

# Apports des méthodes fréquentielle et temporelle dans l'étude des instabilités de frottement responsables du crissement

A. Meziane, Laurent Baillet, Bernard Laulagnet, Yves Berthier

► **To cite this version:**

A. Meziane, Laurent Baillet, Bernard Laulagnet, Yves Berthier. Apports des méthodes fréquentielle et temporelle dans l'étude des instabilités de frottement responsables du crissement. The fifth European Conference on Braking JEF 2006, 2006, Lille, France. pp. 8. insu-00355498

**HAL Id: insu-00355498**

**<https://hal-insu.archives-ouvertes.fr/insu-00355498>**

Submitted on 22 Jan 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# APPORTS DES METHODES FREQUENTIELLE ET TEMPORELLE DANS L'ETUDE DES INSTABILITES DE FROTTEMENT RESPONSABLES DU CRISSEMENT

## MODAL AND TEMPORAL APPROACHES CONTRIBUTIONS TO THE STUDY OF FRICTION-INDUCED VIBRATIONS RESPONSIBLE FOR SQUEAL

**Anissa MEZIANE<sup>1</sup>, Laurent BAILLET<sup>2</sup>,  
Bernard LAULAGNET<sup>3</sup>, Yves BERTHIER<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> *Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides, INSA-Lyon 20, Avenue Albert Einstein  
69621 Villeurbanne, France*

<sup>2</sup> *Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, Université Joseph Fourier-CNRS, B.  
P. 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France*

<sup>3</sup> *Laboratoire de Vibrations Acoustique, INSA-Lyon 20, Avenue Albert Einstein 69621  
Villeurbanne, France*

*E-mail: [anissa.meziane@insa-lyon.fr](mailto:anissa.meziane@insa-lyon.fr)*

### Résumé

Pour modéliser et comprendre le phénomène d'instabilités induites par frottement, les approches temporelle et fréquentielle sont comparées dans cet article. Cette analyse est effectuée à partir d'un système modèle constitué de deux poutres en contact frottant. L'approche fréquentielle consiste à calculer les valeurs propres du système couplé par frottement. L'instabilité se manifeste par la coalescence de deux modes. Plusieurs modes sont potentiellement instables. L'approche temporelle, quant à elle, donne l'évolution des quantités en fonction du temps. L'instabilité se manifeste par l'apparition de zones d'adhérence ou de décollement au niveau du contact. Cette approche permet d'obtenir la ou les fréquences qui caractérisent l'instabilité. Les résultats issus des deux approches sont cohérents et complémentaires.

### Abstract

In order to model and understand friction-induced vibration phenomenon, two approaches are compared in this article: temporal approach and modal approach. This analysis has been made on a simplified system composed of two beams in contact. Modal approach consists in calculating eigenvalues of the friction coupled system. Instabilities appear when a pair of modes merges. Eigenvalues with positive real parts are identified as potentially unstable modes. Temporal approach calculates the evolution of displacements, velocities, accelerations, forces ... One speaks about instabilities when stick or separation zones appear in the contact surfaces. With this approach frequencies which are excited during instability are obtained. Results have been compared and both methods give coherent and complementary results.

## 1. Introduction

Les instabilités de frottement apparaissant à l'interface entre deux corps frottant sont responsables de divers bruits et de concentration de contraintes. Un vaste panorama de la dynamique de vibrations induites par frottement est présenté par Ibrahim [IBR.94a-IBR.94b]. Akay [AKA.02] présente une vue d'ensemble de l'acoustique du frottement. L'étude numérique de ces vibrations se fait essentiellement par deux types d'approches : l'approche fréquentielle et l'approche temporelle. Dans l'approche fréquentielle, les modes et valeurs propres du système couplé constitué par les deux corps en contact sont calculés. L'instabilité, caractérisée par la coalescence de deux modes qui deviennent complexes, est appelée instabilité par flottement. Les différents modèles développés montrent que l'apparition d'instabilités peut être le résultat d'un ou plusieurs phénomènes. Pour comprendre la dynamique locale de contact [BAI.05], l'approche fréquentielle ne permet pas de connaître le comportement du système pendant l'instabilité. En revanche, l'approche temporelle permet l'étude de l'évolution des grandeurs mécaniques (contraintes, déformations) en fonction du temps. Cette approche non linéaire permet de mettre en évidence, suivant les systèmes étudiés, des comportements instables harmoniques ou parfois chaotiques. L'objectif de cet article est de présenter et de confronter ces deux approches. La complexité du phénomène d'instabilité de frottement mêlée à celle du système étudié rend souvent difficile l'interprétation des résultats obtenus. C'est pourquoi un système modèle (Fig. 1) a été choisi pour cette étude.

