Signature d'observables en théories alternatives de la gravitation

A. Hees

▶ **To cite this version:**

A. Hees. Signature d'observables en théories alternatives de la gravitation. Relativité Générale et Cosmologie Quantique [gr-qc]. Université Catholique de Louvain, 2012. Français. NNT : . tel-00764542

HAL Id: tel-00764542
https://theses.hal.science/tel-00764542

Submitted on 13 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Catholique de Louvain
Secteur des Sciences et Technologies
Earth And Life Institute

Signature d'observables en théories alternatives de la gravitation

Dissertation présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences par

Aurélien Hees

Promoteurs :

Pr. V. Dehant (UCL-ROB)
Pr. P. Wolf (SYRTE-Observatoire de Paris)

Membres du Jury :

Pr. M.-L. De Keersmaecker (présidente, UCL)
Pr. A. Füzfa (FUNDP)
Pr. J.-M. Gérard (UCL)
Pr. L. Blanchet (Institut d'Astrophysique de Paris)
Pr. F. Mignard (Observatoire de la Côte d'Azur)
Dr. S. Pireaux (BELSPO)

Louvain-La-Neuve
Novembre 2012

Merci !

"De la discussion jaillit la lumière"
Proverbe indien

Voici quatre années que cette thèse a débuté et c'est avec une certaine émotion que je peux aujourd'hui contempler le chemin parcouru. Il est évident que ce chemin je ne l'ai pas parcouru seul et ce travail est le résultat de rencontres et de collaborations passionnantes.

A ce titre, je désire remercier du fond du coeur Peter Wolf et André Füzfa de m'avoir encadré et soutenu dans ce travail. Je reste persuadé que sans leur rencontre (dans une période relativement délicate où ma thèse me semblait fort mal embarquée), je n'aurais sans doute pas terminé cette thèse. Je remercie donc Peter d'avoir accepté de devenir mon promoteur en plein milieu de ma thèse et d'en avoir assumé les responsabilités. Je le remercie également pour sa disponibilité malgré le fait que son agenda soit plus que surchargé (bien que tenant encore sur un iPad dernière génération) et d'avoir pris le temps de relire intégralement ce manuscrit. Je le remercie également pour ses conseils avisés et pour l'esprit critique dont il aura fait part lors de nos nombreuses discussions : je tiens à dire ici combien j'ai été impressionné à de nombreuses reprises par son intuition physique. En plus de ces aspects scientifiques, sa bonne humeur et son sens de l'humour ont fait de mes visites à Paris des moments privilégiés.

Je tiens à remercier André Füzfa qui, sans avoir le titre de promoteur, m'aura allègrement soutenu durant ces trois dernières années. Je lui dois également ma découverte de la cosmologie qui est finalement devenue une partie intégrante de mon travail de thèse. Ce fut un réel plaisir pour moi que de me déplacer régulièrement à Namur pour profiter de ses conseils et pour discuter "science" avec lui. Sa bonne humeur et son optimisme inébranlable ont fait de nos rencontres des moments très enrichissants tant au point de vue scientifique qu'humain.

Je remercie aussi Véronique Dehant d'avoir été ma promotrice durant ces quatre années et d'avoir accepté de superviser un travail qui est finalement sorti quelque peu des thématiques de recherche standards de l'Observatoire. Je la remercie de m'avoir laissé la liberté de mener ce projet et de m'avoir toujours soutenu avec un optimisme et un enthousiasme à toute épreuve. Je la remercie également pour son soutien plus "administratif" très précieux qui m'a aidé à de nombreuses reprises notamment dans mon obtention d'un post-doctorat.

Je tiens également à adresser toute ma gratitude à Sophie Pireaux qui aura été ma promotrice dans le début de ma thèse et qui n'aura pas pu m'accompagner jusqu'au bout de ce travail qui lui

était cher. C'est certainement grâce à elle que j'aurai débuté cette thèse. Je la remercie également d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse en espérant qu'elle sera agréablement surprise par le travail accompli.

Mes remerciements vont également à mon jury de thèse : au Professeur Marie-Laurence De Keersmaecker qui a accepté de présider ce jury ; au Professeur Jean-Marc Gérard qui aura également fait partie de mon comité d'accompagnement ; à Luc Blanchet et à François Mignard qui me font l'honneur de se déplacer pour ma défense ; à Sophie Pireaux, André Füzfa, Peter Wolf et Véronique Dehant qui m'auront tous les quatre soutenus durant ma thèse.

Merci également à tous mes collègues de l'Observatoire Royal de Belgique qui ont su entretenir une ambiance de travail plus qu'agréable. En particulier merci à Tilio, Mikael, Laurence et Antony pour les pauses café quotidiennes. Grâce à eux, j'aurai été initié aux plaisirs raffinés du café préparé par aéropresse [1]. Je dois avouer que même si je ne parviens pas encore à distinguer le café Ethiopien du café Kényan (honte sur moi), ma perception du café s'est nettement affinée durant ces quatre années. Je remercie également Collin, Maria, Tilio et Ozgür qui auront partagé leur bureau avec moi toujours dans la bonne ambiance. Je les remercie en particulier d'avoir fait un effort pour s'efforcer de toujours arriver après moi le matin. J'ai presque l'impression d'être devenu matinal ! Merci aussi à Lébi, Rose-Marie, Pascal, Sébastien, Gregor, Marie, Alexis, Tim, Pascale, Michel, Wim, Bart pour la bonne ambiance et pour tous les bons moments passés.

Je tiens à remercier tout particulièrement Tilio dont l'aide informatique m'aura été plus que précieuse. Son expérience concernant Latex, le Fortran, les Mac, etc... est sans limite et je le remercie d'avoir partagé ce savoir sans avoir compté le temps que cela lui a pris (et d'avoir supporté mon impatience impétueuse vis-à-vis de la résolution de certains problèmes informatiques). Merci à lui aussi pour nos nombreuses discussions (tant scientifiques que sportives que de "la vie courante") qui m'auront été chères durant ces années de thèse et pour l'amitié qui s'est développée.

