles) sont ainsi interprétables en terme de déplacements.

CONCLUSION

L'étude bidimensionnelle permet de conclure en faveur d'un cisaillement dextre hétérogène du domaine avec un taux $\gamma = 0.7$ (en admettant la rotation rigide inconnue mais constante). Celui-ci s'allie avec les précédents taux de cisaillement déterminés par J.L. Vigneresse (1978), S. Crambert (1981). Le plan cisaillant N125 est vertical et la direction de cisaillement est horizontale. Une bande de faible déformation aux environs de Guer est entourée par deux zones de plus intense déformation. La bande est approximativement parallèle à une faille majeure transcurrente dans la région : la zone de cisaillement sud-armoricaine.

2.2 GENERALISATION A UNE ANALYSE EN TROIS DIMENSIONS

Le champ des applications bidimensionnelles est limité du fait des hypothèses de départ très restrictives.

-- nécessité d'avoir une déformation plane sans variation de volume du domaine considéré.

-- éléments limités par les trajectoires de déformation.

L'application de la méthode tridimensionnelle généralise l'étude en deux dimensions, et aboutit à un modèle plus proche de l'état de la région dans son état non déformé.

DIFFERENTES ETAPES DE LA METHODE

Le déroulement de la méthode peut se schématiser par trois étapes principales :

La première étape nécessite de découper le domaine en éléments finis. On affecte ensuite à chacun des paramètres caractéristiques (forme et position de l'élément, données de déformation).

La deuxième étape consiste à supprimer les effets de la déformation de chaque élément. Celle-ci étant supposée homogène, on obtient alors de nouveaux parallélogrammes de différentes formes et orientations. Cette étape induit la formation de vides et de recouvrements entre les éléments du fait des incompatibilités de déformation aux frontières de ceux-ci.

La troisième étape assemble les éléments par translations et rotations afin d'obtenir à nouveau une continuité de la structure.

A ce stade, l'orientation des éléments dans le plan vertical reste mal déterminée. Cette indication peut être fournie par l'orientation des plans de stratification si on les suppose horizontaux et non plissés dans l'état initial non déformé.

La dernière étape consiste ensuite à faire subir à l'élément une rotation rigide par rapport à un axe horizontal de façon à rendre le plan de stratification horizontal. L'ajustement des éléments entre eux se fait ensuite par rotations autour d'un axe vertical et par translations; on aboutit ainsi à une structure continue, modèle de la région dans son état initial non déformé.

PROCEDURE ANALYTIQUE

La région déformée est divisée en *n* éléments jointifs. Chacun d'entre eux est identifié par des paramètres quantitatifs : longueur et orientation des axes principaux de déformation, orientation des plans de stratification. Ces données sont connues au centre de chaque élément.

Découpage géométrique en éléments finis

La région centre-armoricaine est divisée dans le plan horizontal en 90 parallélépipèdes rectangles (de 20km^2) tous de même dimension et orientation. On considère une seule couche d'éléments dans le plan vertical, (Fig. 14).

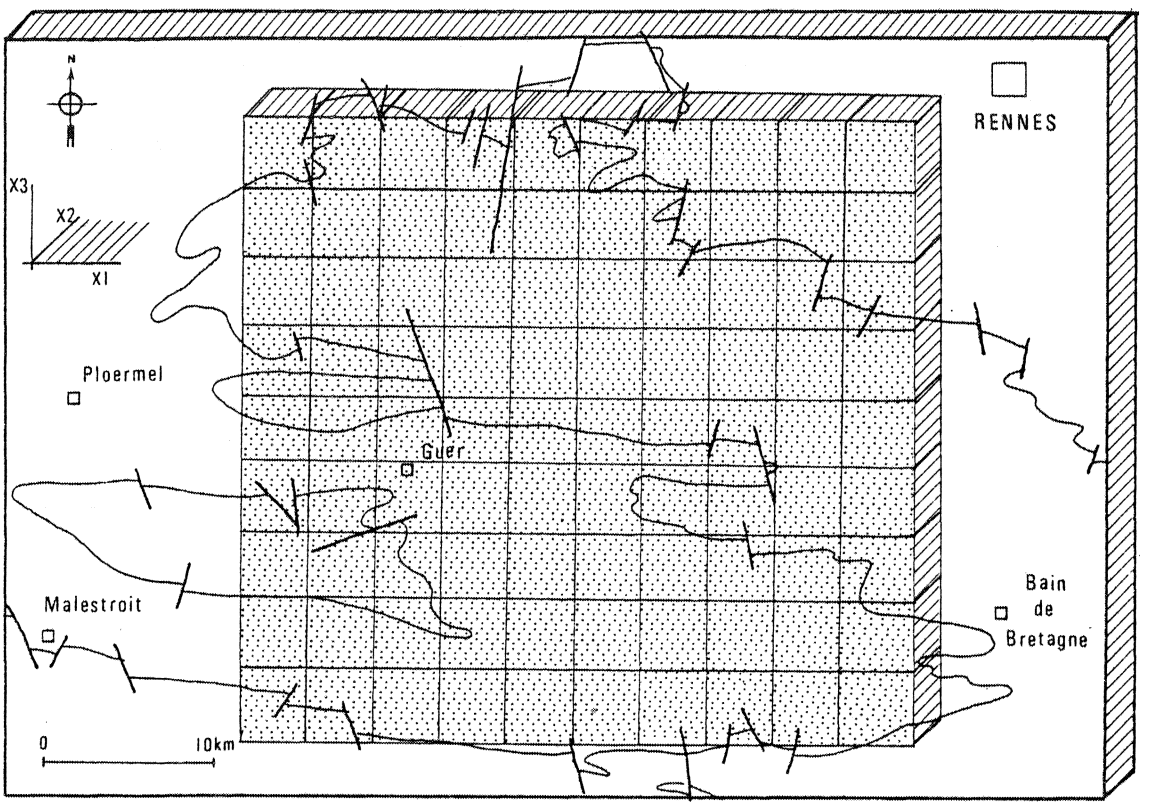


Fig. 14 - Découpage de la région en éléments finis. Le plan horizontal est assimilé au plan principal X_1 X_3. La direction de référence X_1 est horizontale.

Affectation de valeurs aux éléments

Les paramètres de position, de forme et d'orientation sont directement déduits du découpage précédent de la région. Il reste à distribuer pour chaque élément, les données d'intensité de la déformation, l'orientation des directions principales et des plans de stratification.

-- Données de déformation finie

Les sites de mesures de déformation finie sont répartis ponctuellement sur le domaine (Fig. 6). A partir de ceux-ci et en retenant l'hypothèse d'une variation à volume constant, j'ai construit des courbes d'isointensité de déformation pour λ_1, λ_2, λ_3 par interpolation cartographique (Fig. 15a, b et c). Je peux ensuite affecter des valeurs d'intensité de déformation au centre de chaque élément.

Les cartes ainsi obtenues (Fig. 15a, b et c) permettent de préciser les points suivants :

. les courbes d'isointensité se resserent du Nord vers le Sud, témoignant d'un

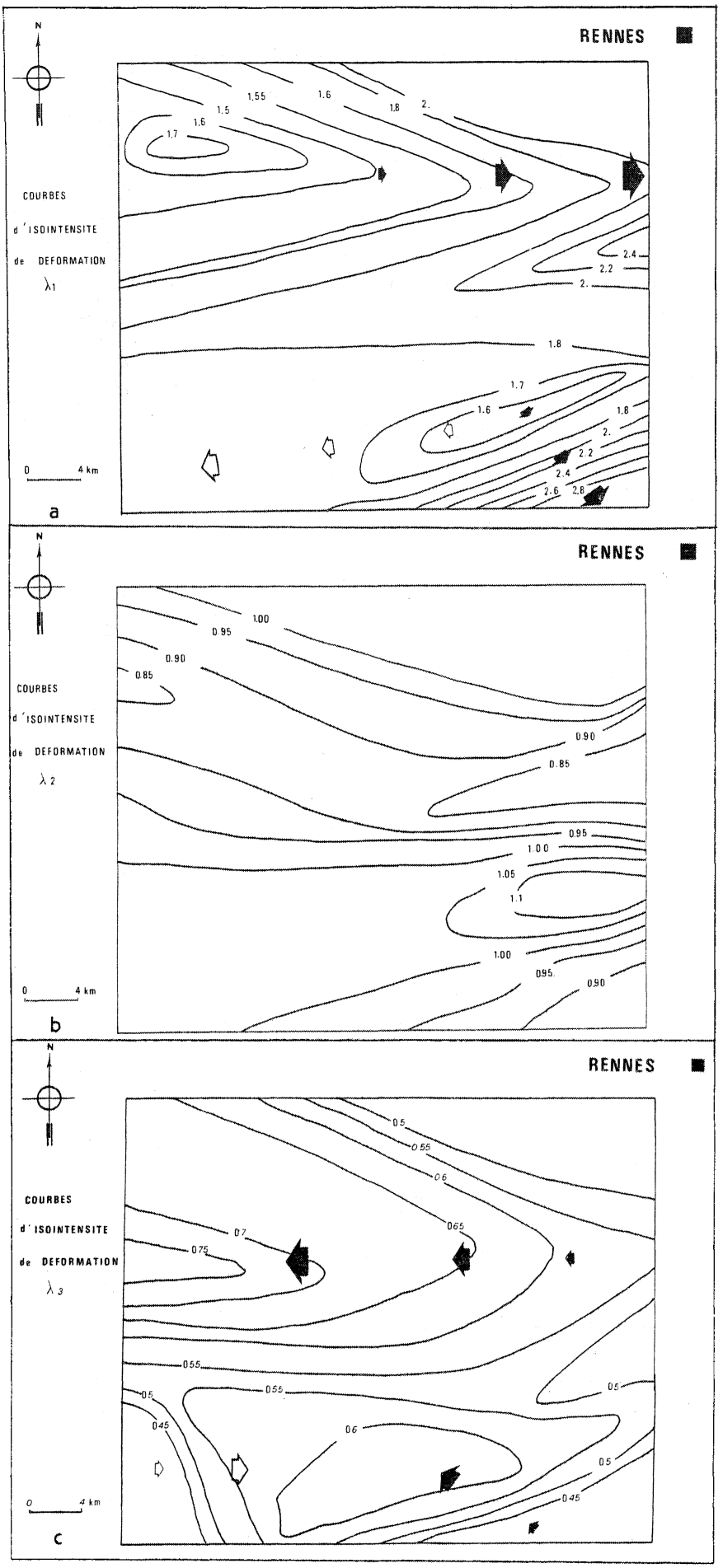


Fig. 15 - Courbes d'intensité de déformation obtenues par interpolation linéaire entre les points.

a - grand axe λ_1

b - axe intermédiaire λ_2

c - petit axe λ_3

Les flèches indiquent le sens et l'orientation moyenne des gradients d'intensité de déformation. Dans la figure B, les valeurs restent toujours très voisines de 1, la déformation est proche de la déformation plane.

gradient positif et croissant dans cette direction.

. le gradient de déformation est croissant de l'Ouest vers l'Est pour λ_1 (Fig. 15a), et décroissant dans cette même direction pour λ_3 (Fig. 15c). On est proche d'une déformation plane ($0.85 < \lambda_2 < 1.15$), (Fig. 15b).

Toutefois, un effet inverse dans la partie Sud-Ouest du domaine est observé. Ceci peut correspondre à une perturbation du champ de déformation régionale due à une intéraction entre la mise en place de plutons et la déformation régionale (C. Le Corre, 1978). Ces observations sont en accord avec l'analyse de tendance effectuée par B. Le Théoff (1977).

Le plan principal de déformation X_1 X_2 est assimilé en première approximation au plan de schistosité subvertical, de direction moyenne (Fig. 5 et 16). Dans chaque élément, l'orientation du plan principal de déformation est repérée par deux angles : l'azimut θ et le pendage ψ.

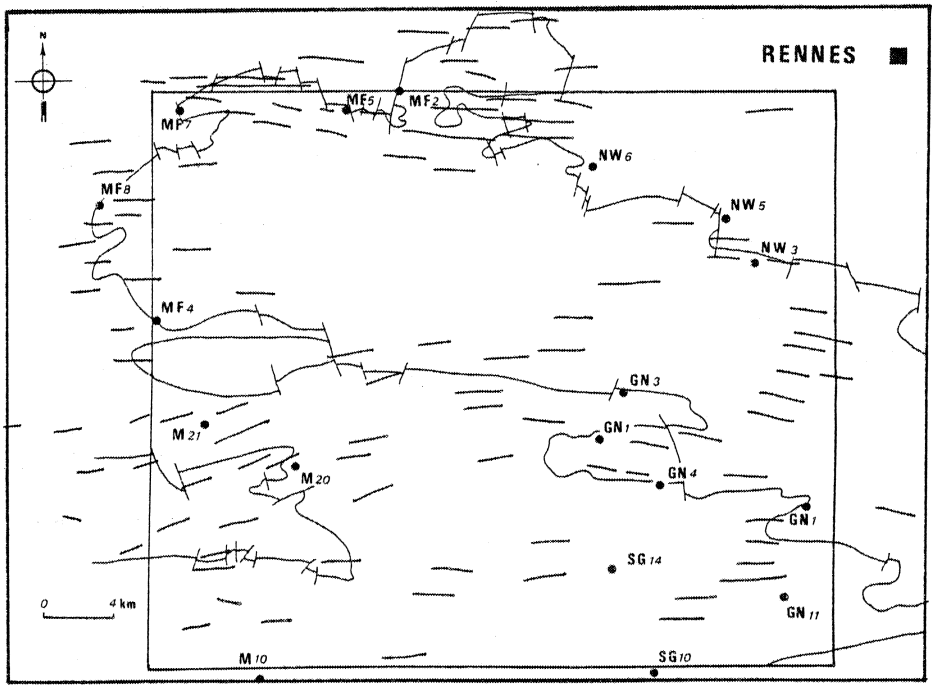


Fig. 16 - Carte des traces du plan principal de schistosité X_1 X_2 (C. Le Corre, 1978) et des sites de mesures de déformation finie (cf. Fig. 6). Le domaine d'étude est limité par le rectangle intérieur. Les traces de schistosité indiquent la projection de l'axe principal de déformation λ_1 dans le plan horizontal.

-- Données des plans de stratification

J'utilise les cartes détaillées d'orientation des plans de stratification (C. Le Corre, 1978, Fig. 48). En cas d'absence locale de mesures de terrain, je fais une estimation basée sur les coupes effectuées dans la région par C. Le Corre (1978) ainsi que sur la carte structurale (Fig. 17, Fig.4).

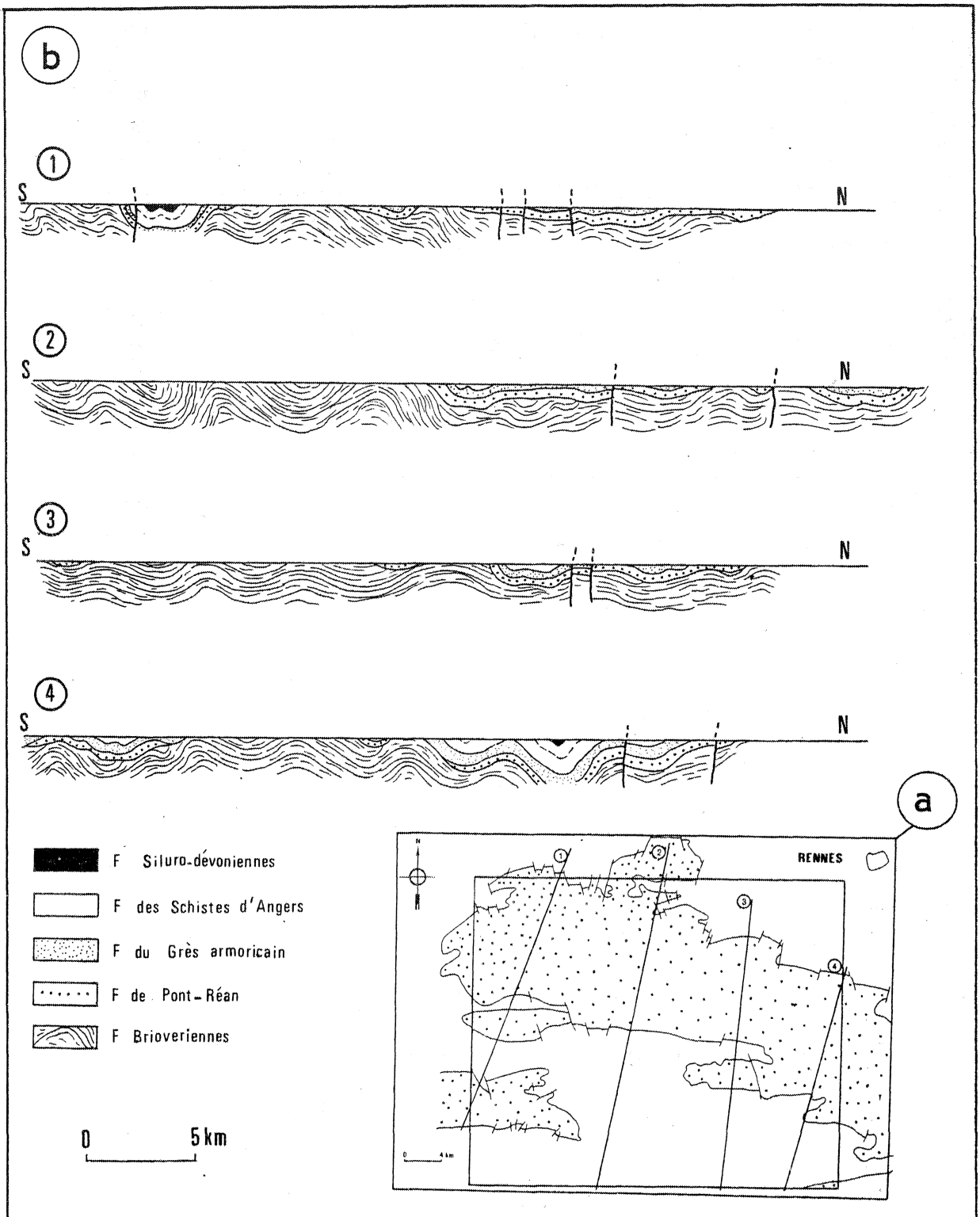


Fig. 17 - a - carte de localisation des coupes (1) (2) (3) (4) dans le domaine étudié.
b - coupes (1) (2) (3) (4)

A partir des deux cartes et des coupes, on reconstitue la géométrie d'une couche. L'azimut θ (Fig. 4) et le pendage ψ (Fig. 17) des plans de stratification sont ainsi déterminés.