## 2. Modélisation et approches numériques utilisées

### 2.1. Equations de mouvement du système sans contact

Le système étudié est constitué de deux poutres en contact ponctuel (Fig. 1 et 2). La poutre 2 est encadrée libre. La poutre 1 a une extrémité bloquée en  $x$  et en rotation et l'autre en contact avec la poutre 2. Une vitesse  $V$  suivant  $x$  est imposée à la poutre 2 au niveau de l'encastrement et la poutre 1 est maintenue en contact sur la poutre 2 par la force  $F$  appliquée suivant  $y$ .  $\beta$  désigne l'angle de la poutre 1 par rapport à la verticale.

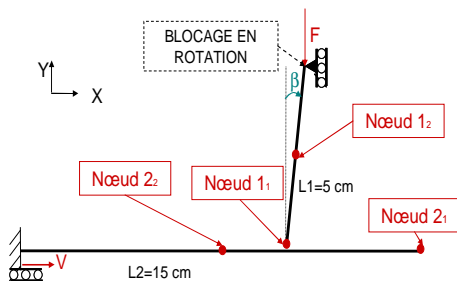


Fig. 1 : Système étudié  
Studied system

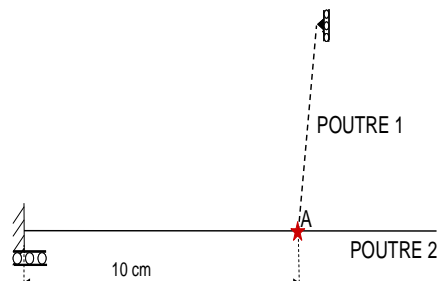


Fig. 2 : Point de contact initial A  
Initial contact point A

La méthode des éléments finis est appliquée au système pour les deux approches utilisées dans cet article. Les éléments considérés sont des poutres de Bernoulli en

flexion et traction-compression (3 degrés de liberté par noeud). On se place dans les hypothèses des éléments finis linéaires de poutres, (petites rotations et petites déformations). Les équations de mouvement, via le principe des travaux virtuels, sont transformées en un système matriciel linéaire :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1)$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement proportionnelle de Rayleigh ( $\mathbf{C} = \alpha_1\mathbf{M} + \alpha_2\mathbf{K}$ ) et de raideur.  $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$  sont respectivement les vecteurs de déplacements nodaux, de vitesses nodales et d'accéléérations nodales.  $\mathbf{f}$  est le vecteur des forces extérieures nodales.

## 2.2. Approche fréquentielle

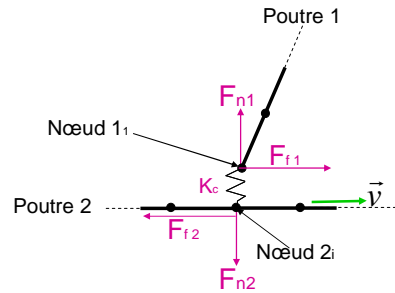


Fig. 3 : Gestion du contact dans l'approche fréquentielle  
Contact for modal approach

Le principe de cette approche est de calculer les valeurs et vecteurs propres du système matriciel (1) en intégrant les forces de contact. On suppose que les deux poutres sont en équilibre glissant régi par une loi de Coulomb sans régularisation. Un ressort de raideur  $K_c$  est introduit entre les deux nœuds en contact (Fig. 3) et les deux nœuds en contact sont supposés comme étant cinématiquement glissants. Les forces normale et tangentielle peuvent donc être exprimées en fonction du coefficient de frottement de Coulomb, de la raideur du ressort et des déplacements nodaux. On obtient ainsi l'équation suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \lambda^{\bar{n}}(\mathbf{u}) + \lambda^{\bar{t}}(\mathbf{u}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^c \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2)$$

où  $\lambda^{\bar{n}}(\mathbf{u})$  et  $\lambda^{\bar{t}}(\mathbf{u})$  sont respectivement les vecteurs nodaux des forces normales et tangentielles de contact et  $\mathbf{K}^c$  la matrice de raideur du système incluant les forces de contact. Pour effectuer l'étude modale du système, on pose  $\mathbf{y} = \{\mathbf{u} \quad \dot{\mathbf{u}}\}^T$  et (2) devient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \text{soit} \quad \mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (3)$$

En posant  $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} \exp(rt)$ , (3) devient  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\bar{\mathbf{y}} = -r\bar{\mathbf{y}}$ . Ainsi, les valeurs propres  $\varphi_i$  de  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  sont les racines du problème vibratoire, complexes et conjuguées deux à deux :

$$r_i = -\varphi_i = -\varepsilon_i \omega_i + j \omega_i \sqrt{1 - \varepsilon_i^2} \quad (4)$$

où  $\varepsilon_i$  est le taux d'amortissement,  $\omega_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  pulsation propre du système. Lorsque  $\varepsilon_i$  est négatif, on a une croissance exponentielle en  $y$  et le système est dit instable.