J'ai eu l'occasion de démarrer mon doctorat par un séjour de trois mois à l'Advanced Concept Team de l'ESA. Je remercie toute l'équipe de l'ACT qui m'a fait vivre mes trois premiers mois de thèse de façon tonitruante. Ce fut un réel plaisir que de pouvoir évoluer dans cet environnement dans lequel se mêlent des disciplines très diverses et variées. Je garde un excellent souvenir de mon passage dans cette équipe (que je qualifierais de "scientifiques fous"). En particulier, je remercie Leopold Summerer et Dario Izzo d'avoir tout fait pour que je passe un séjour agréable à Leiden et mes premiers collaborateurs scientifiques Luzi Bergamin et Pacôme Delva (que j'ai croisé de nombreuses fois à Paris depuis) pour ces trois mois ô combien enrichissants.

Dans le cadre de ce projet, j'ai été amené à développer un certain nombre de collaborations très précieuses. Je remercie donc Serge Reynaud et Marc-Thierry Jaekel pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce projet et pour les nombreuses discussions que nous avons eues. Je remercie tout particulièrement Brahim Lamine avec qui j'ai eu l'occasion de travailler (et ce fut un réel plaisir) et de comparer les résultats de nos logiciels (cherchant parfois l'exactitude jusqu'à la $14^{\text{ème}}$ décimale). Je remercie également Christophe Le Poncin-Lafitte qui a suivi ce travail de très près de même que son thésard Stefano Bertone avec qui j'ai eu l'occasion d'échanger à de nombreuses

1. Dans la plus pure tradition... On ne rigole pas avec ces choses-là !

reprises étant donné que nos sujets de thèse étaient relativement proches. Je remercie également Valéry Lainey qui m'aura tout appris au sujet des ajustements aux moindres carrés. Je tiens également à remercier toute l'équipe naXys de Namur et en particulier les cosmologistes : Jérémy, Jean-Philippe, Massimiliano et Sandrine pour m'avoir accueilli avec bonne humeur dans leur équipe. Je remercie également toute l'équipe du SYRTE de l'Observatoire de Paris qui m'aura accueilli à de nombreuses reprises durant cette thèse. J'estime vraiment avoir eu de la chance de pouvoir collaborer avec toutes les personnes citées ci-dessus et je les remercie sincèrement en espérant que ces collaborations continueront dans le futur.

Pour continuer, je souhaiterais faire un remerciement moins conventionnel à deux professeurs d'humanité : Madame De Munck et Monsieur Palamin. Ces deux professeurs m'ont littéralement transmis leur passion pour les sciences exactes. J'irai même jusqu'à dire que ma fascination pour la théorie de la gravitation m'a été transmise dans mon cours de physique où la gravitation de Newton fut abordée. Il s'agit d'un exemple plus que démonstrateur que la passion peut se transmettre et que la motivation de certains professeurs peut (encore) parfois toucher certains élèves. A ce titre, je remercie également Jean-Marc Gérard ; son enseignement de la Relativité Générale (bien des années plus tard...) fut également pour moi une source de fascination et de motivation qui m'a certainement poussé à approfondir ce domaine.

Finalement, je terminerai par quelques remerciements plus personnels. Pour commencer, je tiens à remercier ici mes parents et mes deux soeurs pour leur soutien inconditionnel et leurs encouragements malgré leur incompréhension totale par rapport à mon statut de chercheur et surtout par rapport à mes thématiques de recherche qui leur sont restées aussi sombres que l'énergie du même nom. Je remercie également mon grand-père pour son intérêt inégalé pour ma carrière scientifique et également pour m'avoir hébergé à de nombreuses reprises lors de mes séjours à Paris.

Je désire également remercier tous mes amis [2] qui ont toujours été présents dans les bons moments mais également pour me remonter le moral dans les moments un peu plus difficiles. Je les remercie aussi pour tout l'intérêt et toute l'admiration (que je ne mérite sans doute pas toujours) qu'ils portent pour mes sujets de recherche. Cela restera toujours pour moi une source de motivation inépuisable.

Je garde le meilleur pour la fin : je remercie du fond du coeur Mathilde pour avoir été à mes côtés durant cette thèse, pour avoir supporté mon rythme parfois légèrement décalé (parce que quand on a une bonne idée ou qu'on développe du code, les horaires semblent vite dérisoires...), pour devoir subir parfois des absences d'esprit (la physique est parfois tellement jolie qu'elle en devient obnubilante... [3]) et surtout pour avoir dû supporter le stress qui est monté dans cette phase de rédaction. Je la remercie également pour toutes les attentions dont elle a fait preuve, pour son intérêt et son soutien dans mes recherches (malgré son dégout pour la physique) et pour sa bonne humeur continuelle.

Pour terminer cette longue liste de remerciements (en espérant ne pas déjà avoir perdu le

2. J'y inclus également mes "compagnons de cordée" car mes projets sportifs réalisés durant ces quatre ans ont également été très importants pour moi dans mon développement personnel.

3. Parfois elle est tellement incompréhensible qu'elle en est obnubilante aussi...

lecteur...), je tiens à remercier tous les lecteurs quels qu'ils soient qui prendront le temps de lire un passage (ou l'entièreté) de ce manuscrit. J'ai souvent eu l'impression durant ma phase de rédaction que ce texte serait peu lu et je ne peux m'empêcher de remercier les lecteurs éventuels : la plus grande satisfaction que je puisse tirer de cette rédaction est d'espérer que ce texte sera lu. En espérant que le lecteur trouvera les réponses aux questions qu'il se pose.

Pecunia nervus belli : Je remercie le FRS-FNRS de m'avoir supporté financièrement durant ces quatre années de thèse. Je remercie également l'ARCCOS (Action de Recherche Concertée en COSmologie) de me soutenir pour les trois mois qui séparent la fin de mon mandat FNRS et le début de mon post-doctorat. Finalement, certaines simulations réalisées dans le cadre de cette thèse furent réalisées sur le cluster URBM-SysDyn de l'Université de Namur (FUNDP).