Résultats

Les tableaux de données déterminés (Tableau 8) sont compilés dans des fichiers comportant les coordonnées du centre des éléments *"POSC"*, l'intensité de la déformation λ_1, λ_2, λ_3 sur *"APA"*, l'orientation des plans principaux de déformation *"STRDIP"*, la dimension des éléments dans l'état déformé *"LGC"*, l'orientation des éléments dans l'état déformé *"RRA"*, l'orientation des plans de stratification *"SØA"*.

INTERPRETATION DU MODELE OBTENU

Apport de la prise en compte de l'orientation des plans de stratification

Le passage de l'état actuel déformé (Fig. 18, schéma 3) à l'état initial non déformé, (Fig. 18, schéma 1) se marque principalement par un étirement subméridien de la région ainsi que par un léger amincissement de la couche d'éléments dans le plan vertical. Les schémas 2 et 3 de la figure 18 diffèrent peu, si ce n'est dans la partie Sud du domaine.

Afin de mieux visualiser les effets de la rotation rigide des éléments dans le plan vertical (passage du schéma 2 au schéma 3, figure 18), j'ai effectué quatre coupes Nord-Sud dans le plan vertical (Fig. 18, coupes A, B, C et D) aux trois étapes décrites. La position des centres des éléments est prise comme repère pour la construction des coupes, (Fig. 19).

Si les éléments ne sont pas orientés dans le plan vertical, le profil obtenu (Fig. 19, coupe 2) et le profil structural actuel (Fig. 19, courbe 1) sont antisymétriques par rapport au plan horizontal. Après orientation des éléments dans le plan vertical, on observe un lissage de ces profils (Fig. 19, courbe 3).

Test régional sur l'hypothèse d'un cisaillement

De la même façon que pour l'étude bidimensionnelle, je veux tester l'hypothèse d'un cisaillement dextre compatible avec un plan cisaillant N125 et donc avec les données géologiques. L'étude de l'étirement principal λ_1 en fonction de l'orientation principale θ pour 24 localités dans le domaine montre une dispersion des mesures de terrain entre deux courbes théoriques, correspondant respectivement, à un cisaillement simple N120 à N135 (Fig. 20). Cette répartition est principalement due aux déviations des valeurs θ. Je relève arbitrairement une direction de cisaillement en déplaçant la courbe théorique de gauche à droite. La direction N125 semble être un bon choix pour une direction de cisaillement moyenne.

La dispersion peut être due aux erreurs et à l'interpolation des mesures de déformation, mais au moins une partie semble être réelle. Il est difficile de prédire un modèle régional à partir seulement de quelques valeurs de déformation locale. Ceci illustre les avantages d'une technique de déformation inverse régionale.

Pour apprécier l'évolution de la déformation d'ensemble du domaine, je place sur la région initiale non déformée obtenue une grille cartésienne (Fig. 18, schéma 3) afin de la comparer avec son équivalent déformé (Fig. 21). L'évolution de la grille cartésienne (Fig. 21) conduit à un modèle proche d'une déformation globale homogène, en faisant abstraction des légères hétérogénéités. On peut interpréter cette évolution en terme de cisaillement simple combiné à un raccourcissement crustal Nord-Sud dans le plan horizontal. Ceci est compatible avec le modèle précédemment proposé par D. Gapais et C. Le Corre (1980). La déformation étant supposée homogène, j'ai cherché à la quantifier en utilisant les réseaux de la figure 22 (a et b). J'estime ainsi la part prise par le cisaillement et le raccourcissement (les réseaux utilisés correspondent aux 9 éléments centraux des réseaux cartésiens de la figure 21).

X1 X2 X3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0 17 0	2 17 0	4 17 0	6 17 0	8 17 0	10 17 0	12 17 0	14 17 0	16 17 0	18 17 0
2	0 15.3 0	2 15.3 0	4 15.3 0	6 15.3 0	8 15.3 0	10 15.3 0	12 15.3 0	14 15.3 0	16 15.3 0	18 15.3 0
3	0 13.6 0	2 13.6 0	4 13.6 0	6 13.6 0	8 13.6 0	10 13.6 0	12 13.6 0	14 13.6 0	16 13.6 0	18 13.6 0
4	0 11.9 0	2 11.9 0	4 11.9 0	6 11.9 0	8 11.9 0	10 11.9 0	12 11.9 0	14 11.9 0	16 11.9 0	18 11.9 0
5	0 10.2 0	2 10.2 0	4 10.2 0	6 10.2 0	8 10.2 0	10 10.2 0	12 10.2 0	14 10.2 0	16 10.2 0	18 10.2 0
6	0 8.5 0	2 8.5 0	4 8.5 0	6 8.5 0	8 8.5 0	10 8.5 0	12 8.5 0	14 8.5 0	16 8.5 0	18 8.5 0
7	0 6.8 0	2 6.8 0	4 6.8 0	6 6.8 0	8 6.8 0	10 6.8 0	12 6.8 0	14 6.8 0	16 6.8 0	18 6.8 0
8	0 5.1 0	2 5.1 0	4 5.1 0	6 5.1 0	8 5.1 0	10 5.1 0	12 5.1 0	14 5.1 0	16 5.1 0	18 5.1 0
9	0 3.4 0	2 3.4 0	4 3.4 0	6 3.4 0	8 3.4 0	10 3.4 0	12 3.4 0	14 3.4 0	16 3.4 0	18 3.4 0

Tableau 8A - Coordonnées du centre de chaque élément suivant X_1, X_2, X_3.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1.5	1.54	1.57	1.6	1.84	2.08	2.18	2.15	2	2
1	0.69	0.66	0.63	0.58	0.52	0.45	0.4	0.4	0.5	0.5
	0.96	0.98	1.02	1.07	1.05	1.08	1.15	1.17	1	1
	1.7	1.64	1.6	1.53	1.58	1.61	1.8	2.05	2.1	2.1
2	0.67	0.66	0.66	0.67	0.63	0.57	0.5	0.44	0.42	0.4
	0.88	0.92	0.94	0.97	1	1.08	1.1	1.1	1.13	1.2
	1.67	1.64	1.62	1.57	1.54	1.54	1.58	1.62	1.78	1.9
3	0.7	0.69	0.69	0.68	0.68	0.67	0.64	0.59	0.55	0.53
	0.85	0.88	0.89	0.94	0.95	0.96	0.98	1.04	1.02	1
	1.46	1.45	1.49	1.55	1.56	1.58	1.65	1.71	1.9	2.03
4	0.76	0.76	0.74	0.71	0.69	0.68	0.65	0.63	0.59	0.56
	0.9	0.9	0.9	0.91	0.93	0.94	0.94	0.92	0.9	0.88
	1.51	1.55	1.6	1.67	1.72	1.8	1.88	2.04	2.25	2.27
5	0.71	0.71	0.7	0.67	0.65	0.62	0.62	0.6	0.57	0.56
	0.94	0.91	0.9	0.9	0.9	0.9	0.86	0.82	0.78	0.78
	1.74	1.78	1.81	1.82	1.86	1.88	1.89	1.9	1.94	2
6	0.6	0.59	0.6	0.6	0.6	0.59	0.59	0.57	0.54	0.5
	0.96	0.96	0.93	0.92	0.9	0.9	0.9	0.92	0.95	0.99
	1.8	1.8	1.8	1.8	1.78	1.78	1.78	1.78	1.79	1.8
7	0.55	0.55	0.55	0.55	0.56	0.56	0.56	0.54	0.5	0.5
	1.02	1.02	1.02	1.02	1.01	1.01	1.01	1.05	1.11	1.11
	1.75	1.75	1.74	1.74	1.71	1.71	1.7	1.61	1.58	1.8
8	0.54	0.54	0.56	0.56	0.59	0.59	0.58	0.58	0.58	0.52
	1.05	1.05	1.03	1.03	1	1	1.02	1.08	1.1	1.07
	1.8	1.8	1.76	1.74	1.74	1.6	1.57	1.73	2.02	2.4
9	0.5	0.52	0.56	0.58	0.58	0.62	0.64	0.59	0.52	0.44
	1.1	1.07	1.02	1	1	1.01	1	0.98	0.96	0.94

Tableau 8B - Intensité des axes de l'ellipsoïde de déformation. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	80	87	98	91	90	88	89	90	90	88
	43	39	33	34	38	40	40	40	40	40
2	87	89	89	90	90	90	90	90	90	90
	41	38	33	31	32	35	38	40	40	40
3	88	89	90	90	90	90	90	92	114	112
	41	39	34	32	31	31	32	35	37	37
4	100	95	95	90	90	90	90	90	90	90
	43	40	36	34	32	31	31	30	30	30
5	104	95	95	95	94	95	94	94	94	93
	42	40	38	36	34	33	32	27	24	20
6	70	78	81	87	91	100	105	103	95	95
	40	38	38	37	36	34	33	27	20	20
7	74	75	78	92	94	95	97	97	97	91
	38	37	37	36	36	34	33	25	20	20
8	78	85	90	92	92	90	90	90	90	85
	37	36	36	35	34	33	32	26	25	27
9	90	90	90	90	90	90	90	90	90	88
	36	35	34	33	32	31	31	30	27	25

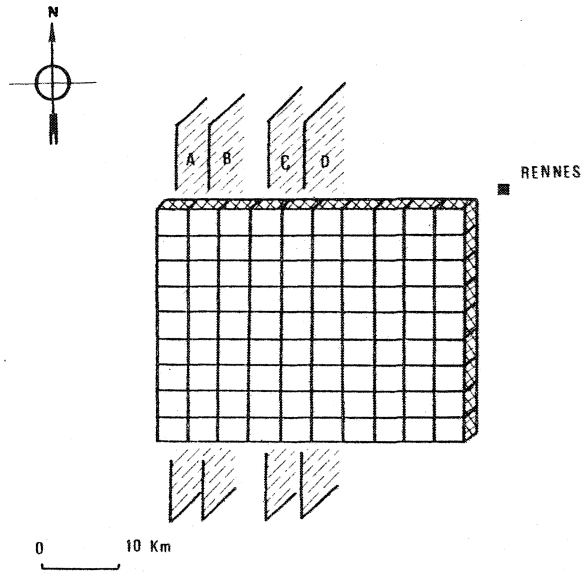
Tableau 8C - Orientation des axes principaux de l'ellipsoïde de déformation suivant 2 angles :
- 1 - l'azimut θ
- 2 - l'inclinaison ψ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	75	75	90	95	105	110	110	110	110	110
	0	0	-5	-5	-5	0	0	0	0	0
2	75	75	90	95	105	110	110	110	110	110
	10	10	10	10	10	10	0	0	0	0
3	105	100	90	95	105	110	110	110	110	110
	0	0	0	0	0	0	10	15	0	0
4	105	105	110	110	110	105	100	105	105	110
	-10	-10	-10	-10	0	0	-10	-20	0	20
5	105	105	110	110	105	100	105	105	105	105
	20	20	10	0	0	0	10	15	15	15
6	105	105	110	110	100	100	105	105	105	105
	-20	-20	0	0	0	0	0	-30	-30	-35
7	100	100	100	100	95	95	95	95	95	95
	0	0	0	0	0	0	0	15	5	0
8	95	95	95	95	95	95	95	95	95	95
	40	20	10	0	0	0	-10	-15	-20	-20
9	95	95	95	95	95	95	95	95	95	95
	-35	-15	-10	0	0	0	0	0	0	0

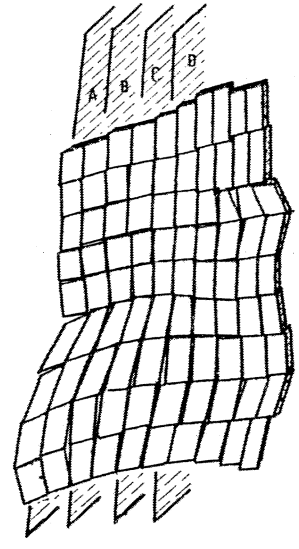
Tableau 8D - Orientation des plans de stratification suivant 2 angles :
- 1 - l'azimut θ
- 2 - l'inclinaison ψ

ETAPES de la DEFORMATION INVERSE

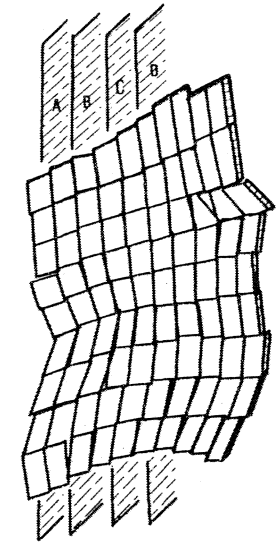
sens de la DEFORMATION



ETAT ACTUEL DEFORME **1**



Etat intermédiaire **2**



ETAT INITIAL NON DEFORME **3**

Fig. 18 - Schéma des étapes de la déformation inverse. A , B , C , D localisation des coupes de la Fig.19

1 - Etat final déformé

2 - La déformation interne est enlevée de chaque élément. Des vides et des recouvrements apparaissent entre les éléments qui sont ajustés ensuite par translations et rotations.

3 - Le plan de stratification inclu dans chaque élément, est amené en coïncidence avec le plan horizontal. Ces rotations rigides définissent celles de l'élément pour l'orientation dans le plan vertical. Un ajustement de ces divers éléments dans le plan horizontal permet d'obtenir ensuite un modèle de la région dans son état initial non déformé.

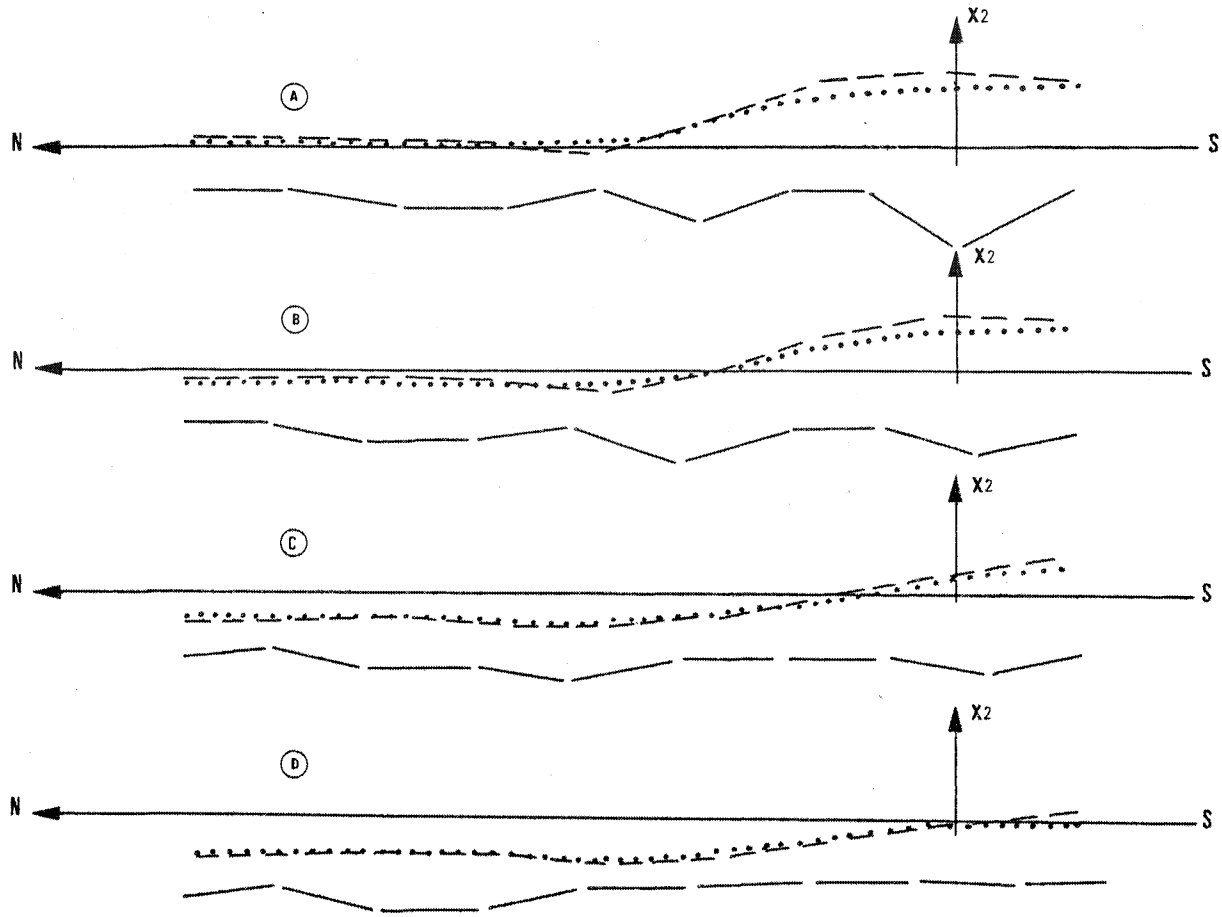


Fig. 19 - Profils à travers le domaine étudié
1 - courbe enveloppe des plis d'échelle régionale, (Fig. 18, schéma 1).
2 - Position des centres des éléments dans leur état non déformé, non orienté dans le plan vertical (Fig. 18, schéma 2).
3 - Position des centres des éléments dans leur état initial non déformé après orientation des éléments dans le plan vertical (Fig. 18, schéma 3).

On suppose que la direction de cisaillement est contenue dans le plan horizontal X_1 X_3. Le raccourcissement se fait dans ce même plan suivant X_3 avec une extension selon X_2. Le taux de cisaillement déduit est $\gamma = 0.7$. Le raccourcissement est estimé à 7% dans le plan horizontal.

Analyse bidimensionnelle, tridimensionnelle

L'agencement des éléments dans l'état non déformé avant et après orientation dans le plan vertical donne des résultats très similaires (Fig. 18, schémas 2 et 3). L'utilisation des plans de stratification ne nous apporte pas d'informations supplémentaires.

Dans cet exemple, l'étude tridimensionnelle complète l'application en deux dimensions de la méthode de la déformation inverse par la mise en évidence d'un raccourcissement crustal accompagnant le mouvement cisaillant.