### 2.3. Approche temporelle

Cette approche permet de calculer les différentes valeurs de déplacements, vitesses et accélérations aux différents nœuds, ainsi que les forces et surfaces de contact au cours du temps. La gestion du contact avec frottement entre les deux corps déformables est réalisée par des algorithmes basés sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange à incrément avant [CAR.91]. L'algorithme de contact est basé sur l'interaction entre les surfaces maîtres (sur la poutre 2) et le nœud esclave (nœud 1<sub>1</sub> appartenant à la poutre 1). Les segments maîtres élémentaires sont décrits par deux nœuds et approximées par des splines bicubiques de continuité C<sup>1</sup>. La méthode des multiplicateurs de Lagrange à incrément avant est construite à partir des équations de mouvement (via le principe des travaux virtuels) au temps ( $t_n = n\Delta t$ ) augmentées par les contraintes en déplacements imposées au nœud esclave à l'instant  $t_{n+1}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{K}\mathbf{u}_n + \mathbf{G}_{n+1}^T \boldsymbol{\lambda}_n = \mathbf{f}_n \\ \mathbf{G}_{n+1}(\mathbf{x}_n + \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

où  $\boldsymbol{\lambda}_n$  est le vecteur des forces de contact du nœud esclave,  $\mathbf{G}_{n+1}$  est la matrice globale de contraintes en déplacement,  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n$  est le vecteur des coordonnées à l'instant  $t_{n+1}$ . Les équations de mouvement (5) sont ensuite discrétisées en temps. On choisit un schéma explicite. Les vecteurs  $\dot{\mathbf{u}}_n$  et  $\ddot{\mathbf{u}}_n$  sont exprimés à chaque pas de temps à partir du schéma temporel de Newmark de type  $\beta_2$  ( $\beta_2 \in [0.5;1]$ ) :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{u}}_n = \frac{2}{\Delta t^2}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n) \\ \dot{\mathbf{u}}_n = \frac{1}{1+2\beta_2} \left\{ \dot{\mathbf{u}}_{n-1} + \Delta t(1-\beta_2)\ddot{\mathbf{u}}_{n-1} + \frac{2\beta_2}{\Delta t}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) \right\} \end{cases} \quad (6)$$

Pour chaque incrément de temps  $\Delta t$ , les nouvelles coordonnées  $\mathbf{x}_{n+1}^* = \mathbf{x}_n + \mathbf{u}_{n+1}^* - \mathbf{u}_n$  des nœuds appartenant à la surface de contact (poutre 1 et 2) sont calculées en supposant que les forces de contact  $\boldsymbol{\lambda}_n$  sont nulles. La matrice  $\mathbf{G}_{n+1}$  est non nulle si le nœud esclave est détecté comme « pénétrant » un segment maître. Cette matrice permet de calculer les forces de contact  $\boldsymbol{\lambda}_n$  et les coordonnées  $\mathbf{x}_{n+1}$  permettant d'éviter que les surfaces de contact s'interpénètrent.

Un algorithme itératif de résolution basé sur la méthode de Gauss – Seidel a été développé pour la résolution du contact. La loi de frottement utilisée est une loi de type Coulomb sans régularisation. Les conditions de contact sont données par:

$$\boldsymbol{\lambda}_n^{\bar{n}} \leq \mathbf{0} \quad (\text{contact si } \boldsymbol{\lambda}_n^{\bar{n}} < \mathbf{0} \text{ et décollement si } \boldsymbol{\lambda}_n^{\bar{n}} = \mathbf{0})$$

$$\|\boldsymbol{\lambda}_n^{\bar{t}}\| \leq \mu \|\boldsymbol{\lambda}_n^{\bar{n}}\|$$

- si  $\|\boldsymbol{\lambda}_n^{\bar{t}}\| < \mu \|\boldsymbol{\lambda}_n^{\bar{n}}\|$ ,  $v_t = 0$  (adhérence)
- si  $\|\boldsymbol{\lambda}_n^{\bar{t}}\| = \mu \|\boldsymbol{\lambda}_n^{\bar{n}}\|$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_n^{\bar{t}} \cdot v_t \leq 0$  (glissement)

où  $v_t$  est la vitesse relative tangentielle des nœuds esclaves liés à la surface maître,  $\bar{n}$  et  $\bar{t}$  sont les vecteurs normaux et tangentiels respectivement qui définissent le contact.