Aurélien, septembre 2012

"Les gens ont des étoiles qui ne sont pas les mêmes.
Pour les uns, qui voyagent, les étoiles sont des guides.
Pour d'autres, elles ne sont rien que de petites lumières.
Pour d'autres, qui sont savants, elles sont des problèmes.
Pour mon businessman, elles étaient de l'or.
Mais toutes ces étoiles-là se taisent.
Toi, tu auras des étoiles comme personne n'en a...
...
Quand tu regarderas le ciel, la nuit,
Puisque j'habiterai dans l'une d'elles,
Puisque je rirai dans l'une d'elles,
Alors ce sera pour toi comme si riaient toutes les étoiles.
Tu auras, toi, des étoiles qui savent rire !
...
Et tu ouvriras parfois ta fenêtre, comme ça, pour le plaisir...
Et tes amis seront bien étonnés de te voir rire en regardant le ciel.
Alors tu leur diras :
"Oui, les étoiles, ça me fait toujours rire !"
Et ils te croiront fou. Je t'aurai joué un bien vilain tour..."

Extrait de "Le Petit Prince", A. de Saint-Exupéry

"Shoot for the moon.
Even if you miss, you'll land among the stars."
O. Wilde

"Science is like sex :
Sometimes something useful comes out,
But that is not the reason we are doing it."
R. P. Feynman

Table des matières

Introduction **1**

Conventions **9**

1 Contexte général et présentation du travail réalisé **11**
1.1 Introduction 12
1.2 La Relativité Générale 12
1.2.1 Le principe de covariance généralisée 12
1.2.2 Principe d'équivalence 16
1.2.3 Equation dynamique de la métrique 17
1.3 Présentation du travail réalisé dans le cadre du Système Solaire 18
1.4 Cosmologie 22
1.4.1 Modèle ΛCDM 23
1.4.2 Luminosité des Supernovae 25
1.4.3 Présentation du travail réalisé dans le cadre de la cosmologie 28
1.5 Présentation succincte des théories alternatives considérées dans cette thèse . . . 29

2 Simulations d'observables à partir de la métrique **33**
2.1 Introduction 34
2.2 Définition des observables 34
2.2.1 Observables de type radioscience 35
2.2.2 Observables de type astrométrique 38
2.2.3 Observables de type VLBI 39
2.3 Simulations à partir de la métrique 40
2.3.1 Equations du mouvement 41
2.3.2 Comportement des horloges 43
2.3.3 Propagation du signal 44
2.3.4 Observables de type Range 49
2.3.5 Observables de type Doppler 50
2.3.6 Equations d'évolution de la tétrade 52
2.3.7 Observables de type astrométrique 53
2.4 Analyse numérique 55
2.4.1 Intégration numérique 55
2.4.2 Interpolation de Tchebychev 56

2.4.3 Inversion du temps propre 56
2.4.4 Dérivation de la métrique 57
2.5 Test du logiciel sur une métrique relativiste 59
2.6 Limitations du logiciel 61
2.7 Conclusion 62

3 Comparaison de signaux dans des théories différentes **65**
3.1 Introduction 65
3.2 Ajustement aux moindres carrés 66
3.3 Calcul des signaux en Relativité Générale et de leurs dérivées partielles 68
3.4 Tests des dérivées partielles 69
3.5 Quels paramètres est-il possible d'ajuster ? 70
3.6 Précision numérique du processus complet 72
3.7 Conclusion 73

4 Signature d'observables dans le Système Solaire **75**
4.1 Introduction 76
4.2 Situations Considérées 77
4.2.1 Analyse des précessions des périhélies planétaires 77
4.2.2 Observations radioscience la sonde Cassini 78
4.2.3 Observations VLBI du système de Saturne 79
4.3 Théorie Post-Einsteinienne 80
4.3.1 Présentation théorique 80
4.3.2 Précession du périhélie 83
4.3.3 Simulations des observables radioscience de Cassini 84
4.3.4 Simulations d'observables VLBI du système de Saturne 88
4.4 Effet de champ Externe apparaissant dans les théories MOND 90
4.4.1 Présentation théorique 90
4.4.2 Précession du périhélie 93
4.4.3 Simulations des observables radioscience de Cassini 94
4.4.4 Simulations d'observables VLBI du système de Saturne 94
4.5 Extension du Modèle Standard (SME) 95
4.5.1 Présentation théorique 95
4.5.2 Précession du périhélie 97
4.5.3 Simulations d'observables radioscience de Cassini 98
4.5.4 Simulations d'observables VLBI dans le système de Saturne 103
4.6 Théorie tenseur-scalaire de type "John + George" 104
4.6.1 Présentation théorique 104
4.6.2 Précession des périhélies 107
4.6.3 Simulations d'observables radioscience de Cassini 107
4.6.4 Simulations d'observables VLBI du système de Saturne 110
4.7 Ajout de Jupiter dans la simulation de Cassini 111
4.8 Variation des paramètres lors de l'ajustement 113

4.9 Conclusion 114

5 Etude des champs Caméléons **117**
5.1 Introduction 117
5.2 Equations de champs 122
5.3 Contraintes cosmologiques 123
5.3.1 Equations d'évolution cosmologique 123
5.3.2 Distance Luminosité 126
5.3.3 Analyse de vraisemblance des donnés Supernovae 127
5.3.4 Evolution du champ scalaire 130
5.3.5 Evolution de l'expansion cosmique 134
5.3.6 Equation d'état du fluide effectif d'énergie noire 137
5.4 Contraintes du Système Solaire 140
5.4.1 Configuration sphérique et statique 141
5.4.2 Le mécanisme Caméléon 143
5.4.3 Profil du champ scalaire 145
5.4.4 Paramètres Post-Newtoniens 148
5.5 Conclusion 154

6 Conclusions et perspectives **157**

Bibliographie **165**

A Formalisme des tétrades **187**
A.1 Bases du formalisme des tétrades 187
A.2 Réalisation d'une tétrade 190
A.2.1 Construction locale de tétrades 190
A.2.2 Construction de tétrade par transport 192
A.2.3 Calcul d'une tétrade initiale par un algorithme de Gram-Schmidt 194