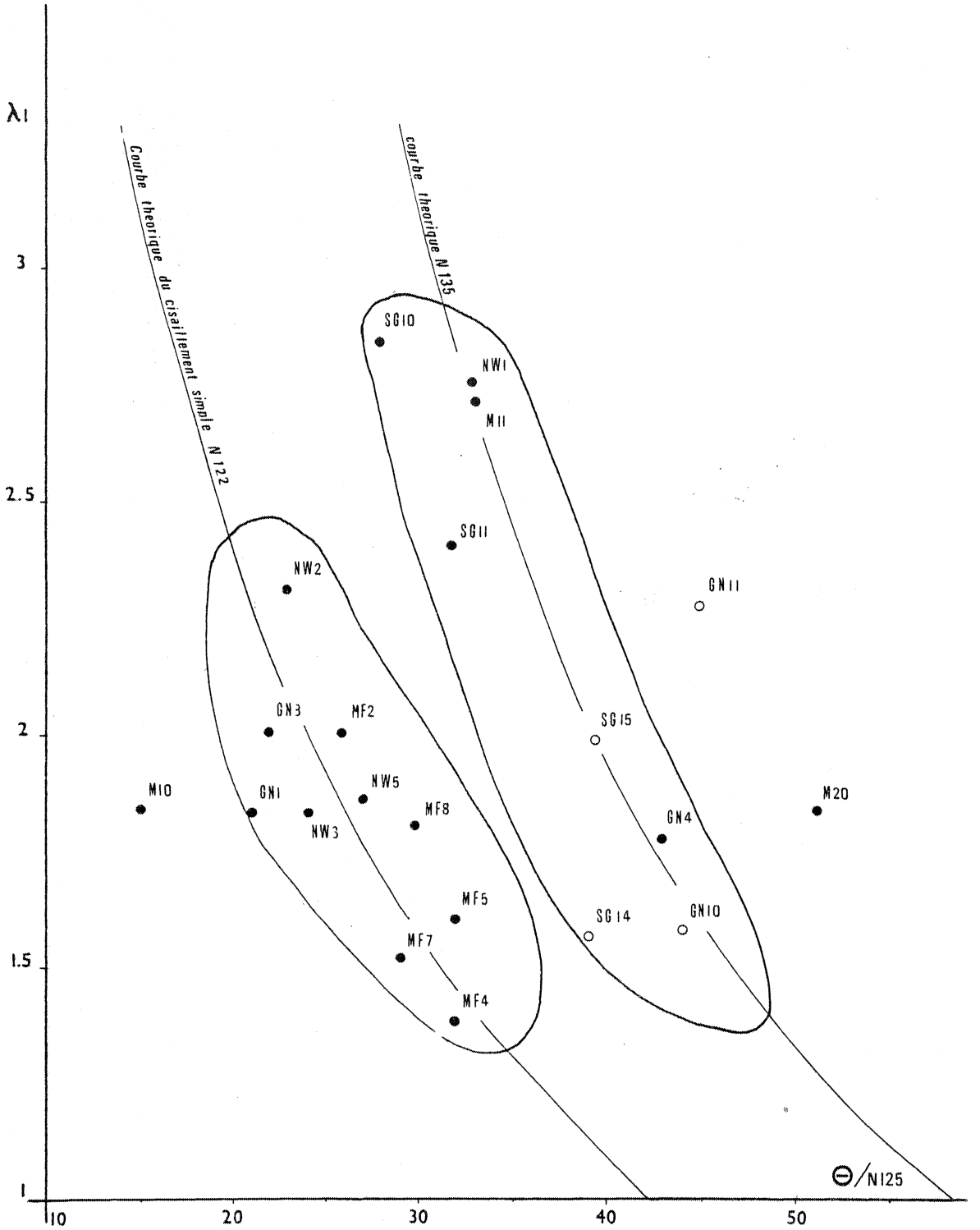


Fig. 20 - Représentation de l'axe principal λ_1 en fonction de son orientation θ (mesurée sens antihoraire à partir de la direction N125), pour les 24 localités de mesures de déformation finie. Les points montrent une dispersion entre 2 courbes de cisaillement théorique de N120 à N135.

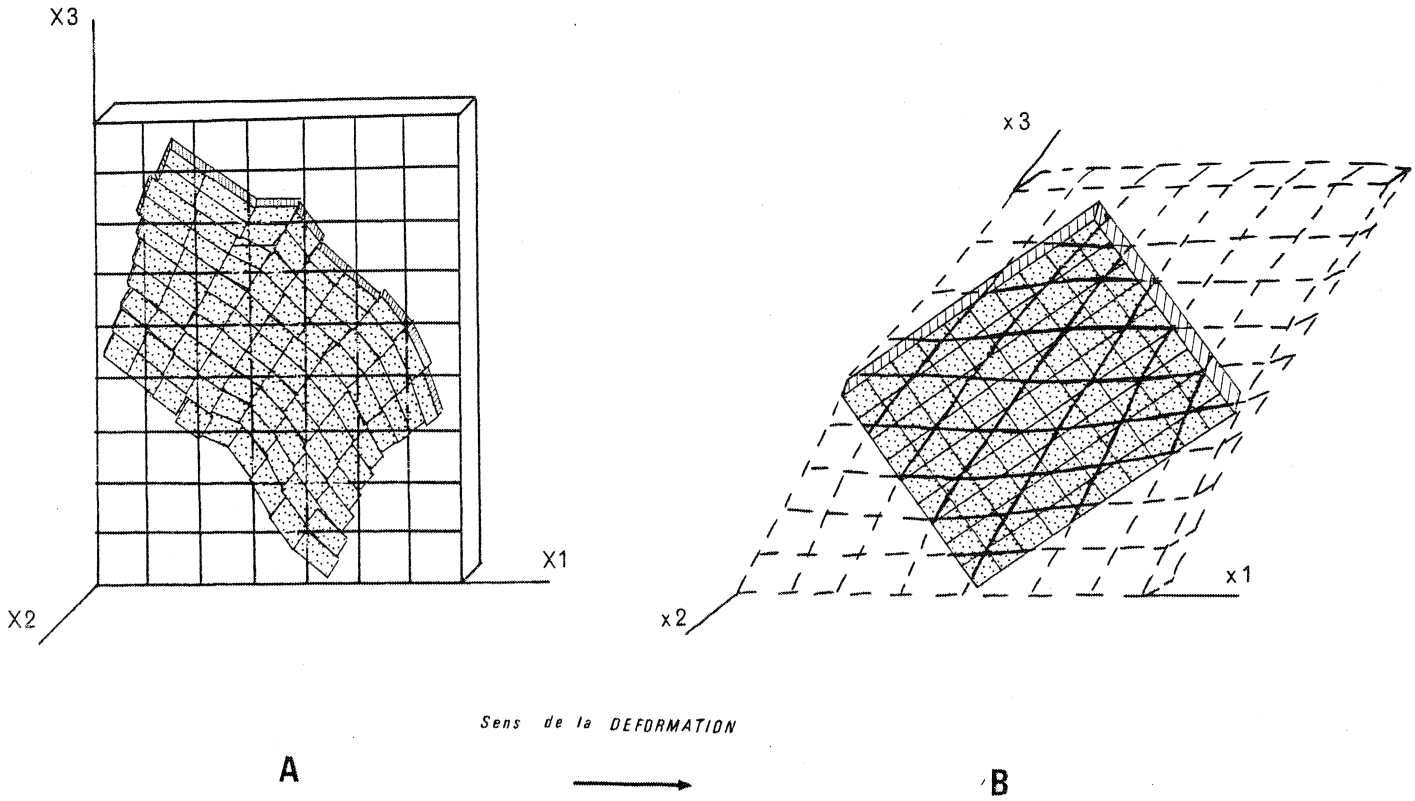


Fig. 21 - Evolution du réseau cartésien lors de la déformation
A - on appose sur la région initiale non déformé (en grisé) un réseau cartésien
B - on observe l'évolution de ce réseau lors de la déformation par référence à la région déformée actuelle.

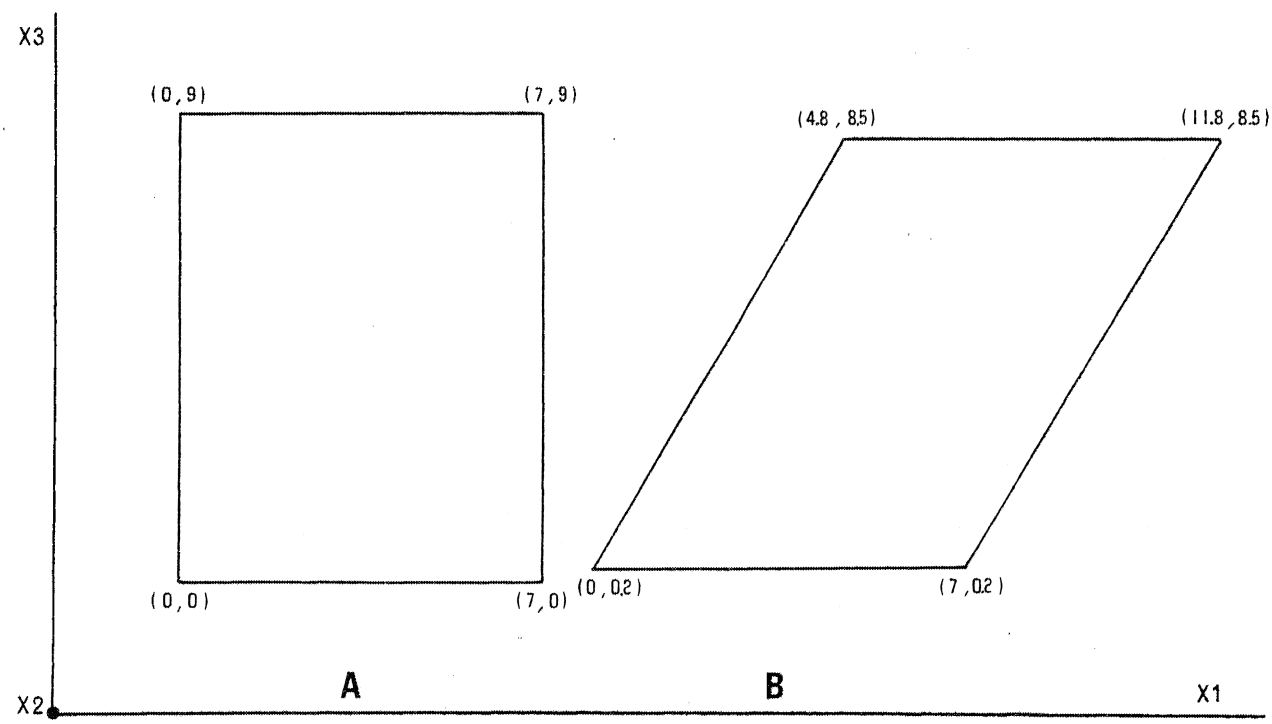


Fig. 22 - Evolution d'ensemble de la grille cartésienne de l'état non déformé A à l'état déformé B dans le plan horizontal X_1 X_3.

Les coordonnées X_1 X_3 des noeuds limitant la grille sont indiquées. La déformation d'ensemble peut s'interpréter comme la combinaison d'un cisaillement simple et d'un raccourcissement crustal perpendiculaire au plan cisaillant.

3

CONCLUSIONS

Les résultats obtenus n'apportent pas d'informations complètes quant à la cinématique de la déformation progressive de la région.

En effet, les solutions fournies par la méthode de la déformation inverse sont indépendantes du *chemin* de déformation entre l'état initial non déformé et l'état final observé. Seule la cinématique *finie* peut être précisée.

Dans le cadre d'un modèle de déformation en bandes (P.R. Cobbold, 1977), les résultats sont interprétables en terme de gradient régional de déformation subhorizontal à une direction N125 (étude en deux dimensions). Une telle direction est compatible avec l'orientation des zones de cisaillement majeures dans le Sud de la région (branche Nord du cisaillement Sud-armoricain). Ceci s'allie avec le modèle général d'une déformation globale par cisaillement dextre transcurrent ($\gamma = 0.7$). Le plissement de la couverture sédimentaire peut être en partie contrôlé par un mouvement transcurrent dans le socle, le long de failles d'échelle crustale.

Dans le cas d'un cisaillement simple, le parallélisme observé, entre les bandes de déformation à l'échelle régionale et le plan cisaillant N125, est à première vue en contradiction avec la faible intensité de la déformation sur le domaine étudié. En mettant en évidence l'existence d'une composante de raccourcissement coaxial d'ensemble de 7% (étude en trois dimensions), les résultats de la déformation inverse sont en accord avec les données géologiques.

CONCLUSION GENERALE

La première partie de ce mémoire est essentiellement consacrée au *développement théorique du programme de déformation inverse*. Parmi les divers résultats se dégageant de cette étude, je retiendrai trois points principaux :

-- La méthode de la déformation inverse repose sur *la technique d'éléments finis*. Celle-ci est équivalente, pour l'intégration spatiale de la déformation, à la méthode d'Euler modifiée pour l'intégration numérique d'équations différentielles ordinaires.

-- Une mesure de rapprochement entre un élément et le trou défini par ses voisins est la déviation D, définie comme la moyenne du carré de la distance entre les points de la frontière de l'élément et les points de la frontière du trou. *Un critère pour le meilleur ajustement d'un élément dans son trou est de minimiser la déviation* D. Ceci produit la translation et la rotation inconnue que l'élément doit subir pour assurer son meilleur ajustement dans l'espace défini par ses voisins stationnaires.

-- L'ajustement d'un réseau d'éléments est aisément résolu par *l'utilisation d'un "micro-ordinateur"*. Un sous-programme rapide permet d'obtenir un résultat approximatif après un cycle d'opérations d'ajustement. Un autre sous-programme plus rigoureux améliore le résultat au cours de plusieurs cycles d'itérations.

Le programme PUZZLE de déformation inverse est prévu pour utilisation sur un "microordinateur" H.P. 9845 A. Il a une place mémoire de 33K. Le réseau déformé peut être composé de 160 éléments au maximum. Le problème demande quelques minutes à une heure de résolution suivant le cas d'étude.

L'application du programme a été effectué sur des exemples de zones plissées, cisaillées et diapiriques. *La technique de déformation inverse nécessite quelques hypothèses de départ :*

* la déformation doit être isovolumique sinon des corrections devront être effectuées.
* l'homogénéité de la déformation est considérée au niveau de chaque élément fini.
* la taille de l'élément doit intégrer les possibles discontinuités du domaine.

J'ai relevé *quelques points importants*, suite à l'étude des modèles théoriques et expérimentaux.

-- Les éléments finis permettent de faire varier à volonté la dimension des mailles de façon fine autour d'une hétérogénéité. Toutefois, pour le *découpage en éléments finis*, il est pratique de prendre des formes d'éléments telles que des parallélogrammes ou des parallélépipèdes aussi égaux que possible dans l'état final déformé. C'est une manière d'accélérer la convergence des éléments et la rapidité du programme.

De plus, l'odre des éléments est important car c'est sur la base d'un réarrangement les uns par rapport aux autres que se fait l'ajustement. Enfin, l'étude actuelle se limite à une seule couche d'éléments en trois dimensions. La généralisation à plusieurs couches ne présente pas de difficulté mais suppose quelques modifications du programme et le passage à un ordinateur plus compétitif.

-- Les problèmes d'effet de bordure perturbent les éléments frontières du réseau. De ce fait, le modèle non déformé est d'autant plus exact vers le coeur du domaine, d'où l'intérêt de considérer le plus grand nombre possible d'éléments jointifs.

-- Ce *maillage* est directement conditionné par *le nombre de sites de mesure* de l'ellipsoïde de déformation. Tout d'abord, il est nécessaire d'avoir sur le terrain des marqueurs (conglomérats, tâches de réduction, oolithes) afin de quantifier la déformation. Ensuite, le cas idéal serait d'avoir une mesure par élément fini, mais peu d'exemples géologiques le permettent. Aussi, on estime le nombre nécessaire de sites de mesure devant être au minimum du quart du nombre d'éléments finis utilisés.

-- *Si les erreurs dans les données* ne sont pas trop importantes et sont distribuées au hasard en terme de positions et d'orientations spatiales, on peut espérer les compenser les unes par rapport aux autres durant la procédure de minimisation. Ainsi, une marge de 10% est admise sur les mesures des axes principaux de déformation et sur leur orientation.

Les erreurs relatives autre que celles dues aux incertitudes sur les mesures de déformation (par l'application de la méthode : découpage, calcul) peuvent être intégrées dans leur ensemble par la méthode des éléments finis.

-- Par ailleurs, *on interpole les mesures de déformation* afin de quantifier chaque élément fini. Dans ce travail, l'interpolation a été effectuée à la main, sans tenir compte des possibles discontinuités de la déformation ; celles-ci peuvent être estimées par les taux "excessifs" de vides et de recouvrements entre les éléments. Le problème posé par les discontinuités n'a pas été abordé dans ce travail, c'est un point important à développer.

L'application géologique au segment hercynien de Bretagne centrale développée dans la deuxième partie met en évidence les possibilités et les limites qu'offre ce type d'analyse.

-- La modélisation de cette région s'est effectuée en deux étapes :

* tout d'abord par une étude bidimensionnelle très restrictive, les hypothèses de départ nécessitant d'avoir une déformation plane isovolumique et un parallélisme des éléments avec les trajectoires de déformation.

* l'étude en trois dimensions complète l'approche bidimensionnelle en analysant une couche horizontale d'éléments finis. L'utilisation des plans de stratification pour orienter chaque élément fini dans le plan vertical ne nous apporte pas beaucoup d'informations dans ce cas particulier. Le faible pendage des formes anticlinales et synclinales sur le domaine semble en être la cause.

-- L'analyse en deux dimensions est en accord avec l'existence d'un cisaillement simple sur l'ensemble du domaine ($\gamma = 0.7$). Le parallélisme observé entre les bandes de déformation à l'échelle régionale et le plan cisaillant N125 est à première vue en contradiction avec la faible intensité de la déformation sur la région. En combinant une composante de raccourcissement coaxial d'ensemble de 7%, mise en évidence par l'étude en trois dimensions, les résultats de la déformation inverse sont en accord avec les données géologiques.

Cette méthode d'étude met en évidence une *déformation globale* permettant de préciser uniquement *la cinématique finie* : les résultats n'apportent donc pas d'informations complètes quant à la cinématique progressive de la déformation.

D'une manière générale, *la rotation rigide absolue*, entre l'état final déformé et l'état initial non déformé, reste inconnue. Seules des évidences géologiques peuvent permettre d'orienter le modèle obtenu par la méthode de la déformation inverse.

Annexe A

ajustement d'éléments finis : développement des équations utilisées

PLAN

1. AJUSTEMENT D'UN ELEMENT MOBILE AVEC SES VOISINS STABLES 97

2. MINIMISATION PAR RAPPORT À UNE TRANSLATION INCONNUE 99

3. MINIMISATION PAR RAPPORT À UNE ROTATION INCONNUE 104

VARIABLES		MATRICES	
Dim	Etude en 2 ou 3 dimensions	*Rot, Rott, Rotin,*	Matrices de rotation
G	Graphisme complet (1) en projection(2)	*St*	Matrice forme des éléments
N	Nombre total d'éléments	*Df, Dg*	Matrice des gradients de déformation
F	Numérotation des éléments	*Li, Lf*	Vecteurs définissant le pôle d'un plan de stratification avant et après déformation
H	Etape de résolution de la déformation inverse	*Sign*	Matrice signe caractérisant la place des noeuds par rapport au centre de l'élément
Aa *Ab* *Ac*	Angles de rotation par rapport aux axes z_i *(i=1à3)*	*Z*	Vecteur position du noeud d'un élément
Col *Lign*	Nombre de colonnes Nombre de lignes définissant le réseau d'éléments finis	*M*	Matrice M de covariance
I,J,O,L,M	désignation des éléments équivalent à *A,B,C,De,E*).	M_1, M_2, M_3	Matrice M symétrisée par rapport au vecteur z_1, z_2, z_3.
W_1 W_2 W_3	Angle de rotation par rapport aux axes z_i *(i=1à3)*	Rw_1, Rw_2, Rw_3	Matrices de rotation correspondant aux angles de rotation w_1, w_2, w_3.
Surf	Superficie du domaine étudié	*Ro*	Matrice rotationnelle
K,I,L,J,Mm	Compteurs		
Sum(i) *(i = 1à3)*	somme des carrés des distances entre les noeuds dans l'état déformé *i=1* ; l'état intermédiaire *i=2* ; l'état non déformé *i=3*.		