### 3. Résultats

#### 3.1. Système étudié

Les caractéristiques du système étudié figurent dans le tableau 4. Dans les simulations présentées, le contact entre les deux poutres s'effectue au point A (Fig. 2). L'angle  $\beta$  est fixé à  $5^\circ$ .

	Poutre 1	Poutre 2
Longueur x Largeur x Epaisseur ( $m^3$ )	0.05x0.01x0.0015	0.15x0.015x0.003
Module d'Young (GPa)	200	200
Masse volumique ( $kg/m^3$ )	7800	7800
Paramètre $\alpha_1$ et $\alpha_2$ (Amortissement)	$\alpha_1 = 50$ et $\alpha_2 = 1^e-7$	$\alpha_1 = 50$ et $\alpha_2 = 1^e-7$
Nombre d'éléments	30	90

Tab. 4 : Données du système étudié  
Data input of the system

#### 3.2. Approche fréquentielle

L'instabilité se manifeste par une ou plusieurs coalescences de deux modes en fréquence (partie imaginaire de la valeur propre). Parallèlement, une des deux valeurs propres contient une partie réelle positive. La figure 5 présente l'étude fréquentielle du système en fonction du coefficient de frottement. Pour des coefficients de frottement compris entre 0 et 0.5, on observe trois coalescences de modes (8 636Hz, 16 688Hz, 28 820Kz) à des coefficients de frottement différents, donc trois fréquences potentiellement instables.

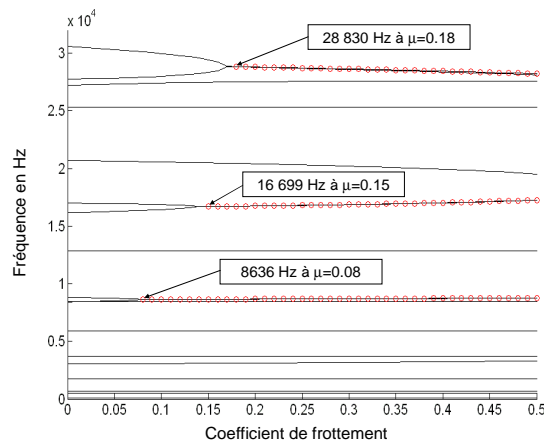


Fig. 5 : Evolution des 18 premières fréquences du système couplé par frottement en fonction du coefficient de frottement.  $\circ$  Fréquences avec une partie réelle positive  
Evolution of the 18 first frequencies of the coupled system versus friction coefficient.  $\circ$  Eigenvalues with positive real part

Le tableau 6, présentant les fréquences des poutres seules et couplées à  $\mu=0$ , met en évidence que la coalescence de deux fréquences s'effectue pour des fréquences à  $\mu=0$  proches. De plus, la forme (non présentée ici) des deux modes correspondant à  $\mu=0$  est

similaire. A titre d'exemple, les modes à 8427 Hz et 8809 Hz sont tous deux une combinaison du troisième mode de flexion (F3) de la poutre 1 et du sixième mode de flexion (F6) de la poutre 2, couplé à de la traction. La différence est un déphasage de  $180^\circ$  entre les deux modes concernés. Pour le système étudié, il y a donc deux conditions pour obtenir une coalescence entre deux modes. Ils doivent à la fois être proches en fréquence et avoir une forme similaire à  $\mu=0$ .