B Equations de propagation des rayons lumineux **197**
B.1 Dérivation d'un point de vue corpusculaire 197
B.1.1 Masse du photon 198
B.1.2 Vitesse de propagation et invariant relativiste 198
B.1.3 Equation du mouvement 199
B.2 Dérivation d'un point de vue ondulatoire 199
B.2.1 Equations de Maxwell 199
B.2.2 Limite de l'optique géométrique 201

C Métrique Einstein-Infeld-Hoffmann **203**
C.1 Métrique EIH 203
C.2 Jauge harmonique 204
C.3 Symboles de Christoffel 205
C.4 Equations du mouvement 205

C.5 Equation du temps propre 206
C.6 Transport parallèle 206

D Simulations en RG et dérivées partielles **209**
D.1 Partie dynamique 209
D.1.1 Equations du mouvement et équations variationnelles 210
D.1.2 Equation du temps propre et équation variationnelle 211
D.1.3 Evolution de la tétrade et équations variationnelles 212
D.2 Fonctions de mesure 213
D.2.1 Range et ses dérivées partielles 213
D.2.2 Doppler et ses dérivées partielles 214
D.2.3 Mesures angulaires et leurs dérivées partielles 217

E Publications réalisées dans le cadre de cette thèse **219**
E.1 Publications 219
E.2 Proceedings de conférence 220

Introduction

"Ce qui étonne, étonne une fois,
Mais ce qui est admirable est de plus en plus admiré."
J. Joubert

De tout temps, l'homme a été fasciné par l'évolution des corps célestes et tenta d'expliquer les phénomènes qu'il pouvait observer. Les premières explications de ces phénomènes étaient d'ordre mythologique ou religieuse. Un des premiers modèles théoriques pour reproduire les observations astronomiques se trouve dans l'*Almageste* écrit par Ptolémée dans les environs de l'an 150 après Jésus-Christ. Dans cet ouvrage, un modèle géométrique et géocentrique basé sur des épicycles est proposé pour expliquer le mouvement des planètes dans le ciel. Depuis, les idées concernant les modèles de la gravitation ont vécu plusieurs grandes révolutions, la première étant certainement la proposition du modèle héliocentrique de l'astronome polonais Nicolas Copernic (XVIe siècle) qui a conduit à l'abandon de l'idée que l'homme possède une place privilégiée dans l'Univers. La seconde grande révolution date de 1687 avec la publication des *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* de Sir Isaac Newton. Dans cet ouvrage, Newton propose la première véritable théorie de la gravitation (théorie dans le sens où elle permet de comprendre quantitativement l'ensemble des phénomènes célestes observés à l'époque ainsi que de faire des prédictions qui peuvent être testées expérimentalement). Cette théorie est un chef d'oeuvre incontestable qui permet d'expliquer pour la première fois le mouvement des astres aussi bien que la chute des corps sur Terre. Si le génie de Newton est incontestable, il ne faut pas négliger l'apport de ces prédécesseurs : Tycho Brahé qui accumula un grand nombre d'observations très précieuses sur le mouvement des planètes ; Kepler qui analysa les données de Tycho Brahé pour en déduire les trois lois de Kepler ; Hooke selon qui le mouvement planétaire est la composition d'un mouvement inertiel et d'un mouvement radial de chute libre ...

La théorie de Newton fut extrêmement prolifique au niveau des prédictions qui en découlèrent. Parmi celles-ci, soulignons la prédiction du retour de la comète de Halley qui revient tous les 76 ans (prédiction due à Edmund Halley en 1705). Notons aussi que la théorie de Newton permit à Le Verrier de prédire l'existence de Neptune en 1846. En effet, la trajectoire de la planète Uranus (découverte en 1781) n'était pas tout à fait conforme à la théorie de Newton. Au lieu de remettre en question cette théorie, Le Verrier émit l'hypothèse de l'existence d'un nouveau corps dans le Système Solaire. Il calcula la position de cette nouvelle planète à partir de la trajectoire anormale d'Uranus et Neptune fut ainsi découverte à l'endroit prédit.

Cependant, malgré le fait que cette théorie soit extrêmement prolifique, certains problèmes

apparurent dans la théorie de Newton. Tout d'abord, les astronomes remarquèrent que la trajectoire de Mercure présente des anomalies par rapport à celle prédite par la théorie. En particulier, le périhélie de Mercure présente une précession anormale de 42.7 secondes d'arc par siècle qui est inexplicable par la théorie Newtonienne. Ensuite, d'un point de vue théorique, la théorie de Newton explique l'interaction gravitationnelle par une force qui se propage instantanément. Ce principe théorique est en conflit avec le postulat de la théorie de la relativité restreinte développée par Einstein en 1905 qui stipule qu'aucune information ne peut se propager plus vite que la vitesse de la lumière. Finalement, le principe d'équivalence faible (qui stipule que les corps soumis à un même champ de gravitation subissent la même accélération) est un postulat de la théorie de Newton qui reste inexpliqué et l'égalité entre la masse inertielle et gravitationnelle semble être une coïncidence.

Ces quelques difficultés de la théorie de Newton ont poussé Albert Einstein à développer une théorie relativiste de la gravitation. Cette recherche d'une nouvelle théorie de la gravitation occupa Einstein de 1905 à 1915 [Einstein, 1916] et aboutit sur une théorie géométrique de la gravitation dans laquelle l'interaction gravitationnelle est assimilée à la déformation de l'espace-temps. Cette nouvelle théorie prédit correctement la précession du périhélie de Mercure, ce qui est un énorme succès comme le remarqua Einstein lui-même :

> *"Imagine ma joie en reconnaissant que la covariance générale était réalisable et en trouvant que les équations donnaient correctement le mouvement du périhélie de Mercure. Pendant quelques jours, j'étais fou de joie et tout excité"*
>
> (lettre d'Einstein à P. Ehrenfest, 17 janvier 1916, Gérard [2007])

Très rapidement, cette théorie connut un second succès expérimental grâce à l'observation de la déflexion de la lumière lors d'une éclipse solaire en 1919. En effet, Sir Arthur Eddington mesura la déflexion des rayons lumineux d'étoiles par le Soleil et montra que les résultats étaient en accord avec la théorie d'Einstein alors qu'ils étaient en désaccord avec la théorie Newtonienne ou avec une estimation basée uniquement sur le principe d'équivalence.[4] Dans cette période d'après-guerre, le succès de la théorie d'Einstein fut fortement médiatisé.