TABLEAUX	
Pos	Position du centre des éléments *(Nx3)*
Lg	Longueur du côté des éléments *(Nx3)*
Rr	Orientation des éléments dans le repère z_i *(i=1à3) (Nx3)*
Pr	Angles de cisaillement suivant la direction z_1 ou z_2 dans le plan z_1 z_2 de l'élément *(Nx2)*
Ap	Valeurs d'intensité des axes principaux de la déformation λ_i *(Nx3)*
Or	Orientation des axes principaux de la déformation *(Nx2)* (θ,ψ)
SØ	Orientation des plans de stratification (θ,ψ) *(Nx2)*
Posa = Posb	Matrices de position utilisées au cours des calculs
X,Y	Matrices *Nx2* indiquant les coordonnées des noeuds des éléments pour le graphisme sur l'écran.
S	Matrice globale de forme des *N* éléments *(3Nx3)*
D	Matrice globale des gradients de déformation *(3Nx3)*

A partir des divers résultats obtenus dans la partie théorique, je donne dans cette annexe le développement des équations utilisées pour la mise au point de la partie "ajustement du programme de déformation inverse".

C'est l'étude détaillée de la troisième étape de la méthode qui consiste à minimiser les vides et les recouvrements entre des éléments disjoints. Ces éléments étant supposés rigides, cet ajustement se fait seulement par translations et rotations.

1. AJUSTEMENT D'UN ELEMENT MOBILE AVEC SES VOISINS STABLES

Comme décrit dans la partie théorique, on va définir la déviation D d'un élément par son trou, espace limité par ses quatre voisins immédiats (Fig. A1).

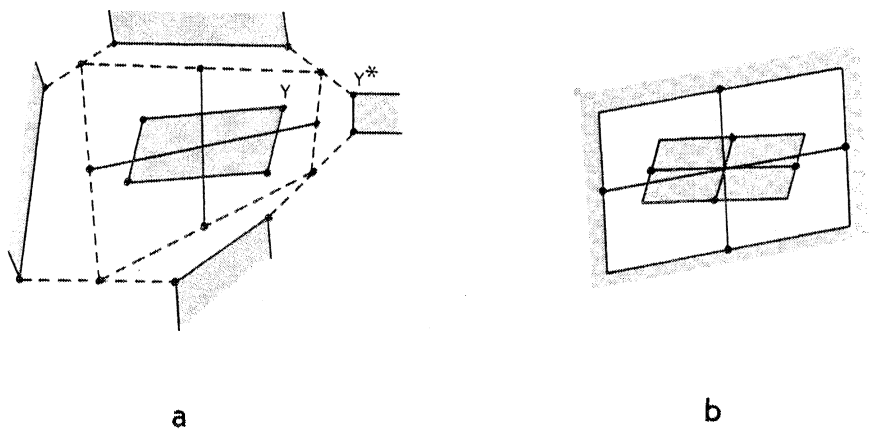


Fig. A1 - a : les éléments sont en grisé. Les "coins" de l'élément central sont exprimés par Y, ceux de l'élément frontière par Y^*. L'élément central est situé dans son vrai trou (limité en pointillé). Les segments internes joignent les centres des côtés du vrai trou.

b : L'élément central (en grisé) est situé dans son trou équivalent dont les côtés sont définis par les segments internes du vrai trou.

$$D = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} | Y^* - Y |^2 \qquad (1)$$

où n est le nombre de points frontières considérés.

Y, Y^* sont les points frontières, dans un état intermédiaire, des éléments internes et externes.

L'expression est ensuite minimisée pour obtenir le meilleur ajustement. On différencie D par rapport aux positions et orientations de chaque élément et on pose le résultat simultanément à zéro. Ce procédé produit une trame d'équations simultanées de position et d'orientation inconnues. Ces équations sont non linéaires, leur solution n'est donc pas directement obtenue mais une méthode itérative est utilisée.

La minimisation produit la translation et la rotation qu'un élément doit subir afin de se placer au mieux dans son trou. Bien qu'un élément n'a pas besoin d'avoir la même forme que le vrai trou défini par les éléments immédiatement adjacents, il est possible de définir un trou équivalent dont la forme moyenne est identique à celle de l'élément (Fig. A1). De plus, si l'élément s'ajuste parfaitement dans le trou équivalent on démontre que la déviation est minimisée. Ainsi, le trou équivalent est une aide graphique générale pour juger de la compatibilité d'un élément avec ses voisins.

Si les éléments sont cubiques dans l'état déformé, ils deviennent parallélépipédiques dans l'état non déformé, mais, les vrais trous ne le sont pas. Néanmoins, on peut définir des trous équivalents qui sont des parallélépipèdes (ou des parallélogrammes). Une façon de procéder est de considérer les points frontières qui lient seulement les coins des éléments, (Fig. A2).

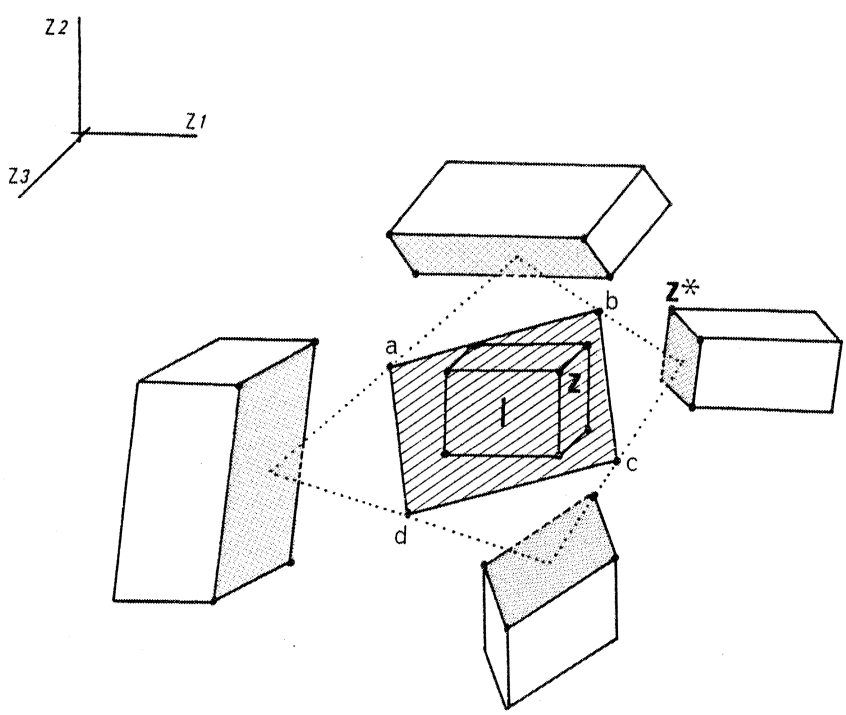


Fig. A2 - L'élément central I caractérisé par les "coins" Z est entouré par quatre voisins immédiats dont les "coins" s'expriment par Z^*. Le vrai trou est limité par les centres des faces des éléments voisins. Le trou équivalent est limité par les points a,b,c,d qui caractérisent le milieu des segments joignant le centre des faces des éléments voisins.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL BIBLIOTHÈQUE INSTITUT DE GÉOLOGIE

Ainsi, un élément a 8 coins tandis que son vrai trou a 16 coins (4 voisins contribuant chacun par 4 coins). En calculant le vecteur moyen de chaque face, on obtient 4 centres de faces définissant un parallélogramme. Ceci est le trou équivalent, dans lequel l'élément doit être ajusté. La déviation D est minimum quand un parallélogramme et son trou équivalent ont exactement la même forme et dimension, dans ce cas, les distances interfaciales sont nulles. La compatibilité est considérée parfaite quand chaque élément est une image exacte de son trou équivalent.

Je décris la méthode en considérant une seule couche d'éléments de forme géométrique simple (cubes ou parallélogrammes) (Fig. A3). On conserve l'ordre des éléments.

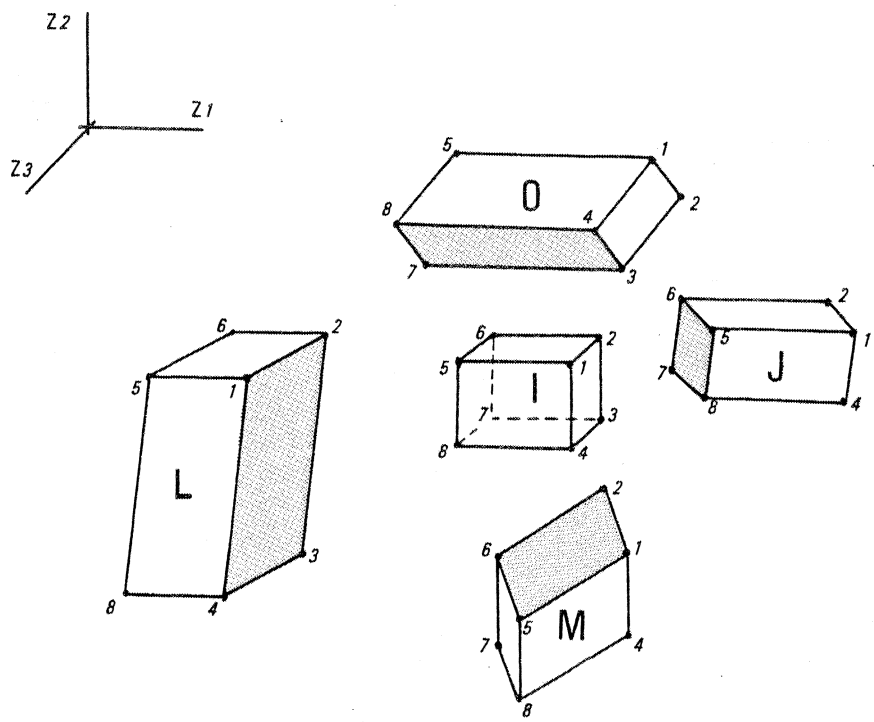


Fig. A3 - L'élément central I est entouré par 4 voisins immédiats, J, O, L, M. Les coins des éléments sont indiqués de 1 à 8.

J'analyserai tout d'abord la minimisation de la déviation D par rapport à une translation inconnue, puis par rapport à une rotation, en étudiant le cas le plus général posé lors de l'ajustement, c'est à dire celui d'un élément I mobile entouré par ses quatre voisins supposés fixes (J, O, L, M) (Fig. A3).

Dans l'état non déformé, l'élément I est défini par les points frontières z^I, le trou est défini par les points z^* qui seront respectivement z^{*J}, z^{*O}, z^{*L}, z^{*M} pour les éléments J, O, L, M.

2. MINIMISATION PAR RAPPORT A UNE TRANSLATION INCONNUE

Considérons les éléments dans un état non déformé, la minimisation de la déviation D par rapport à une translation inconnue B permet d'écrire,

$$B_i = \overline{z}_i^* - \overline{z}_i \qquad (2)$$

où $\bar{z}_i$ est le vecteur moyen des points autour de l'élément interne,

$\bar{z}_i^*$ le vecteur moyen des points autour du trou.

Pour minimiser la déviation, l'élément doit être translaté jusqu'à ce que les vecteurs moyens coincïdent. Le meilleur ajustement est obtenu lorsque les distances interfaciales sont nulles.

Seul l'élément I subit une translation.

L'expression d'un point interne ou externe peut être exprimée par rapport au centre de l'élément

$$z_i^I = Pos_i^I + D_{i\ell}^I \, Lg_\ell^{Ik}$$

où Pos_i^I est la position du centre de l'élément suivant les directions z_i $(i = 1 \text{ à } 3)$

$D_{i\ell}^I$ matrice des gradients de déformation de l'élément I

Lg_ℓ^{Ik} exprime les coordonnées du point k $(k = 1 \text{ à } 8)$ de l'élément I dans la direction $z_\ell (\ell = 1 \text{ à } 3)$

En prenant $\bar{z}_i^*$ comme la moyenne des centres des faces des éléments frontières, on exprime (2) par

$$B_i = \frac{1}{4} (\bar{z}_i^{*J} + \bar{z}_i^{*O} + \bar{z}_i^{*L} + \bar{z}_i^{*M}) - \frac{1}{8} (\bar{z}_i^I) \qquad (3)$$

Si on développe le premier terme de l'expression (3) en se référant à la figure A3

$$\bar{z}_i^{*J} = \frac{1}{4} (z_i^{*J5} + z_i^{*J6} + z_i^{*J7} + z_i^{*J8})$$

$$\bar{z}_i^{*J} = \frac{1}{4} \left[Pos_i^J + D_{i\ell}^J \, Lg_\ell^{J5} + Pos_i^J + D_{i\ell}^J \, Lg_\ell^{J6} + Pos_i^J + D_{i\ell}^J \, Lg_\ell^{J7} + Pos_i^J + D_{i\ell}^J \, Lg_\ell^{J3} \right] \qquad (4)$$

La correspondance entre les coordonnées des points des éléments et les dimensions de l'élément résumée dans le tableau A1 va nous permettre d'écrire après développement et simplification de l'expression (4)

$$\bar{z}_i^{*J} = Pos_i^J - D_{i1}^J \, Lg_1^J \qquad (5)$$

De la même façon pour les autres termes de l'expression (3)

$$\begin{aligned} \bar{z}_i^{*O} &= Pos_i^O - D_{i2}^O \, Lg_2^O \\ \bar{z}_i^{*L} &= Pos_i^L + D_{i1}^L \, Lg_1^L \\ \bar{z}_i^{*M} &= Pos_i^M + D_{i2}^M \, Lg_2^M \end{aligned} \qquad (6)$$

et

$$\bar{z}_i^I = Pos_i^I$$

Pour l'élément I

$$Lg_1^I = Lg_1^{I1} = Lg_1^{I2} = Lg_1^{I3} = Lg_1^{I4} = -Lg_1^{I5} = -Lg_1^{I6} = -Lg_1^{I7} = -Lg_1^{I8}$$

$$Lg_2^I = Lg_2^{I1} = Lg_2^{I2} = -Lg_2^{I3} = -Lg_2^{I4} = Lg_2^{I5} = Lg_2^{I6} = -Lg_2^{I7} = -Lg_2^{I8}$$

$$Lg_3^I = Lg_3^{I1} = -Lg_3^{I2} = -Lg_3^{I3} = Lg_3^{I4} = Lg_3^{I5} = -Lg_3^{I6} = -Lg_3^{I7} = Lg_3^{I8}$$

Pour l'élément J

$$Lg_1^J = Lg_1^{J1} = Lg_1^{J2} = Lg_1^{J3} = Lg_1^{J4} = -Lg_1^{J5} = -Lg_1^{J6} = -Lg_1^{J7} = -Lg_1^{J8}$$

$$Lg_2^J = Lg_2^{J1} = Lg_2^{J2} = -Lg_2^{J3} = -Lg_2^{J4} = Lg_2^{J5} = Lg_2^{J6} = -Lg_2^{J7} = -Lg_2^{J8}$$

$$Lg_3^J = Lg_3^{J1} = -Lg_3^{J2} = -Lg_3^{J3} = Lg_3^{J4} = Lg_3^{J5} = -Lg_3^{J6} = -Lg_3^{J7} = Lg_3^{J8}$$

Pour l'élément O

$$Lg_1^O = Lg_1^{O1} = Lg_1^{O2} = Lg_1^{O3} = Lg_1^{O4} = -Lg_1^{O5} = -Lg_1^{O6} = -Lg_1^{O7} = -Lg_1^{O8}$$

$$Lg_2^O = Lg_2^{O1} = Lg_2^{O2} = -Lg_2^{O3} = -Lg_2^{O4} = Lg_2^{O5} = Lg_2^{O6} = -Lg_2^{O7} = -Lg_2^{O8}$$

$$Lg_3^O = Lg_3^{O1} = -Lg_3^{O2} = -Lg_3^{O3} = Lg_3^{O4} = Lg_3^{O5} = -Lg_3^{O6} = -Lg_3^{O7} = Lg_3^{O8}$$

Pour l'élément L

$$Lg_1^L = Lg_1^{L1} = Lg_1^{L2} = Lg_1^{L3} = Lg_1^{L4} = -Lg_1^{L5} = -Lg_1^{L6} = -Lg_1^{L7} = -Lg_1^{L8}$$

$$Lg_2^L = Lg_2^{L1} = Lg_2^{L2} = -Lg_2^{L3} = -Lg_2^{L4} = Lg_2^{L5} = Lg_2^{L6} = -Lg_2^{L7} = -Lg_2^{L8}$$

$$Lg_3^L = Lg_3^{L1} = -Lg_3^{L2} = -Lg_3^{L3} = Lg_3^{L4} = Lg_3^{L5} = -Lg_3^{L6} = -Lg_3^{L7} = Lg_3^{L8}$$

Pour l'élément M

$$Lg_1^M = Lg_1^{M1} = Lg_1^{M2} = Lg_1^{M3} = Lg_1^{M4} = -Lg_1^{M5} = -Lg_1^{M6} = -Lg_1^{M7} = -Lg_1^{M8}$$

$$Lg_2^M = Lg_2^{M1} = Lg_2^{M2} = -Lg_2^{M3} = -Lg_2^{M4} = Lg_2^{M5} = Lg_2^{M6} = -Lg_2^{M7} = -Lg_2^{M8}$$

$$Lg_3^M = Lg_3^{M1} = -Lg_3^{M2} = -Lg_3^{M3} = Lg_3^{M4} = Lg_3^{M5} = -Lg_3^{M6} = -Lg_3^{M7} = Lg_3^{M8}$$

Tableau A1 - Coordonnées des points des éléments I,J,O,L,M avec Lg^{IK} exprimant les coordonnées suivant $z_i (i = 1à3)$ du noeud k de l'élément I.

Lg_i^I est le 1/2 axe des éléments suivant la direction $z_i (i=1à3)$.