Poutre 1	Poutre 2	Mode couplé à $\mu = 0$	
0 (mode de corps rigide)	109 Hz (F1)	102 Hz	
492 Hz (F1)	683 Hz (F2)	489 Hz	
		660 Hz	
	1913 Hz (F3)	1780 Hz	
3077 Hz (F2)	3750 Hz (F4)	<b>3030 Hz</b>	} Instable à $\mu=0.81$ $f= 3621$ Hz
		<b>3733 Hz</b>	
	6200 Hz (F5)	5935 Hz	
	8840 Hz (T1)	8440 Hz	
8614 Hz (F3)	9261 Hz (F6)	<b>8427 Hz</b>	} Instable à $\mu = 0.08$ $f= 8636$ Hz
		<b>8809 Hz</b>	
	12935 Hz (F7)	12870 Hz	
16878 Hz (F4)	17222 Hz (F8)	<b>16163 Hz</b>	} Instable à $\mu = 0.23$ $f= 16688$ Hz
		<b>16988 Hz</b>	
	22122 Hz (F9)	20700 Hz	
	25533 Hz (T2)	25325 Hz	
27898 Hz (F4)	27636 Hz (F10)	<b>27764 Hz</b>	} Instable à $\mu = 0.13$ $f= 28820$ Hz
		<b>30617 Hz</b>	

Tab. 6 : Fréquences propres des deux poutres prises indépendamment l'une de l'autre et couplé  $\mu=0$ . ( $F_i = i^{\text{ème}}$  mode de flexion et  $T_i = i^{\text{ème}}$  mode de traction).

*Eigenfrequencies of each beam and eigenfrequencies of friction- coupled system at  $\mu=0$ . ( $F_i = i^{\text{ème}}$  bending mode and  $T_i = i^{\text{ème}}$  longitudinal mode).*

### 3.3. Approche temporelle

Force appliquée (F)	20 N
Vitesse imposée (V)	0.02m/s
Coefficient de frottement de Coulomb ( $\mu$ )	0.1
Pas de temps ( $\Delta T$ )	$2^e-8$ s
Amortissement numérique ( $\beta_2$ )	0.8

Tab. 7 : Paramètres des simulations

*Parameters of the simulations*

Les paramètres de la simulation présentée sont donnés dans le tableau 7. A l'instant initial, les poutres sont immobiles et ne sont pas en contact. La poutre 1 est alors mise en mouvement suivant y par la force F appliquée et les deux poutres entrent en contact (Phase I :  $t \in [0\text{s}; 0,05\text{s}]$ ). Lorsque les deux poutres en contact sont en équilibre statique, on applique une vitesse suivant x à l'encastrement de la poutre 2 (Phase II :  $t \in [0,05\text{s}; 0,2\text{s}]$ ).

Le phénomène d'instabilité en temporel se traduit par un phénomène de vibrations auto-entretenues du système. La figure 8 présente les variations de l'accélération selon  $x$  du nœud esclave en fonction du temps pendant les deux phases de simulation. Lors de la première phase, on observe des oscillations évanescentes de l'accélération ( $t \in [0s ; 0,05s]$ ) correspondant à la mise en contact des deux poutres. Lors de la deuxième phase, l'amplitude de l'accélération croît de façon exponentielle puis tend à se stabiliser. La transformée de Fourier de l'accélération selon  $x$  des différents nœuds (Fig. 9) révèle une périodicité en fréquence. La fréquence fondamentale est de 8 700 Hz. Pour cette fréquence, le niveau d'accélération selon  $x$  des quatre nœuds étudiés est compris entre 40 et 55 dB. Les vibrations auto-entretenues se propagent dans les deux poutres.

L'apparition de vibrations auto-entretenues se manifeste par l'apparition d'ondes au niveau du contact : ces ondes peuvent être de différents types [BAI.05]. Dans la simulation présentée, des ondes d'adhérence-glissement à la fréquence de 8 700Hz sont présentes au niveau du nœud esclave. Par conséquent, les conditions locales de contact pendant l'instabilité sont plus sévères que celles imposées globalement : au contact, on a un chargement dynamique dont le maximum est de 27N et une vitesse relative variable qui peut atteindre 0.06m/s.

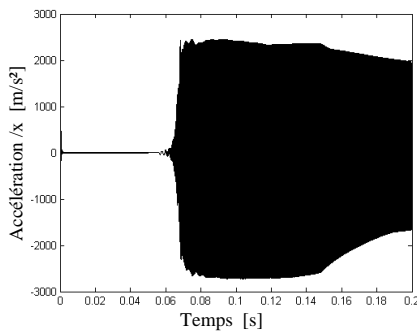


Fig. 8 : Accélération suivant  $x$  en fonction du temps pour le nœud  $1_1$   
*Accélération in  $x$  direction versus time for node  $1_1$*