Tout comme la théorie de Newton, la théorie d'Einstein fut très riche en nouvelles prédictions qui furent vérifiées expérimentalement. Tout d'abord, Pound et Rebka [1959] mirent en évidence le "redshift" gravitationnel de la lumière entre un récepteur et un observateur situé dans des champs gravitationnels différents. Puis, dans les années 1970, le développement de différentes missions spatiales permirent de tester les prédictions de la relativité générale. Par ailleurs, la précision requise pour ces missions s'étant fortement améliorée (et ce n'est pas fini...), les corrections relativistes sont devenues indispensables dans la modélisation théorique des observations spatiales. Tout d'abord, la dépendance du comportement des horloges par rapport à leur vitesse (qui est une prédiction de la relativité restreinte) et par rapport à leur emplacement dans un champ gravitationnel fut mis en évidence lors de vols commerciaux par Hafele et Keating [1972a,b]. Ensuite, Shapiro [1964] prédit que la propagation des signaux électromagnétiques subit un retard gravitationnel. Cet effet fut mesuré avec la sonde Viking [Shapiro et al., 1977; Reasenberg et al., 1979] et doit aujourd'hui être tenu en compte dans les missions spatiales.

4. L'analyse d'Eddington fut controversée après coup mais finalement, les résultats semblent être corrects bien que fort peu précis [Kennefick, 2007].

La variation de ce retard dans le temps produit également un décalage en fréquence sur les signaux électromagnétiques. Ce décalage fut mesuré par Bertotti et al. [2003] dans le cadre de la mission Cassini et constitue à l'heure actuel un des meilleurs tests de la relativité générale. Notons également que le mouvement de la lune fut également étudié attentivement pour tester les prédictions de la relativité générale [il s'agit essentiellement d'une comparaison de l'orbite lunaire par rapport à la prédiction relativiste réalisée par Shapiro et al., 1976; Williams et al., 2009, 2012]. Finalement, dans le Système Solaire, la déflexion de la lumière fut également observée à une précision nettement plus grande que celle obtenue par Eddington grâce au développement du VLBI (Very Large Baseline Interferometry) [Lambert et Le Poncin-Lafitte, 2009]. La relativité générale est donc une théorie extrêmement bien testée dans le Système Solaire et elle est indispensable pour décrire les observations réalisées. L'exemple le plus concret étant donné par le GPS qui ne pourrait pas être aussi précis sans tenir compte des corrections relativistes [Ashby, 2003].

La relativité générale ne fut pas seulement observée dans le Système Solaire. En effet, une autre prédiction de la relativité générale est que la gravité se propage à la vitesse de la lumière et que des ondes gravitationnelles peuvent exister (ceci résout d'ailleurs le problème de l'interaction instantanée de la théorie Newtonienne). A ce jour, les ondes gravitationnelles n'ont pu être détectées directement. Cependant, il est possible de montrer qu'un système binaire (de deux étoiles par exemple) émet des ondes gravitationnelles, ce qui lui fait perdre de l'énergie. Cet effet est détectable pour des systèmes relativement massifs qui évoluent très rapidement. C'est ainsi que Hulse et Taylor observèrent que la période orbitale du pulsar binaire PSR B1913+16 (ce pulsar fut découvert en 1974 et est constitué de deux étoiles à neutrons) diminue avec le temps indiquant par là une perte d'énergie du système. Leur analyse permit de montrer que leur observations sont en accord parfait avec les prédictions de la théorie d'Einstein [Taylor et al., 1992; Damour et Taylor, 1992]. Hulse et Taylor obtinrent le prix Nobel de physique en 1993 pour cette observation.

Finalement, la relativité générale associée à la découverte de la fuite des galaxies par Hubble [1929] [5] ouvrit la voie à la description de l'évolution de l'Univers dans son ensemble. En effet, Friedmann [1922, 1924] et Lemaître [1927, 1931b] ont montré indépendamment que la théorie d'Einstein possède des solutions cosmologiques en expansion rompant alors avec le dogme d'un univers statique. Lemaître proposa alors un modèle d'atome primitif [voir par exemple Lemaitre, 1945] pour expliquer les premiers instants de l'Univers. Ce modèle d'Univers en expansion à partir d'un atome primitif porte aujourd'hui le nom de Big Bang. Depuis, la cosmologie est devenue une discipline à part entière extrêmement active. Un grand nombre d'observations ont confirmé (et ont permis d'affiner) le modèle du Big Bang. Parmi celles-ci, citons la découverte du fond diffus cosmologique (*Cosmic Microwave Background (CMB)*) qui est un rayonnement qui provient d'une époque relativement dense et chaude de l'Univers (au moment du découplage des photons) et qui s'est refroidi à cause de l'expansion de l'Univers. Aujourd'hui, ce rayonnement

5. Une controverse a eu lieu récemment concernant l'attribution de la découverte de la loi de Hubble. Cette loi et l'estimation de la constante de Hubble était déjà présente dans la version française du papier de Lemaître [1927]. Cependant cette partie du papier n'a pas été traduite dans la version anglaise [Lemaître, 1931b]. Certains ont argumenté que ce défaut de traduction aurait été l'oeuvre d'une censure destinée à laisser la primeur de la découverte à Hubble. Il n'en est en fait rien car Livio [2011] a montré que c'est Lemaître lui-même qui a effectué la traduction et qui a décidé de supprimer les passages correspondant. La loi de Hubble aurait donc été découverte théoriquement par Lemaître et expérimentalement par Hubble.

a une température de 2.7 Kelvin et il a été observé pour la première fois par Penzias et Wilson [1965]. Tous deux obtinrent le prix Nobel de physique en 1978 pour cette découverte.