D'où, en reportant (5) et (6) dans l'expression (3), on exprime B_i par

$$B_i = \frac{1}{4} (Pos_i^J - D_{i1}^J Lg_1^J + Pos_i^O - D_{i2}^O Lg_2^O + Pos_i^L + D_{i1}^L Lg_1^L + Pos_i^M + D_{i2}^M Lg_2^M) - Pos_i^I \qquad (7)$$

La nouvelle position du centre de l'élément I sera donc dans le cas le plus général :

$$Pos_i^I = \frac{1}{4} (Pos_i^J + Pos_i^O + Pos_i^L + Pos_i^M - D_{i1}^J Lg_1^J - D_{i2}^O Lg_2^O + D_{i1}^L Lg_1^L + D_{i2}^M Lg_2^M) \qquad (8)$$

Remarque

Dans un réseau d'éléments finis, 9 situations différentes peuvent apparaître suivant la position de l'élément dans le réseau (Fig. A4).

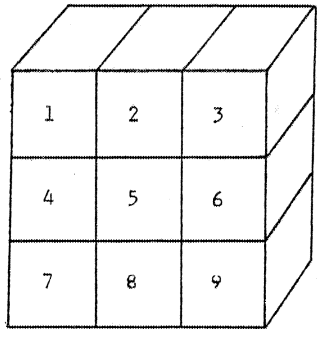


Fig. A4 - Réseau de 9 éléments finis illustrant les 9 combinaisons possibles de voisinage d'un élément.
cas 1 : l'élément ① à 2 voisins immédiats ② et ④
cas 2 : l'élément ② à 3 voisins immédiats ③ ⑤ et ①
cas 3 : l'élément ③ à 2 voisins immédiats ② et ⑥ mais dans une position différente par rapport au cas 1
ainsi de suite pour chaque cas.

Considérons le premier cas où l'élément I mobile a 2 voisins immédiats seulement. On va exprimer (2) par :

$$B_i = \frac{1}{2} (\bar{z}_i^{J*} + \bar{z}_i^{M*}) - \frac{1}{2} (\sum_{k=1}^{4} z_i^{Ik} + \sum_{k}^{3,4,7,8} z_i^{Ik})$$

En développant et simplifiant de la même façon que pour le cas général, on obtient pour cet exemple :

$$Pos_i^I = \frac{1}{2} (Pos_i^I + Pos_i^M - D_{i1}^J Lg_1^J + D_{i2}^M Lg_2^M + D_{i2}^I Lg_2^I - D_{i1}^I Lg_1^I) \qquad (9)$$

On peut remarquer dans cette expression (9) que l'on tient compte de la forme de l'élément I, dans (8) seul les éléments externes contribuent à positionner l'élément I.

L'étude est effectuée pour les 9 cas. Ces expression donnent donc la nouvelle position de l'élément I par rapport à ses voisins immédiats.

3. MINIMISATION PAR RAPPORT A UNE ROTATION INCONNUE

On suppose à ce niveau que l'élément a déjà été translaté, les précédents résultats sont conservés. Une rotation rigide autour du vecteur moyen ne changera donc pas sa position.

Afin de connaitre la rotation rigide de l'élément I dans son trou, il est nécessaire de définir M_{ij}, la matrice de covariance.

$$M_{ij} = \overline{{}_o Z_i^* \; {}_o Z_j} \tag{10}$$

où ${}_oZ_i^*$ est le vecteur déviatorique des points externes

${}_oZ_j$ le vecteur déviatorique des points internes

avec

$${}_oZ_i = Z_i - \overline{Z}_i$$

M_{ij} exprime la position moyenne des points externes par rapport à la position moyenne des points internes après rotation.

C'est aussi une quantification de l'espace créé par ses 4 voisins stationnaires.

En général, M_{ij} est asymétrique et des rotations interviendront jusqu'à ce qu'elle devienne symétrique. Pour obtenir la matrice de rotation qui minimise D, on a besoin d'effectuer la décomposition polaire (cf. annexe B) telle que

$$D_{ij}^J = R_{ik} \, S_{kj}^J$$

où R est le tenseur rotationnel

S une matrice symétrique = $\sqrt{c}$

c la matrice de Cauchy

Détermination de M_{ij}

$$M_{ij} = \overline{{}_oZ_i^* \; {}_oZ_j}$$

$$M_{ij} = \overline{(Z_i^* - \overline{Z}_i^*)\,(Z_j - \overline{Z}_j)}$$

En se référant à la figure A3

$$M_{ij} = \frac{1}{4}(Z^{*J} - \overline{Z}^{*J})(Z^I - \overline{Z}^I) + \frac{1}{4}(Z^{O*} - \overline{Z}^{*O})(Z^I - \overline{Z}^I) + \frac{1}{4}(Z^{*L} - \overline{Z}^{L*})(Z^I - \overline{Z}^I) + \frac{1}{4}(Z^{M*} - \overline{Z}^{M*})(Z^I - \overline{Z}^I) \tag{11}$$

Si on s'intéresse au premier membre de l'expression (11)

$$\frac{1}{4}(Z^{*J} - \overline{Z}^{*J})(Z^I - \overline{Z}^I) = \frac{1}{4}(Pos_i^J + D_{i\ell}^J \, Lg_\ell^{Jk} - \overline{Z}^{*J}) \, S_{i\ell}^I \, Lg_\ell^{Ik}$$

C'est la position des points internes après rotation que l'on considère.

Par développement et par simplification en se référant au tableau A1, on obtient :

$$\frac{1}{4}\,(z^{*J} - \bar{z}^{*J})\,(z^{I} - \bar{z}^{I}) = 4\,S_{i3}^{I}\,Lg_{3}^{I}\,(D_{i3}^{J}\,Lg_{3}^{J}) + 4\,S_{i2}^{I}\,Lg_{2}^{I}\,(D_{i2}^{J}\,Lg_{2}^{J})$$

De la même façon, pour les autres termes de l'expression (11), ceci nous conduit à

$$M_{ij} = S_{k1}^{I}\,Lg_{1}^{I}\,(D_{i1}^{M}\,Lg_{1}^{M} + D_{i1}^{O}\,Lg_{1}^{O} + S_{k2}^{I}\,Lg_{2}^{I}\,(D_{i2}^{L}\,Lg_{2}^{L} + D_{i2}^{J}\,Lg_{2}^{J}) + S_{k3}^{I}\,Lg_{3}^{I}\,(D_{i3}^{J}\,Lg_{3}^{J}$$

$$+ D_{i3}^{L}\,Lg_{3}^{L} + D_{i3}^{M}\,Lg_{3}^{M} + D_{i3}^{O}\,Lg_{3}^{O})$$

De façon similaire aux équations de translations, 9 cas sont à considérer pour la détermination de la matrice M.

Les équations (8) et (12) sont la base de calcul de minimisation. Elles permettent de donner à l'élément, respectivement par translation et rotation, la position et l'orientation optimales de son arrangement dans le trou défini par ses voisins.

Annexe B

décomposition polaire d'une matrice asymétrique

Nous voulons exprimer une matrice D quelconque en un produit d'une matrice symétrique S, et d'une matrice orthogonale R, comme

$$D = R \cdot S \tag{1}$$

Il semble que la façon la plus simple d'obtenir une telle décomposition soit de noter que

$$C = D' \cdot D \tag{2}$$

où l'apostrophe indique une transposée. Les matrices S et C sont reliées ensuite par (C. Truesdell et R. Toupin, 1960).

$$S = C^{1/2} \tag{3}$$

$$R = D \cdot C^{-1/2} \tag{4}$$

Mais l'expression (4) implique

- de trouver les valeurs et les vecteurs propres de C.
- de chercher les racines carrées réciproques des valeurs propres de C pour obtenir les valeurs propres de $C^{-1/2}$.
- de former $C^{-1/2}$ à partir de ses valeurs propres et de ses vecteurs propres correspondants.

L'opération est longue et gênante d'un point de vue numérique car les valeurs propres peuvent être difficiles à extraire avec exactitude, spécialement si une ou plusieurs d'entre elles sont nulles. La méthode numérique suivante fut utilisée parce qu'elle s'est avérée rapide et exacte.

Si nous considérons les composantes cartésiennes, D_{ij}, les composantes D_{12} et D_{21} peuvent être égalisées par une rotation appropriée w_1 autour d'un axe cartésien z_1.

L'angle de rotation est donné par

$$\tan w_1 = (D_{12} - D_{21})/(D_{11} + D_{22}) \tag{5}$$

et la matrice orthogonale correspondante par

$$Rw_1(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos w_1 & \sin w_1 \\ 0 & -\sin w_1 & \cos w_1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

En multipliant D par $Rw_1(1)$, nous obtenons un nouveau D où $D_{12} = D_{21}$, mais où $D_{23} \neq D_{32}$ et $D_{31} \neq D_{13}$.

De façon similaire, les composantes D_{13} et D_{31} peuvent être égalisées par une rotation souhaitable w_2 autour d'un axe z_2, la matrice orthogonale correspondante étant $Rw_2(1)$.

En multipliant D par $Rw2(1)$, on obtient $D_{13} = D_{31}$ et $D_{32} \neq D_{23}$, et aussi $D_{12} \neq D_{21}$ à nouveau. La différence entre D_{12} et D_{21} n'est cependant pas aussi grande qu'au début des opérations.

Ainsi, si nous appliquons une rotation totale après n cycles d'itérations.

$$RO = Rw3(n) \times .... Rw1(2) \times Rw3(1) \times Rw2(1) \times Rw1(1)$$

avec des composantes autour des trois axes, D devient symétrique et RO l'inverse de R.

En pratique, la précision sur la symétrie D se fait à 2 décimales près, après environ 50 rotations autour de chaque axe cartésien. Cette opération demande deux minutes d'excécution sur un calculateur HP 9845 A avec un programme écrit en langage Basic.

Annexe C

mise en place du programme
de déformation inverse puzzle

PLAN

1. INTRODUCTION DES DONNEES 115

1.1 DETERMINATION DES DONNEES POUR CHAQUE ELEMENT FINI 115
DECOUPAGE EN ELEMENTS FINIS
QUANTIFICATION DU DOMAINE

1.2 STOCKAGE DES DONNEES 116

2. SCHEMA GENERAL DU PROGRAMME PRINCIPAL 117

3. DETAIL DES SOUS-PROGRAMMES UTILISES 119

3.1 SOUS-PROGRAMME ROTA 119
3.2 SOUS-PROGRAMME PARAL 121
3.3 SOUS-PROGRAMME GRAPH 122
3.4 SOUS-PROGRAMME RANGEMENT-REPRISE 123
3.5 SOUS-PROGRAMME MATM-MAT1 123
3.6 SOUS-PROGRAMME ROTATION 124
3.7 SOUS-PROGRAMME TRANSLATION-TRANS1 124
3.8 SOUS-PROGRAMME TEST 124

ORGANIGRAMMES 126

Les divers algorithmes qui vont être décrits correspondent aux différentes remarques théoriques de l'annexe A. Ce qui suit est une présentation technique du programme de déformation inverse écrit en langage Basic sur une calculatrice HP 9845A (M.N. Percevault, 1982).

Après avoir défini les diverses données nécessaires à l'application de la méthode de déformation inverse, je schématiserai le déroulement du programme global avant de décrire chaque sous-programme utilisé de façon plus particulière.

INTRODUCTION DES DONNEES

1.1 DETERMINATION DES DONNEES POUR CHAQUE ELEMENT FINI

DECOUPAGE DU DOMAINE EN ELEMENTS FINIS

A partir d'une carte du domaine étudié, on quadrille l'ensemble avec un maillage aussi fin que le permet l'échantillonnage. La capacité du calculateur rend possible l'étude de 160 éléments. Le maillage doit être régulier mais ne nécessite pas un nombre égal de lignes et de colonnes. Les éléments peuvent avoir des formes parallélépipédiques variables de diverses dimensions.

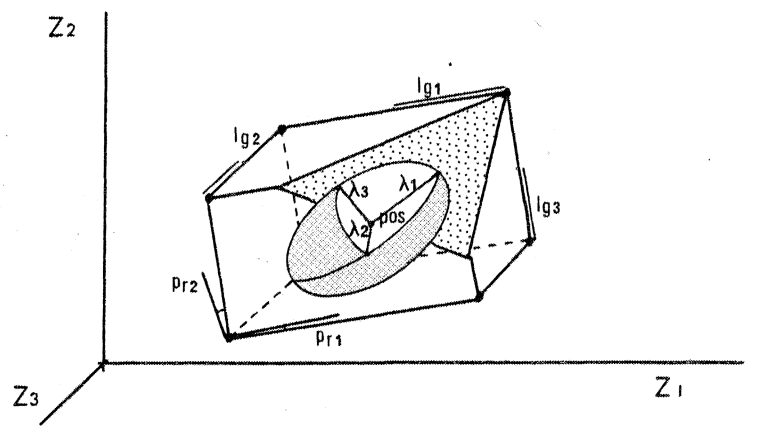


Fig. C1 -Elément parallélépipèdique (état déformé), orienté dans le repère cartésien OZ_1, Z_2, Z_3

Pos_i position du centre de l'élément

Lg_i longueur des côtés des éléments

Pr_i configuration cisaillée de l'élément

λ_i axes principaux de l'ellipsoïde de déformation

orientation du plan de stratification

Ce découpage géométrique nécessite l'introduction de quatre types de données (Fig. C1).

. la position centrale de l'élément (*Pos*)
. la longueur des côtés des éléments (*Lg*)
. l'orientation des éléments dans le repère considéré (*Rr*)
. la forme cisaillée ou non des éléments (*Pr*)

QUANTIFICATION DU DOMAINE

Les sites de mesures de la déformation permettent par interpolation graphique d'obtenir des courbes d'isointensité de déformation cartographiant le domaine. Ainsi, le centre de chaque élément est quantifié par des mesures d'intensité de la déformation λ_1, λ_2, λ_3. La déformation des plans de schistosité, par leur azimuth θ et l'inclinaison ψ, vont définir en première approximation l'orientation des plans de déformation.

Enfin, dans la mesure où le paramètre des plans de stratification est nécessaire, on introduit l'azimuth θ, et l'inclinaison ψ de ce plan pour chaque élément.

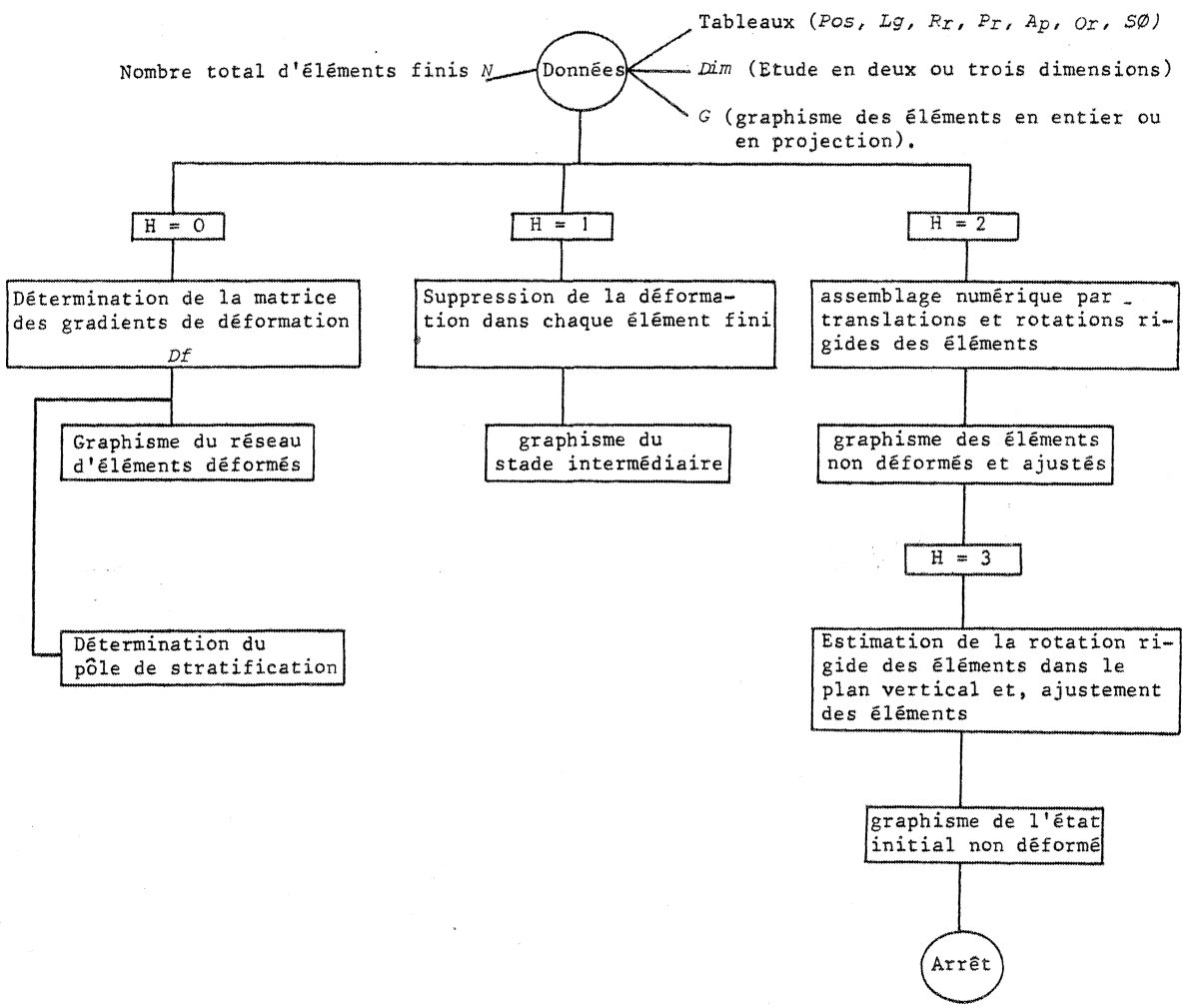
Trois tableaux de données sont à introduire pour chaque élément

. dans le tableau A_p , Les valeurs des axes principaux de déformation λ_1, λ_2, λ_3,
. dans le tableau O_r , l'orientation des plans de déformation (θ, ψ)
. dans le tableau SØ , l'orientation des plans de stratification (θ, ψ)

1.2 STOCKAGE DES DONNEES

Les données sont introduites sur des fichiers. Le numérotage en éléments finis débute par l'élément en haut et à gauche, la lecture se fait ensuite de gauche à droite et, de haut en bas.