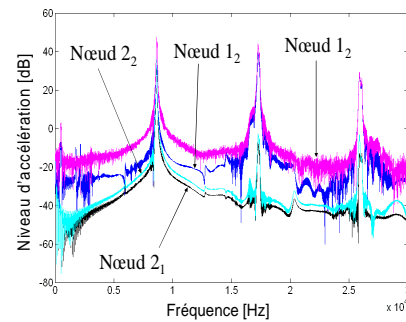


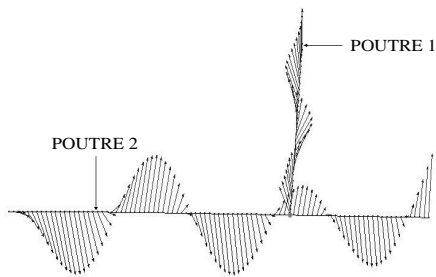
Fig. 9 : FFT de l'accélération suivant  $x$  pour différents nœuds  
*FFT of acceleration in  $x$  direction for different nodes*

### 3.4. Comparaison des résultats des deux approches

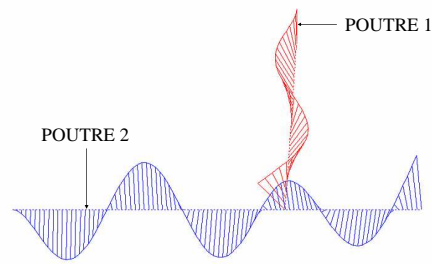
A  $\mu=0,1$ , les deux approches donnent les mêmes résultats : une seule fréquence instable à 8,7 kHz. Les figures 10 et 11 représentent l'allure des modes mis en jeu pour les deux approches (les vecteurs représentés sont les vecteurs vitesses sur la figure 10 et déplacements sur la figure 11). Les modes obtenus sont similaires : les deux poutres ont le même ordre de flexion sur les deux représentations.

Dans notre cas, l'approche temporelle donne des fréquences d'instabilités différentes suivant le coefficient de frottement. A chaque simulation temporelle effectuée, les fréquences d'instabilité correspondent à une des fréquences potentiellement instables obtenues par l'approche fréquentielle. De plus, les deux approches donnent le coefficient de frottement critique d'instabilité à 0,08.





*Fig. 10 : Mode mis en jeu lors de l'instabilité (Approche temporelle)*  
*Mode during instability (Temporal approach)*



*Fig. 11 : Mode n°9 instable (Approche fréquentielle)*  
*Instable mode n°9 (Modal approach)*

## 4. Conclusions

Le système modèle étudié permet de réaliser des études d'instabilités de frottement. Les deux approches fréquentielle et temporelle ont été programmées et comparées. L'approche fréquentielle peut donner plusieurs modes potentiellement instables. Ce phénomène se caractérise par une coalescence de deux modes qui à la fois sont proches en fréquence et ont la même allure. Quant à elle, l'approche temporelle donne la ou les fréquences qui répondent réellement lorsqu'il y a instabilité. Pour le système étudié, des ondes périodiques de type glissement-adhérence, apparaissent au niveau du contact à la fréquence de 8,7kHz. On montre que les deux approches donnent des résultats similaires : les instabilités obtenues par les deux approches mettent en jeu les mêmes fréquences. Les modes mis en jeu sont les mêmes. Pour ce système, le coefficient de frottement critique d'instabilité vaut 0.08 pour les deux approches. La confrontation des résultats obtenus par les deux approches principalement utilisées pour les problèmes d'instabilité de frottement montre qu'elles offrent des résultats cohérents et qu'elles sont complémentaires.

## BIBLIOGRAPHIE

- [BAI.05] L.Baillet, S.D'Errico, Y.Berthier, "*Influence of sliding contact local dynamics on global friction coefficient variation*", Revue Européenne des Eléments Finis, Volume 14 – n° 2-3 (2005) 305 – 322.
- [CAR.91] N.J. Carpenter, R.L. Taylor, M.G. Kantona, "*Lagrange constraints for transient finite element surface contact*", Int. J. Numerical Methods Engineering 32 (1991) 103-128.
- [IBR.94a] R.A.Ibrahim, "*Friction-induced Vibration, Chatter, Squeal, and Chaos, Part I: Mechanics of Contact and Friction*", ASME Applied Mechanics Reviews, Vol 47, (1994) 209-226.
- [IBR.94b] R.A.Ibrahim, "*Friction-induced Vibration, Chatter, Squeal, and Chaos, Part II: Dynamics and Modeling*", ASME Applied Mechanics Reviews, Vol 47 (1994) 227-253.
- [AKA.02] A.Akay, "*Acoustic of Friction*", Acoustic Society of America, (2002) 1525-1548.