En conclusion, la théorie développée par Einstein se montra extrêmement riche d'un point de vue prédictif et expérimental. Elle est aujourd'hui utilisée quotidiennement dans des applications telles que le GPS. De plus, la relativité générale est extrêmement bien testée au niveau du Système Solaire et au niveau des pulsars binaires. Cette théorie a également eu des conséquences spectaculaires dans le domaine de la cosmologie. Cependant, tout comme la théorie de Newton, cette théorie présente aujourd'hui plusieurs difficultés qui semblent indiquer qu'une nouvelle révolution est nécessaire dans le monde de la gravitation.

Tout d'abord la relativité générale pose certains problèmes théoriques. En effet, à une certaine échelle d'énergie (ou à très courte distance), on s'attend à ce que des effets quantiques viennent modifier les prédictions de la relativité générale (qui est une théorie classique). Pour prédire ce qui se passe à ces échelles (c'est-à-dire essentiellement pour des temps extrêmement proches du Big Bang et pour des champs extrêmement intenses tels que produits par des trous noirs), il nous faut une théorie quantique de la gravitation. Il est bien connu que la quantification de la relativité générale fait apparaître des divergences qui ne sont pas renormalisables [Deser et van Nieuwenhuizen, 1974; 't Hooft et Veltman, 1974] (c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de faire disparaître les infinités en utilisant les approches perturbatives standards). Plusieurs propositions de théories alternatives furent proposées durant ce dernier demi-siècle. Parmi celles-ci, citons la *gravitation quantique à boucles* dans laquelle est proposée un traitement non-perturbatif de la renormalisation de la gravitation dans un formalisme hamiltonien, la *supergravité* dans laquelle l'ingrédient de supersymétrie est ajouté à la relativité générale (la théorie possède alors une supersymétrie locale et prédit l'existence d'un partenaire pour le graviton : le gravitino), la *géométrie non-commutative*, etc...
Toujours d'un point de vue théorique, une théorie qui unifie toutes les interactions fondamentales serait particulièrement esthétique. De tout temps, les théoriciens ont été poussés par ce réductionnisme. Aujourd'hui, cette recherche de l'unification est particulièrement aboutie dans le cadre du Modèle Standard des particules où les interactions faibles, électro-magnétiques et fortes sont décrites par un modèle qui unifie ces interactions. Cependant, la gravitation, quatrième interaction fondamentale connue résiste jusqu'à ce jour à une unification avec les autres interactions. C'est cette problématique que se propose de résoudre les *théories des cordes, supercordes et branes* dans lesquelles les particules sont modélisées comme étant des vibrations d'objets fondamentaux appelés cordes. Ces propositions de théories résolvent également le problème de la quantification de la gravité mais elles s'écrivent généralement dans des espace à 10 ou 11 dimensions.
Notons qu'aucune des théories citées ci-dessus n'est complètement aboutie et est acceptée par l'entièreté de la communauté scientifique.

Outre ces problèmes d'ordre théorique, la relativité générale présente également quelques difficultés expérimentales. En particulier, aux échelles galactiques l'étude des courbes de rotation des galaxies sont incompatibles avec les masses observées de ces galaxies. Cette anomalie fut observée pour la première fois dans les années 1930 au sein d'un amas de galaxies [Zwicky, 1933, 1937] puis fut confirmée et généralisée par la suite au sein des galaxies elle-même [Rubin et Ford, 1970]. Concrètement, on observe que les galaxies tournent trop vite par rapport à la masse

observée. Dans le cadre du modèle standard de la cosmologie (le modèle ΛCDM pour Λ Cold Dark Matter), ces observations sont expliquées par l'introduction d'une nouvelle composante de matière : la *matière noire* (Dark Matter) qui n'interagit que par interaction gravitationnelle et qui est donc invisible par les méthodes standards. Selon les plus récentes observations, cette matière noire constitue environ 22,6 % du contenu en matière-énergie de l'Univers tandis que la matière baryonique ne représente que 4,5 % du contenu en matière-énergie [Komatsu et al., 2011] (le reste étant constitué d'énergie sombre dont nous parlerons plus tard). Cette matière noire est également requise pour expliquer les effets de lentilles gravitationnelles. En effet, la trajectoire de la lumière est sensible à la présence de masse. Il est donc possible de reconstruire la masse nécessaire pour expliquer des observations de déflexion de la lumière par des galaxies [voir par exemple Kaiser et Squires, 1993; Taylor et al., 1998; Massey et al., 2007]. Il se fait que cette masse "gravitationnelle" ne correspond pas à la masse "lumineuse" observée ce qui est expliqué par la présence de matière noire. Cette matière noire qui est également nécessaire pour expliquer la formation des structures (formation des galaxies, halos de galaxies à partir de la genèse primordiale) n'a jamais été directement observée jusqu'à présent (plusieurs candidats existent tels que des particules supersymétriques, des WIMPS (Weakly Interactive Massive Particules) ou encore des MACHOS (Massive Astronomical Compact Halo Object - des objets composés de matière normale qui émettent très peu de rayonnement et qui errent dans les halos galactiques) mais n'ont pas encore été détectés si bien que ces observations peuvent être une indication expérimentale que la théorie de la gravitation n'est pas celle d'Einstein. Cette approche a notamment été exploitée par Milgrom [1983a] dans sa théorie MOND (pour *Modified Newtonian Dynamics*) et dans ses extensions relativistes [pour une revue voir par exemple Bruneton et Esposito-Farèse, 2007; Famaey et McGaugh, 2012].