SCHEMA GENERAL DU PROGRAMME PRINCIPAL



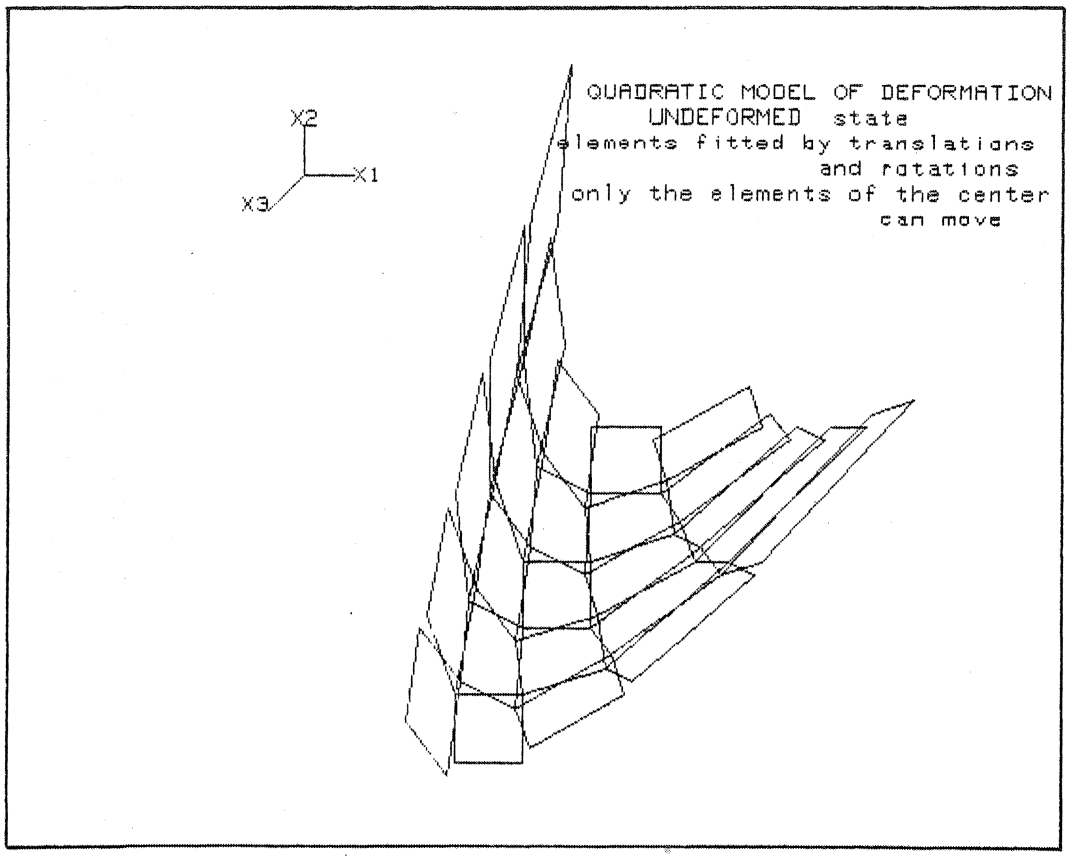


Fig. C2 - Graphisme obtenu sur l'écran de l'unité centrale. En haut, à gauche il s'agit du repère cartésien utilisé Z_i *(i = 1 à 3)* (LABEL 0) ; En haut à droite, le message indique l'intitulé de l'exemple traité (LABEL 1),puis l'état du domaine au moment du graphisme (LABEL 2); enfin, la majeure partie de l'écran est réservée au graphisme des éléments.

Le programme principal se divise en trois grandes parties qui correspondent aux étapes de la déformation inverse. L'étape *H = 0* définit le découpage en éléments finis du domaine déformé ; l'étape *H = 1* traduit le stade intermédiaire. La déformation est enlevée de chaque élément, des vides et des recouvrements apparaissent ; l'étape *H = 2 et 3* aboutit au modèle de l'état initial non déformé. L'ajustement des éléments s'effectue par translations et rotations (*H = 2*). Puis, on oriente les éléments dans le plan vertical et on ajuste à nouveau les éléments *(H=3)*.

L'illustration du graphisme obtenu sur l'unité centrale est donné par la figure C2.

Le programme occupe une place mémoire de 33K et a une longueur d'environ 1000 lignes. Le temps d'exécution varie suivant le nombre et la forme plus ou moins complexe des éléments de quelques minutes à une heure d'exécution.

DETAIL DES SOUS-PROGRAMMES UTILISES

Les divers sous-programmes sont détaillés dans les pages qui suivent, il s'agit de :

1 - ROTA
2 - PARAL
3 - GRAPH
4 - RANGEMENT
REPRISE
5 - MATM
6 - ROTATION
7 - TRANSLATION

Les problèmes d'orientation et de rotation se règlent par ROTA; PARAL permet de calculer les coordonnées des points frontières de chaque élément fini qui sera dessiné par GRAPH.

Pour les ajustements entre les éléments, TRANSLATION effectue les rapprochements par simple translation. Pour les ajustements par rotations et translations, on calcule la matrice M par MATM. M a été précédemment définie dans l'annexe A. Cette matrice est rendue symétrique dans ROTATION. On détermine ainsi les nouvelles positions et orientations des éléments.

Afin d'obtenir un gain de place et de temps, deux autres sous-programmes sont aussi utilisés : RANGEMENT et REPRISE. Ils permettent de classer les matrices de gradients de déformation élémentaire dans un grand tableau (RANGEMENT) et, d'avoir accès à chaque matrice (REPRISE).

3.1 SOUS-PROGRAMME ROTA

Ce sous programme comprend trois parties :

La première permet de définir l'orientation spatiale d'un élément par rapport aux axes de référence z_i $(i = 1 \text{ à } 3)$.

Les relations angulaires sont exprimées en terme de matrice. On considère respectivement les angles A_a, A_c, exprimant les rotations dextres par rapport aux axes z_1, z_3.

La matrice globale de rotation s'écrit

$$Rot\ (I,J) = \begin{pmatrix} \cos A_c & -\sin A_c & 0 \\ \sin A_c & \cos A_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos A_a & -\sin A_a \\ 0 & \sin A_a & \cos A_a \end{pmatrix}$$

$$Rot\ (I,J) = \begin{pmatrix} \cos A_c & -\sin A_c \cos A_a & \sin A_c \sin A_a \\ \sin A_c & \cos A_a \cos A_c & -\sin A_a \cos A_c \\ 0 & \sin A_a & \cos A_a \end{pmatrix}$$
$$I,J = 1 à 3$$

La deuxième partie caractérise la forme introduite de l'élément F dans l'état déformé (Fig. C3).

On considère . le cas d'un parallélépipède rectangle (cas 1)
. d'un parallélépipède rectangle cisaillé suivant Z_1 dans le plan Z_1 Z_2 (cas 2)
. d'un parallélépipède rectangle cisaillé suivant Z_2 (cas 3)
. d'un parallélépipède rectangle cisaillé suivant Z_1 et Z_2 (cas 4).

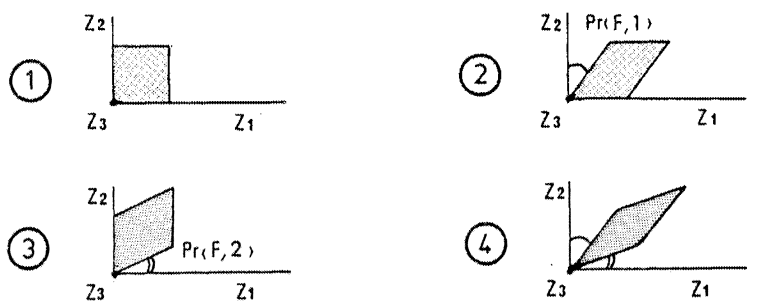


Fig. C3 - Etude de la forme rectangulaire ou cisaillée des éléments.

Ces quatre cas sont résumés par l'introduction d'une matrice *Rotp*

$$Rotp(I,J) = \begin{pmatrix} 1 & \tan Pr\ (F,1) & 0 \\ \tan Pr(F,2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$I = 1 à 3$$
$$J = 1 à 3$$

Afin de tenir compte de la forme de l'élément et de son orientation spatiale, on introduit la matrice Rotin

$$Rotin = Rot * Rotp$$

La troisième partie oriente dans le repère $Z_i (i = 1 à 3)$ les plans de déformation finie. De la même façon que précédemment, les relations angulaires sont définies en termes matriciels et plus spécifiquement correspondent à celles conventionnellement mesurées par les géologues (Fig. C4), c'est à dire par θ l'azimuth et ψ l'inclinaison.

Prenons Z_1 Z_2 comme le plan horizontal avec Z_1 axe orienté vers l'est, Z_2 vers le nord, Z_3 l'axe vertical. On fait subir une rotation dextre Ab à l'axe Z_2 et senestre à l'axe Z_3 de Ac.

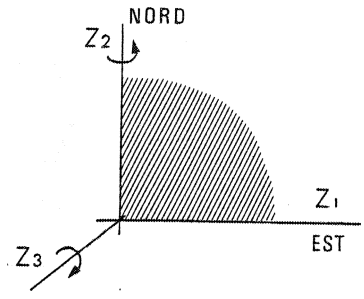


Fig. C4 - Situation du plan horizontal Z_1 Z_2 dans le réseau cartésien $Z_i (i = 1 \text{ à } 3)$

On définit ainsi la matrice *Rot*

$$Rot\ (I,J) = \begin{pmatrix} \cos Ab & 0 & -\sin Ab \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin Ab & 0 & \cos Ab \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos Ac & \sin Ac & 0 \\ -\sin Ac & \cos Ac & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} Ab = -\psi \\ Ac = 90 - \theta \end{matrix}$$

$$Rot\ (I,J) = \begin{pmatrix} \cos Ab \cos Ac & \cos Ab \sin Ac & -\sin Ab \\ -\sin Ac & \cos Ac & 0 \\ \cos Ac \sin Ab & sui\ Ab \sin Ac & \cos Ab \end{pmatrix}$$

3.2 SOUS-PROGRAMME PARAL

Par ce sous-programme, on détermine les coordonnées des huit noeuds de chaque élément (Fig. C1). Le dessin des éléments tridimensionnels se fait ensuite en projection à 45º sur l'écran.

Pour faciliter et simplifier les calculs, une matrice *Sign* a été construite, elle positionne les noeuds par rapport au centre de l'élément (Fig. C5). On obtient huit combinaisons possibles qui sont respectivement pour les noeuds de 1 à 8 (Fig. C5):

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ -X_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ -X_2 \\ -X_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ -X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -X_1 \\ X_2 \\ -X_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -X_1 \\ -X_2 \\ -X_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -X_1 \\ -X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

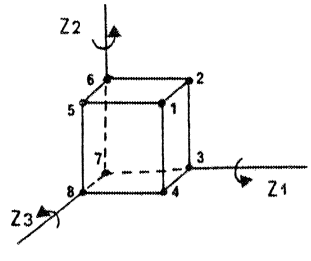


Fig. C5 - Détermination des vecteurs signes de la matrice *sign*

La matrice *Sign* se définit donc comme une matrice 3 lignes x 8 colonnes.

$$Sign(I,J) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$I = 1$ à 3

$J = 1$ à 8

On représente par *Z(L)* la position d'un point nodal dans les directions Z_i*(i=1à3)* par rapport au centre de l'élément. D'où pour le noeud *I* considéré

$$Z(L) = Df(L,J) * Sign(J,I) \qquad (L,J = 1à3)$$

Df représente la matrice des gradients élémentaires de déformation (Pour l'état final déformé, *Df* est remplacé par Rotin). Les éléments tridimensionnels sont visualisés sur l'écran avec une projection à 45°. On détermine ainsi *X(F,I)*, *Y(F,I)* pour chaque noeud *I* de l'élément *F*.

$$X(F,I) = Z(1) - \sqrt{2}\ Z(3)$$
$$Y(F,I) = Z(2) - \sqrt{2}\ Z(3)$$

Ce sous programme est suivi par GRAPH permettant le dessin sur l'écran visuel des éléments.

3.3 SOUS-PROGRAMME GRAPH

GRAPH est le sous-programme effectuant la représentation graphique des éléments. Deux possibilités sont offertes :

-- le dessin complet de l'élément (*G = 1*) avec une projection à 45° des éléments en trois dimensions.

-- le graphisme partiel selon la position de l'élément dans le réseau (*G = 2*).

Quatre cas peuvent être analysés donnant lieu à des graphes différents (Fig. C6).

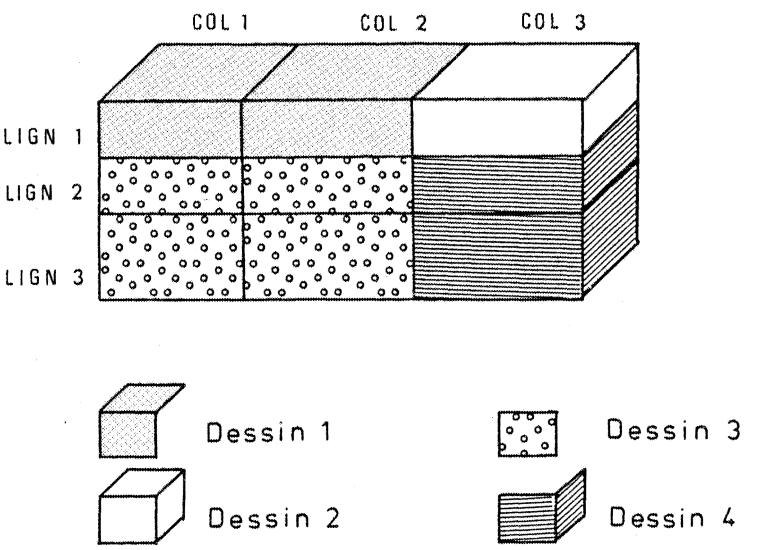


Fig. C6 - Réseau de 9 éléments finis (3 Lignes *(lign)*x3 colonnes *(Col)*) montrant les 4 possibilités de graphisme des éléments suivant leur position dans le réseau.

3.4 SOUS-PROGRAMME RANGEMENT-REPRISE

Les matrices élémentaires de forme *St* (3x3) et des gradients de déformation *Df(3x3)* sont rangées dans les matrices globales respectivement *S(3 F x 3)* et *D(3 F x 3)*

Matrice *St* élément 1 $\begin{pmatrix} X & X & X \\ X & X & X \\ X & X & X \end{pmatrix} \rightarrow$

Matrice *St* élément 2 $\begin{pmatrix} X & X & X \\ X & X & X \\ X & X & X \end{pmatrix} \rightarrow$

Matrice *S* $\begin{pmatrix} X & X & X \\ X & X & X \\ X & X & X \\ X & X & X \\ X & X & X \\ X & X & X \end{pmatrix}$ *St* élément 1 ; élément 2

Le sous-programme RANGEMENT sert au passage des matrices élémentaires dans la matrice globale. REPRISE pour sa part permet de sortir les matrices *St* de la matrice globale. Ces deux sous-programmes sont construits sur le même schéma.

3.5 SOUS-PROGRAMME MATM-MAT1

Le sous-programme MATM et ROTATION permettent de définir l'orientation de l'élément central dans le trou déterminé par ses éléments voisins. Le sous-programme MATM calcule la matrice *M*. La détermination de la matrice *M* définie dans l'annexe A, représente le cas le plus général (lorsqu'un élément est entouré par quatre voisins). En fait, neuf cas sont à considérer (Fig. C7) suivant la position des éléments dans le réseau (Fig. C8).

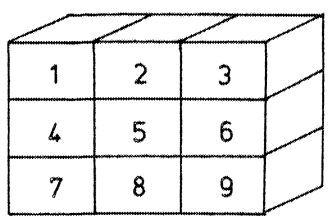


Fig. C7 - Différentes positions des éléments dans le réseau

Dans le cas le plus général (cas 5) l'élément *I* est entouré de quatre voisins immédiats *J,O,L,M*. (Pour simplifier l'écriture on utilisera aussi une autre appellation : l'élément central A entouré de 4 voisins immédiats *B, C, De, E)*.

REMARQUE - Le sous-programme MAT1 est construit de la même façon, mais ne tient compte que de deux voisins.

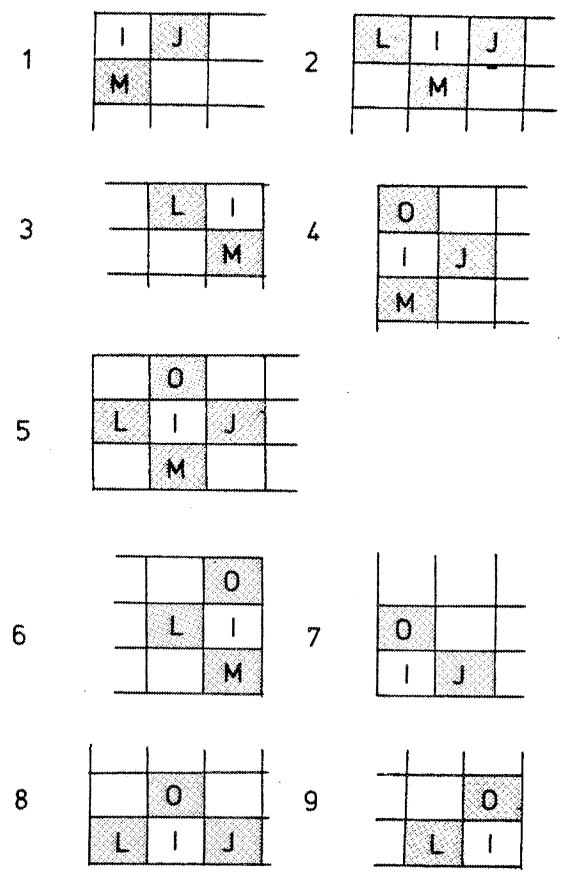


Fig. C8 - Différents cas d'étude de la matrice *M* suivant les 9 positions possibles des éléments dans le réseau

3.6 SOUS-PROGRAMME ROTATION

La minimisation de la déviation par rapport à une rotation nécessite de rendre symétrique la matrice *M* ; celle-ci est effectuée par le sous-programme ROTATION. *M* est un tenseur de deuxième ordre de déterminant positif en général asymétrique. On peut donc le décomposer en un tenseur orthogonal *R* et en un tenseur symétrique *MI* défini positif par décomposition polaire tel que

$$M = RO * MI \text{ (cf. Annexe B)}$$

La matrice *RO* obtenue représente la matrice de rotation recherchée en trois dimensions. Il suffit alors de recalculer *Df* la matrice des gradients de déformation en faisant subir à l'élément de forme *St* les rotations induites par *RO*.

On ne considère dans le programme qu'une seule couche d'éléments d'où *M* a une forme simple ($M_{12} = M_{13} = M_{31} = M_{21} = 0$). Aussi, un seul cycle d'itération suffit à rendre symétrique *M* à 10^{-10} près. L'exemple plus général qui serait de plusieurs couches d'éléments nécessite un temps plus long pour obtenir la symétrie de la matrice (cf. Annexe B).

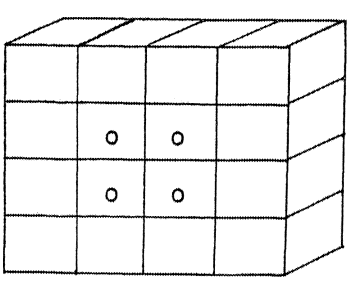
3.7 SOUS-PROGRAMME TRANSLATION-TRANS 1

Le sous-programme TRANSLATION cherche à amener en coïncidence les centres des faces à ajuster. Cette quantité de translation est déduite de la minimisation de la déviation par rapport au vecteur translation de l'élément central *I* (cf. annexe A). A nouveau,neuf cas sont à considérer de la même façon que pour le sous-programme MATM.