Au niveau cosmologique, il existe aussi des observations qui ne peuvent s'expliquer par la théorie de la relativité générale et le modèle standard des particules. En effet, Riess et al. [1998] et un an plus tard Perlmutter et al. [1999] publièrent des observations de Supernovae de type Ia qui indiquent que l'Univers se trouve actuellement dans une phase d'expansion accélérée. Une supernova Ia est une explosion d'un système binaire qui produit une augmentation significative de la luminosité. Le mécanisme d'amorce d'une supernova Ia est bien connu : il s'agit de l'explosion d'une naine blanche amorcée par capture de matière à une étoile compagne. Cette explosion thermonucléaire se produit toujours dans les mêmes circonstances, ce qui fait que la luminosité émise est la même d'une supernova à l'autre. Cette propriété justifie le nom de chandelles standards donné à ces explosions [6]. L'observation de la luminosité apparente de ces rares événements et du décalage fréquentiel vers le rouge de leur spectre permet de reconstruire l'évolution de l'Univers [voir par exemple Gérard, 2012]. Or, de façon très surprenante, cette évolution semble être en expansion accélérée ce qui semble contradictoire avec les lois de la gravitation qui sont attractives (nous pouvons donc avoir un Univers en expansion décélérée ou en contraction). Ces observations peuvent être expliquées en ajoutant une constante cosmologique dans les équations d'Einstein. Cette constante Λ fut introduit par Einstein lui-même alors qu'il cherchait des solutions cosmologiques statiques. Elle fut finalement retirée après l'observation de la fuite des galaxies par Hubble et Einstein affirma que l'introduction de cette constante fut "la plus grande erreur de sa vie". La constante cosmologique agit comme un fluide de pression négative qui

6. En fait, les Supernovae sont considérés comme des chandelles standards après une recalibration des observations.

produit une force de gravitation répulsive et qui peut expliquer l'accélération de l'expansion cosmique. Le prix Nobel de physique 2011 récompensa Schmidt, Riess et Perlmutter pour cette découverte. Le fluide associé à la constante cosmologique porte le nom d'*énergie sombre (Dark Energy)*.

La présence de ce fluide d'énergie sombre fut confirmée par d'autres observations comme par exemple l'étude des anisotropies du rayonnement fossile (CMB) [Hinshaw et al., 2003; Komatsu et al., 2011]. En effet, le spectre de puissance des anisotropies du CMB donne des informations quant à la quantité de matière baryonique et noire présente dans l'Univers et sur la courbure de l'Univers (donnant par là une information quant à la quantité d'énergie sombre présente). L'étude de ces anisotropies fut initiée par les mesures de la mission COBE (Cosmic Background Explorer). Les scientifiques Georges Smoot et John Matter obtinrent le prix Nobel de physique en 2006 pour leur découverte de la nature du corps noir et des anisotropies du CMB par la mission COBE. Ces expériences ont permis de montrer que l'énergie sombre représente 72,9 % du contenu en matière-énergie de l'Univers (le restant étant constitué de matière baryonique et noire comme nous l'avons indiqué plus tôt) [Komatsu et al., 2011].

A l'heure actuelle, nous ne savons pas ce qu'est cette énergie sombre. Une interprétation possible consiste à l'assimiler à l'énergie du vide dont les effets sont identiquement les même que celui d'une constante cosmologique. Cependant une estimation de la valeur de cette énergie du vide provenant de la théorie des champs conduit à une prédiction de l'ordre de 10^{120} fois plus élevée que celle fournie par les observations cosmologiques. [7] Ce problème est connu comme le problème de l'ajustement fin de la constante cosmologique et l'interprétation de l'énergie du vide n'est actuellement pas satisfaisante. D'autre part, la valeur de la constante cosmologique mesurée est très particulière : elle est telle que l'effet de cette constante est aujourd'hui du même ordre de grandeur que l'effet de la matière standard. En particulier, si la valeur de la constante cosmologique était plus petite, elle serait complètement indétectable à l'heure actuelle. Le fait que la constante cosmologique ait cette valeur si particulière semble être une coïncidence remarquable qui est inexpliquée. Ce problème est connu sous le nom de problème de la coïncidence. Une approche conservative consiste à considérer que la constante cosmologique est une constante de la Nature dont la valeur est celle que nous avons mesuré sans chercher plus d'explications. Cependant, beaucoup de physiciens voient dans les problématiques liés à la constante cosmologique une indication d'une possible alternative à la théorie de la gravitation.

Les quelques paragraphes précédents ont donc illustré que la théorie d'Einstein n'est actuellement pas complètement satisfaisante. Nous nous trouvons donc dans une situation semblable à celle qui a précédé la découverte de la relativité générale : à la recherche d'une nouvelle théorie qui résolve (au moins partiellement) les problèmes théoriques et expérimentaux présentés ci-dessus. Un grand nombre de théories alternatives de la gravitation sont proposées dans la littérature [une large revue peut être trouvée dans Clifton et al., 2012]. La plupart de ces théories peuvent être assimilées à des théories effectives qui peuvent être interprétées comme limite à basse énergie de théories plus complètes (telles que celles évoquées ci-dessus : théorie des cordes, supergravité, ...) ou qui furent développées pour résoudre les problèmes expérimentaux mentionnés ci-dessus. Le point essentiel est que toutes ces théories présentent des déviations (plus ou moins importantes)

7. En sommant les contributions d'énergie du vide pour toutes les longueurs d'onde jusqu'à la longueur de Planck.

par rapport à la relativité générale. Il est donc crucial de pouvoir déterminer dans quelles circonstances il est possible de détecter ces différentes théories de la gravitation : quel type d'expérience permet de mettre en évidence une hypothétique théorie alternative ? Quel est l'ordre de grandeur de la déviation attendue ? Quelle est la signature de cette déviation ? C'est à ces questions que tente de répondre (modestement) ce travail.

Le cadre du travail est donc posé : on a de forte raisons de croire que la théorie de la relativité générale n'est pas la théorie ultime de la gravitation et nous nous proposons d'étudier certaines alternatives proposées et la possibilité de les mettre en évidence expérimentalement. Nous nous sommes concentrés sur quelques situations expérimentales précises (il est illusoire de les considérer toutes) et nous avons essayé de suivre une méthodologie extrêmement générale de telle façon que notre approche soit la plus flexible possible et qu'il soit relativement aisé de considérer différentes théories alternatives. Deux situations expérimentales très différentes sont considérées : des observations de sondes spatiales et astrométriques dans le Système Solaire et des observations de luminosité de supernovae Ia au niveau cosmologique.