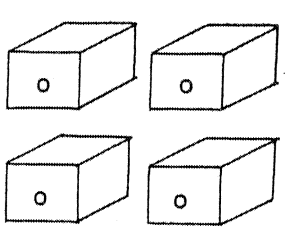
Afin d'accélérer la rapidité du processus, on introduit TRANS 1 qui recherche une nouvelle position de l'élément central *I* par rapport à deux éléments.

3.8 SOUS-PROGRAMME TEST

Ce sous-programme sert de test d'arrêt aux diverses itérations (rotations, translations) On calcule tout d'abord la somme des carrés des distances entre les noeuds des éléments à partir du premier élément entouré par quatre voisins jusqu'au dernier élément dans le même cas. (Fig.C9)



a



b

Fig.C9 - a : réseau d'éléments finis : les éléments de bordure n'interviennent pas dans le calcul de SUM

b : dans ce cas particulier, seuls les 4 éléments centraux sont utilisés pour le calcul de SUM.

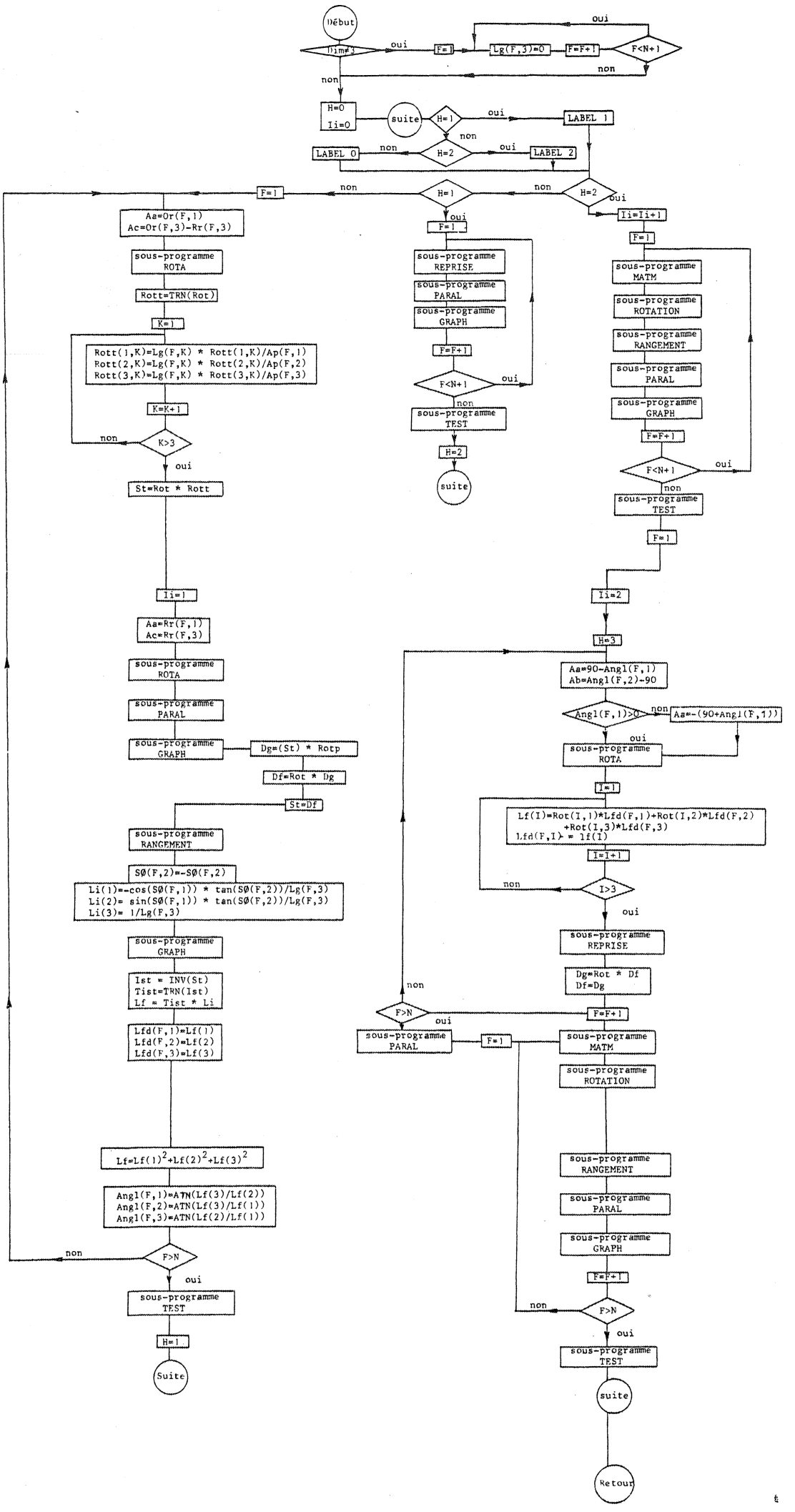
Ceci est fait dans l'état déformé *Sum(1)*, dans l'état non déformé sans ajustement *Sum (2)* et, enfin dans l'état non déformé avec ajustement *Sum (3)*. D'autre part, on évalue la superficie initiale du domaine *Surf*.

Le rapport $\frac{SUM}{SURF} < 0.01$ signifie l'arrêt du programme.

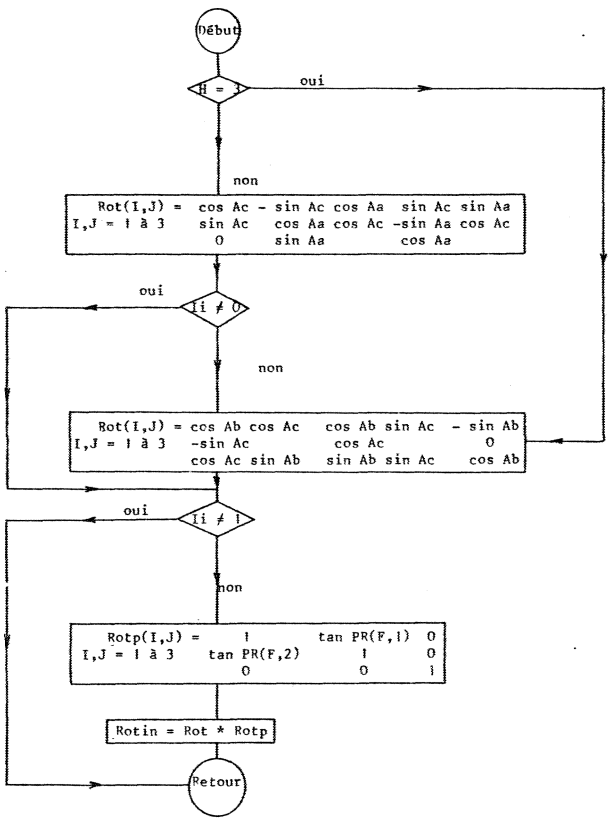
ORGANIGRAMMES

ORGANIGRAMME DU PROGRAMME PRINCIPAL

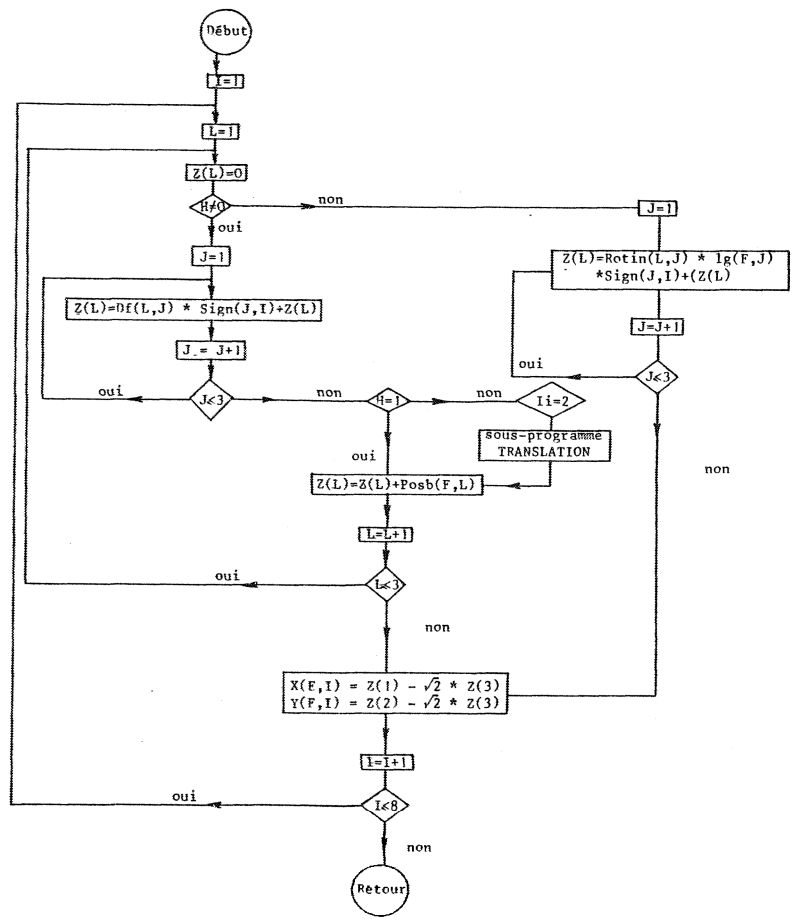
TRN *matrice transposée*
INV *matrice inverse*
ATN *arc tangente.*


Début
Dim≠3
oui
F=1
Lg(F,3)=0
F=F+1
F<N+1
non
H=0
Ii=0
suite
H=1
LABEL 1
LABEL 0
H=2
LABEL 2
F=1
H=1
H=2
Ii=Ii+1
Aa=Or(F,1)
Ac=Or(F,3)-Rr(F,3)
sous-programme ROTA
Rott=TRN(Rot)
K=1
Rott(1,K)=Lg(F,K) * Rott(1,K)/Ap(F,1)
Rott(2,K)=Lg(F,K) * Rott(2,K)/Ap(F,2)
Rott(3,K)=Lg(F,K) * Rott(3,K)/Ap(F,3)
K=K+1
K>3
St=Rot * Rott
Ii=1
Aa=Rr(F,1)
Ac=Rr(F,3)
sous-programme PARAL
sous-programme GRAPH
Dg=(St) * Rotp
Df=Rot * Dg
St=Df
sous-programme RANGEMENT
SØ(F,2)=-SØ(F,2)
Li(1)=-cos(SØ(F,1)) * tan(SØ(F,2))/Lg(F,3)
Li(2)= sin(SØ(F,1)) * tan(SØ(F,2))/Lg(F,3)
Li(3)= 1/Lg(F,3)
Ist = INV(St)
Tist=TRN(Ist)
Lf = Tist * Li
Lfd(F,1)=Lf(1)
Lfd(F,2)=Lf(2)
Lfd(F,3)=Lf(3)
Lf=Lf(1)²+Lf(2)²+Lf(3)²
Angl(F,1)=ATN(Lf(3)/Lf(2))
Angl(F,2)=ATN(Lf(3)/Lf(1))
Angl(F,3)=ATN(Lf(2)/Lf(1))
F>N
sous-programme TEST
H=1
Suite
sous-programme REPRISE
sous-programme PARAL
sous-programme GRAPH
F=F+1
F<N+1
sous-programme TEST
H=2
suite
sous-programme MATM
sous-programme ROTATION
sous-programme RANGEMENT
sous-programme PARAL
sous-programme GRAPH
F=F+1
F<N+1
sous-programme TEST
F=1
Ii=2
H=3
Aa=90-Angl(F,1)
Ab=Angl(F,2)-90
Angl(F,1)>0
Aa=-(90+Angl(F,1))
sous-programme ROTA
I=1
Lf(I)=Rot(I,1)*Lfd(F,1)+Rot(I,2)*Lfd(F,2)
+Rot(I,3)*Lfd(F,3)
Lfd(F,I) = lf(I)
I=I+1
I>3
sous-programme REPRISE
Dg=Rot * Df
Df=Dg
F>N
F=F+1
sous-programme PARAL
F=1
sous-programme MATM
sous-programme ROTATION
sous-programme RANGEMENT
sous-programme PARAL
sous-programme GRAPH
F=F+1
F>N
sous-programme TEST
suite
Retour

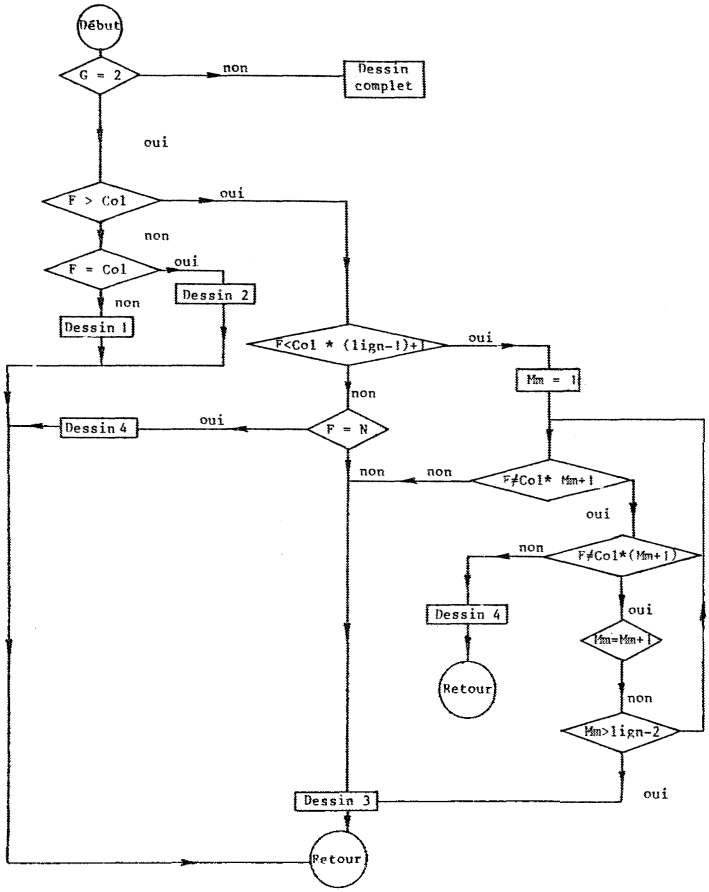
sous-programme ROTA (1)



SOUS-PROGRAMME PARAL (2)

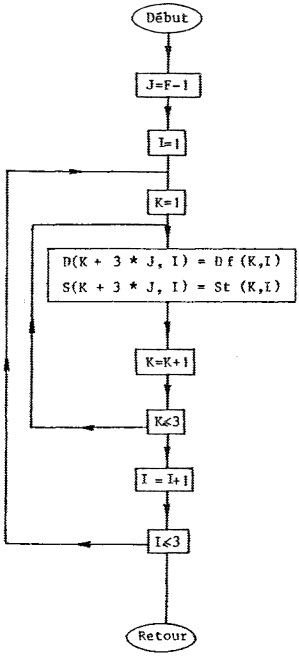


SOUS-PROGRAMME GRAPH (3)

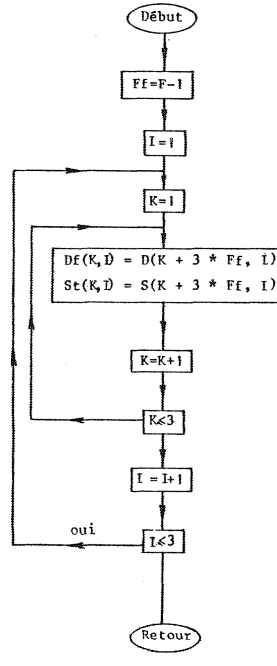


SOUS PROGRAMMES RANGEMENT
REPRISE (4)

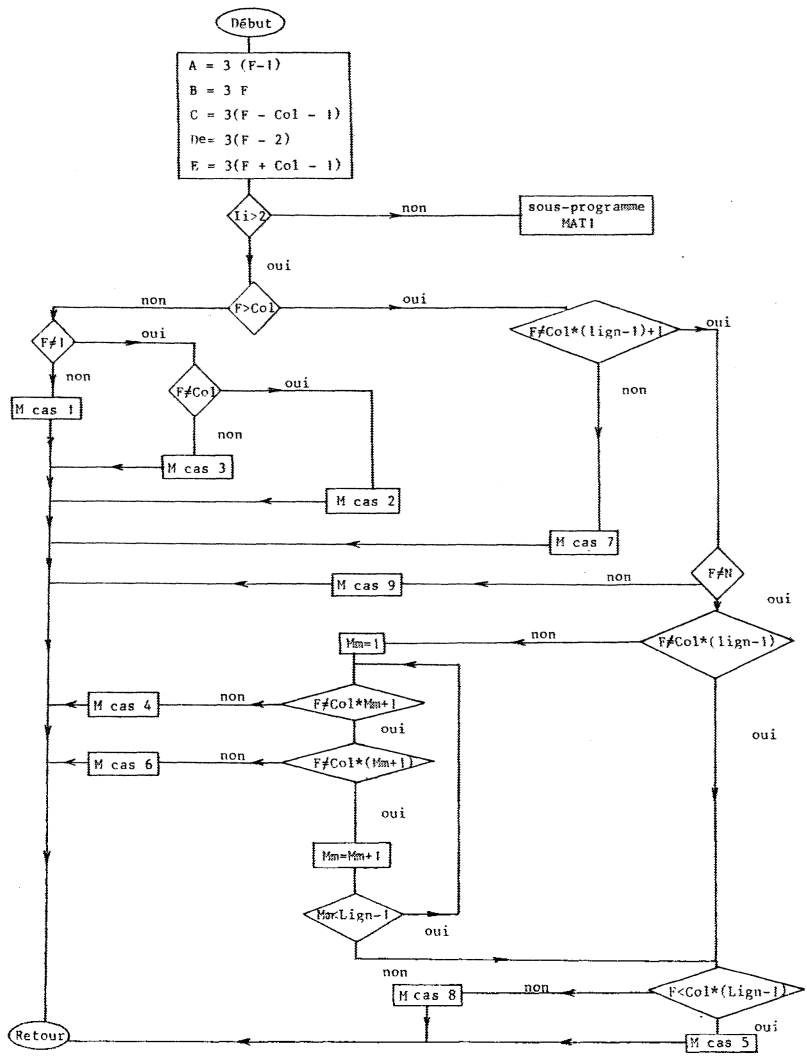
SOUS-PROGRAMME RANGEMENT



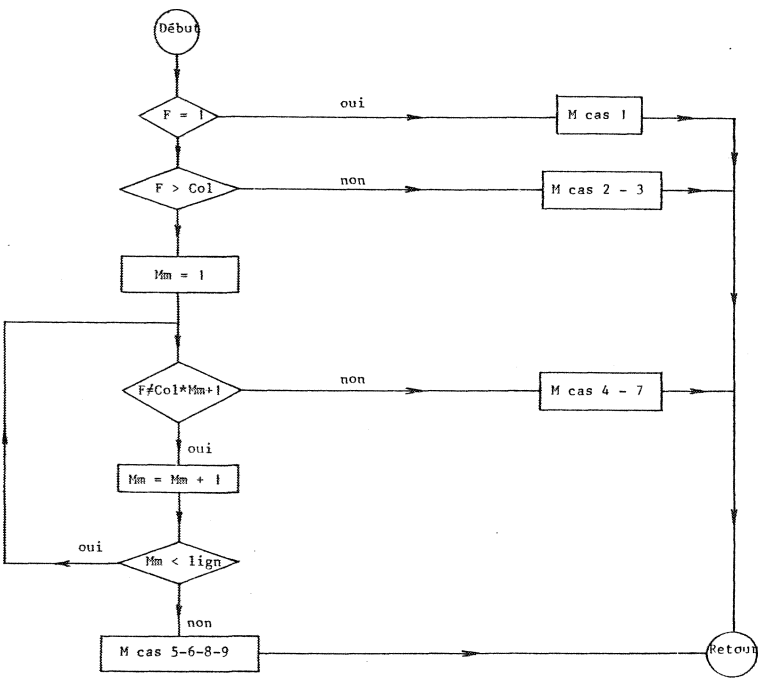
SOUS-PROGRAMME REPRISE



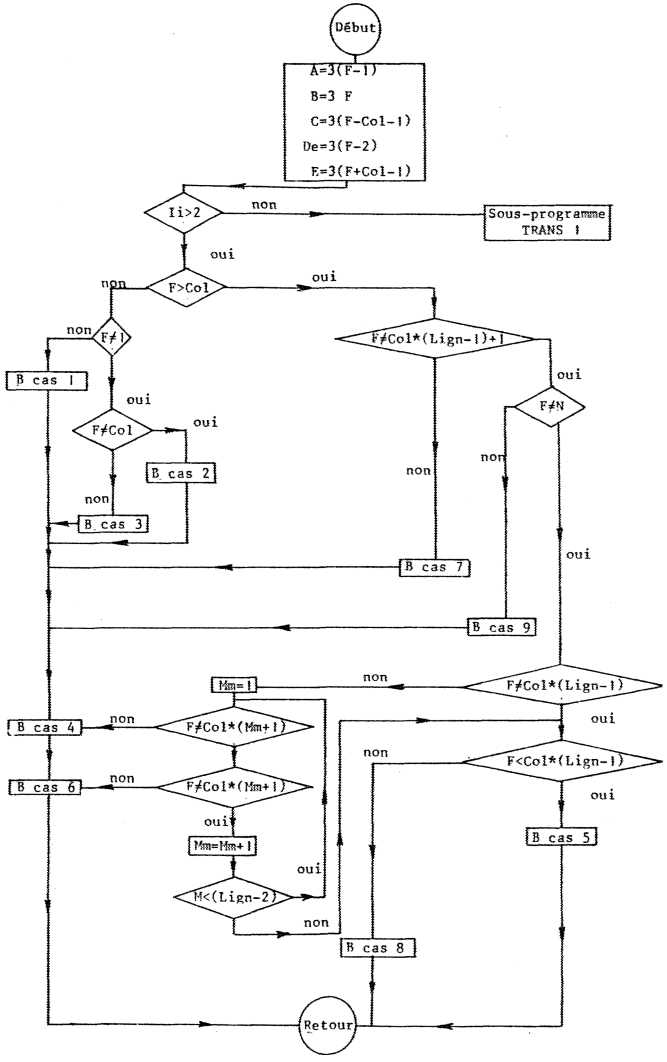
SOUS-PROGRAMME MATM (5)



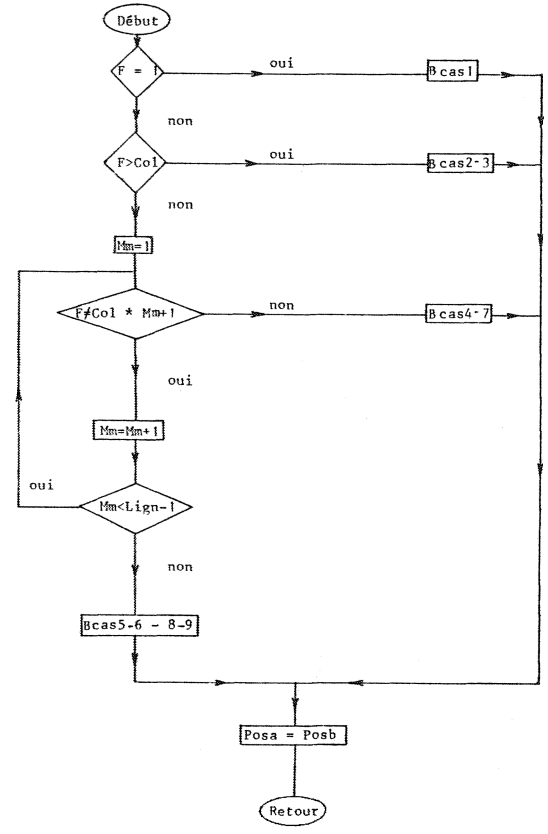
SOUS-PROGRAMME MAT I (5bis)



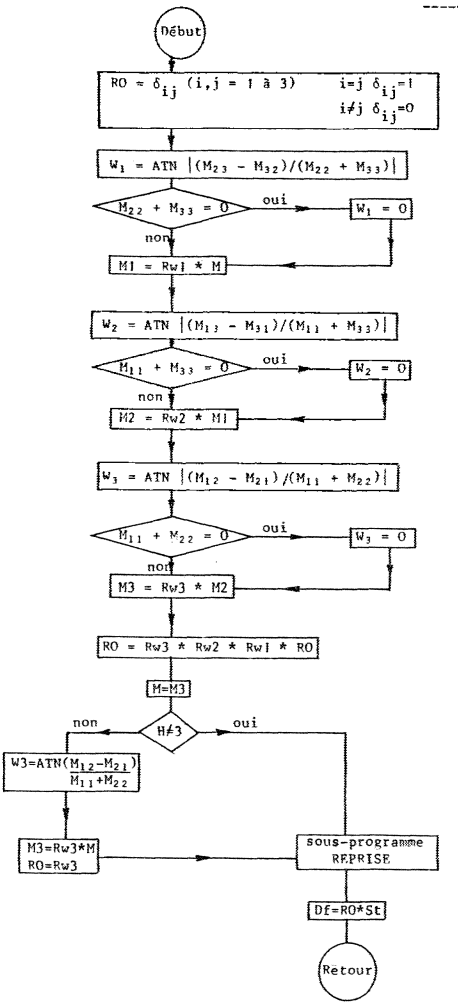
SOUS-PROGRAMME TRANSLATION (7)



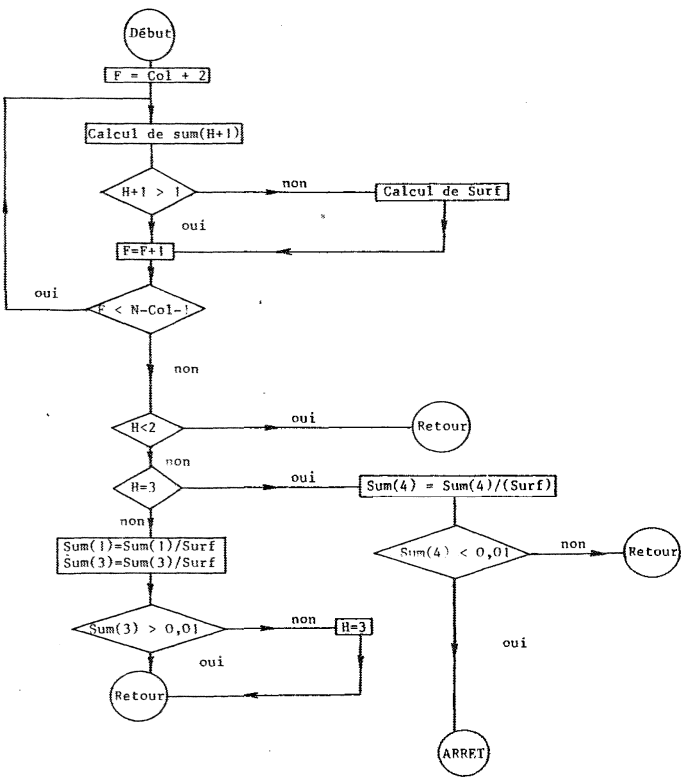
SOUS-PROGRAMME TRANS 1 (7bis)



SOUS-PROGRAMME ROTATION (6)



SOUS-PROGRAMME TEST (8)



Voici le pire
J'avais une idée
Pour vous en parler
Et tout en parlant
Je l'ai laissé filer
Bon Dieu quelle histoire
Me voilà stupide
Devant vous Monsieur
N'ayant rien à dire
Je vais m'en aller
Que s'est-il passé ?
Que s'est-il passé ?

Fleuve caché

de Jean TARDIEU

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BERTHE, D. 1979. - Le cisaillement sud-armoricain dans la région de Saint-Jean-Brevelay (Morbihan). Analyse de la déformation cisaillante. *Thèse de 3ème cycle*, Rennes, 150p.

BERTHE, D., CHOUKROUNE, P. & JEGOUZO, P. 1979. - Orthogneiss, mylonite and non coaxial deformation of granite : the example of the South Armorican Shear Zone. *Journ. Struct. Geol.*, 1 : 31-42.

BOUCHEZ, J.L. & BLAISE, J. 1976. - Une structure hercynienne liée à un accident ductile : l'anticlinal de Lanvaux, les Ponts-de-Cé, aux environs d'Angers (Massif armoricain). *Bull. Soc. Geol. Fr.*, 7, XVIII : 145-157.

CHAUVEL, J.J., ROBARDET, M. & LEFORT, J.P. 1979. - Massif armoricain. *Bull. Soc. Geol. Min. Bret.* XI (1-2) : 1-191.

CLOSS, E. 1947. - Oolite deformation in the south mountain fold, Maryland. *Bull. Geol. Soc. Am.*, 58 : 843-918.

COBBOLD, P.R. 1977 a. - Compatibility equations and the integration of finite strains in two dimensions. *Tectonophysics*, 39 : 1-6.

COBBOLD, P.R.1977 b. - Description and origin of banded deformation structures. I . Régional strain, local perturbations and deformation bands. *Can. Journ. Earth Sci.*, 14 (8) : 1721-1731.

COBBOLD, P.R. 1979. - Removal of finite deformation using strain trajectories. *Jour. Struct. Geol.*, 1 : 67-72.

COBBOLD, P.R. 1980. - Compatibility of two dimensional strains and rotations along strain trajectories. *Jour. Struct. Geol.*, 2 (3) : 379-382.

COBBOLD, P.R.& PERCEVAULT, M.N. 1981. - Strain removal in two or three dimensions : theory and regional applications. *Ann. Meet. Tectonic studies Group., Keele.*

COBBOLD, P.R. & PERCEVAULT, M.N. 1982 a. - Spatial integration of strains using finite elements. *Jour. Struct. Geol. (sous presse).*

COBBOLD, P.R. & PERCEVAULT, M.N. 1982 b. - Spatial integration of strain using finite elements. *Table ronde int. du C.N.P.S., Rennes.*

COGNÉ, J. 1977. - La chaîne hercynienne Ouest-européenne correspond-elle à un orogène par collision ? Propositions pour une interprétation géodynamique globale. *In Coll. Intern. C.N.R.S., géologie de l'Himalaya*, 268.

CRAMBERT, S. 1981. - Déformation totale dans les schistes rouges cambro-trémadociens de Bretagne centrale. *DEA, Rennes*, 31 p.

DIXON, J.M. 1975. - Finite strain and progressive deformation in models of diapiric structures. *Tectonophysics*, 28 : 89-124.

DUNNET, D. 1969. - A technique of finite strain analysis using elliptical particules. *Tectonophysics*, 7 (2) : 117-136.

ETCHECOPAR, A. 1974. - Simulation par ordinateur de la déformation progressive d'un agrégat polycristallin. *Thèse de 3ème cycle, Nantes*, 135 p.

ETCHECOPAR, A. 1977. - A plane kinematic model of progressive deformation in a polycristalline aggregate. *Tectonophysics*, 39 : 121-139.

FLINN, D. 1962. - On folding during three dimensional progressive deformation. *Quart. Jour. Geol. Soc. London*, 118 : 385-433.

GAPAIS, D. 1979. - Deformation progressive d'un quartzite dans une zone plissée (segment hercynien de Bretagne centrale). *Bull. Mineral.*, 102 : 249-264.

GAPAIS, D.& LE CORRE, C. 1980. - Is the hercynian belt of Brittany a major shear zone ? *Nature*, 288 : 574-576.

GRIOLI, G. 1940. - Una propietà di minimo nella cinematica delle deformazioni finite. *Bull. Un. Matematica Italiana*, 2 : 452-455.

HANMER, S.K.,LE CORRE, C. & BERTHE, D. 1980. - Cadomian or Hercynian main deformation in central Brittany ? The hercynian granites reply !. *In ROACH R.A. (Ed) Conference Report, Jour. of The Geol. Soc.*, 137 : 213-218.

HOSSACK, J.R. 1978. - The correction of stratigraphic sections for tectonic finite strain in the Bygdin area, Norway. *Jour. Geol. Soc. Lond.*, 135 : 229-244.

JEGOUZO, J. 1979. - The south-american shear zone. *Int. conference on shear zones in rocks, Barcelone, Jour. Struct. geol.*, 2 (1-2) : 39-47.

LE CORRE, C., CHAUVEL, J.J. 1970. - Etude des relations entre le Briovérien et le Paléozoïque. *Bull. Soc. Geol. Mineral. Bretagne.*, C (I) : 85-92.

LE CORRE, C. & LE THEOFF, B. 1976. - Zonéographie de la déformation finie, de la fabrique et du métamorphisme dans un segment de la chaîne hercynienne. *Bull. Soc. Geol. Fr.*, 7 (18) : 1435-1442.

LE CORRE, C. 1977. - Le Briovérien de Bretagne centrale : essai de synthèse lithologique et structurale. *Bull. B.R.G.M.*, 2 (1-3) : 219-254.

LE CORRE, C. 1978. - Approche quantitative des processus synschisteux. L'exemple du segment hercynien de Bretagne centrale. *Thèse d'état, Rennes*, 381 p.

LE THEOFF, B. 1977. - Marqueurs ellipsoïdaux et déformation finie. Applications aux synclinaux de Bretagne centrale et aux "mantled gneiss domes" de Kuopio (Finlande). *Thèse de 3ème cycle, Rennes*, 96 p.

LOPEZ-MUNOZ, M. 1980. - Etude géologique de la région de Châteaubriant. *D.E.A., Rennes*, 32 p.

LOPEZ-MUNOZ, M. 1981. - Analyse structurale de la partie centrale du synclinorium de Saint-Julien-de-Vouvantes et de l'axe Lanvaux-les-Ponts-de-Cé (Massif armoricain). *Bull. Soc. Geol. Mineral. Bret.*, C, XIII (2) : 117-123.

MATTE, Ph.& RIBEIRO, A. 1975. - Forme et orientation de l'ellipsoïde de déformation dans la virgation hercynienne de Galice. Relations avec le plissement et hypothèses sur la genèse de l'arc ibéro-armoricain. *C.R. Acad. Sci. Paris*, D280 : 2825-2828.

OERTEL, G. 1974. - Unfolding of an antiform by reversal of observed strains. *Bull. Geol. Soc. Am.* 85 : 445-450.

OUALI, J.& CHOUKROUNE, P.- Cisaillement ductile sud-armoricain et structures discontinues associées : mise en évidence de la déformation non coaxiale régionale. (en préparation).

OWENS, W.H. 1973. - Strain modifications of angular density distributions. *Tectonophysics*, 16 : 249-261.

PERCEVAULT, M.N.& COBBOLD, P.R. 1980. - Les résultats de la déformation inverse démontrent-ils l'existence d'une déformation cisaillante transcurrente sud-armoricaine ?. *Rêun. Ann. Sci. Terre, Marseille*, 275 .

PERCEVAULT, M.N. 1981. - Une méthode de dé-déformation en trois dimensions. *Terra Cognita, Spec. Iss., First. Strasbourg Meet.*, 62 .

PERCEVAULT, M.N.& COBBOLD, P.R. 1982 a. - Mathematical removal of regional ductile strains in central Brittany : Evidence for wrench tectonics. *Tectonophysics*, 82 : 317-328.

PERCEVAULT, M.N. 1982 b. - Détermination de régimes de déformation par déformation inverse (strain removal). *Rêun. Ann. Sci. Terre, Paris*, 500 .

PERCEVAULT, M.N.1982 c. - Examples of strain removal using finite elements. *Table ronde intern. du C.N.R.S., Rennes.*

PERCEVAULT, M.N. 1982 d. - A program for strain removal using finite elements. *Table ronde intern. du C.N.R.S., Rennes.*

PERCEVAULT, M.N. 1982 e. - Détermination des rotations rigides lors de la déformation inverse. *(en préparation).*

PIVETTE, B. 1978. - Le synclinorium de Saint-Georges-sur-Loire : sa place dans l'évolution géodynamique de la Bretagne méridionale au Paléozoïque. *Thèse de 3ème cycle, Rennes*, 108 p.

RAMSAY, J.G. 1967. - Folding and fracturing of rocks. *Mc Graw-Hill, New-York*, 568 p.

SCHWERDTNER, W.M. 1977. - Geometric interpretation of regional strain analyses. *Tectonophysics*, 39 : 515-531.

SIDDANS, A.W.B., HENRY, B., KLIGFIELD, R., LOWRIE, W., HIRT, A., PERCEVAULT, M.N. - Finite strain patterns and their significance in permian rocks of the Alpes maritimes (France). soumis *au Jour. Struct. Geol.*

TRUESDELL, C. & TOUPIN, R. 1960. - The classical field theories. *Handbuch der Physik*, 3 (1) : 226-793. *S. Flüügge (ed.), Springer-Verlag, Berlin.*

VIGNERESSE, J.L. 1978. - Gravimétrie et granites armoricains: structure et mise en place de granites hercyniens. *Thèse de 3ème cycle, Rennes*, 91 p.

WATTERSON , J. 1968. - Homogeneous deformation of the gneiss of Vesterland, southwest Greeland. *Grøn. Geol. Undersoø. Bull.*, 78.

WILCOX , R.E. HARDING, T.P. & SEELY, D.R.. 1973. - Basic wrench tectonics. *Am. Assoc. Geol. Bull.*, 57 : 74-96.

UNIVERSITE DE RENNES
BIBLIOTHÈQUE
INSTITUT DE GÉOLOGIE