Dans le Système Solaire, l'idée est de simuler certaines observables dans différentes théories de la gravitation : les observables de type radioscience utilisées dans le suivi radio (tracking) des missions spatiales et les observables de type angulaire utilisées dans les observations de type VLBI et astrométriques. En effet, les différentes missions spatiales offrent des laboratoires uniques et très intéressants pour tester les théories de la gravitation. La précision de ces missions spatiales ne cesse de s'améliorer pour atteindre des niveaux impressionnants. Par exemple, la précision de la mission Cassini [8] est de l'ordre du mètre pour le Range [9], de l'ordre de 3 μm/s pour le Doppler [10] et de l'ordre de 0.5 mas pour les observations de type VLBI tandis que la précision attendue pour la mission BépiColombo [11] est de l'ordre de 10 cm pour le Range et de l'ordre du μm/s pour le Doppler [Milani et al., 2002]. Finalement, la précision attendue pour la future mission GAIA [12] est de l'ordre de quelques μas [Mignard et Klioner, 2010; Klioner, 2003]. Non seulement l'amélioration de ces précisions requiert un développement théorique pour modéliser les observations correctement par rapport à la relativité générale mais en plus, ces missions offrent des opportunités nouvelles pour tester la théorie de la gravitation à un niveau de plus en plus précis.

Concrètement, nous avons implémenté un logiciel qui calcule numériquement les observables (Range, Doppler et astrométriques) directement à partir de la métrique de l'espace-temps. La métrique de l'espace-temps est l'objet mathématique qui est à la base d'une grande classe des théories modernes de la gravitation. Cela signifie qu'il est très aisé de simuler les observables dans des théories alternatives de la gravitation (dès que la métrique est connue). Ce logiciel permet alors d'identifier la signature due à une théorie alternative et d'en dériver l'ordre de grandeur attendu. Ensuite la comparaison de l'ordre de grandeur du signal produit par une

8. La mission Cassini est une mission qui est actuellement en orbite dans le système de Saturne.

9. Le Range est défini à section 2.2.1 et correspond au temps mis par les signaux électromagnétiques pour parcourir le trajet aller-retour entre l'observateur et la sonde spatiale à un facteur c près

10. Le Doppler est défini à la section 2.2.1 et correspond au rapport de fréquence entre le signal émis et le signal reçu (à un facteur c près).

11. La mission BepiColombo doit s'élancer en 2015 vers la planète Mercure.

12. La mission Gaia doit décoller en 2013 pour réaliser une carte de notre galaxie avec une précision sans précédent. [ESA, 2012b]

théorie alternative avec la précision de l'observation permet de dire si la théorie considérée peut être détectée avec l'observation simulée. D'autre part, une recherche des signatures dues à une théorie alternative dans les résidus des observations passées permet de dériver des contraintes sur les théories considérées.

Au niveau cosmologique, nous nous sommes concentrés sur les analyses des données supernovae Ia. Ces données qui ont permis la mise en évidence de l'accélération de l'expansion cosmique ont été utilisées pour contraindre certaines théories alternatives. Ici encore, une approche numérique fut utilisée. Elle consiste à simuler les données (sous la forme de relation distance luminosité par rapport au redshift) dans la théorie alternative considérée et à les comparer aux données réelles. Ensuite, une analyse statistique de vraisemblance permet de dériver les régions de paramètres acceptables par rapport aux données.

Le chapitre 1 présente le contexte général du travail, introduit rapidement les bases de la relativité générale et de la cosmologie et décrit précisément l'objectif poursuivi dans le cadre de cette thèse. Ensuite, nous nous concentrons sur le Système Solaire et nous présentons le logiciel qui permet de simuler des observations à partir de la métrique de l'espace-temps. Le logiciel est décrit dans les chapitres 2 et 3. Les simulations et les résultats obtenus dans le Système Solaire sont ensuite présentés dans le chapitre 4. Le chapitre 5 présente une étude cosmologique d'une des théories considérées dans cette thèse. Dans ce chapitre une analyse des données supernovae Ia est réalisée et une comparaison entre les contraintes obtenues au niveau cosmologique et obtenues dans le Système Solaire est effectuée. Le dernier chapitre sera consacré à une conclusion.

Conventions

"For those who want some proof that physicists are human,
The proof is in the idiocy of all the different units which they use for measuring energy."
R. P. Feynman

Dans cette thèse, nous utiliserons la conventions d'Einstein traditionnellement utilisée à savoir que le symbole sommation sera omis et par conséquent, deux indices répétés sont sommés. Par exemple, le produit scalaire de deux vecteurs s'écrit

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^{3} A^i B_i = A^i B_i \tag{1}$$

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{g}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{\alpha=0}^{3} A^\alpha B_\alpha = A^\alpha B_\alpha = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \tag{2}$$

D'autre part, les indices latins sont utilisés pour désigner les indices spatiaux $i = 1, 2, 3$ tandis que les indices grecs sont utilisés pour désigner les indices spatio-temporels $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Les vecteurs spatiaux seront notés avec une flèche $\vec{A} = A^i$ tandis que les quadri-vecteurs seront notés en gras $\mathbf{B} = B^\alpha$. La partie temporelle des quadri-vecteurs porte l'indice 0 ; ainsi, le quadri-vecteur position s'écrit $x^\alpha = (x^0, x^i) = (ct, x^i)$. Le produit scalaire entre vecteur à 3D se note par un point tandis que le produit scalaire de quadri-vecteur se note entre parenthèse ou encore en faisant explicitement référence au tenseur métrique.

La dérivation partielle sera indiquée par une virgule $\frac{\partial f^\beta}{\partial x^\alpha} = f^\beta_{,\alpha}$ tandis que la dérivée covariante est indiquée par l'opérateur ∇ ou par un point-vrigule $\nabla_\alpha f^\beta = f^\beta_{;\alpha}$.

Les conventions utilisées pour la signature de la métrique et la définition du tenseur de Riemann sont celles de Misner et al. [1973]. La signature de la métrique est donc $(-, +, +, +)$, la définition du tenseur de Riemann est donnée par

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\epsilon}\Gamma^\epsilon_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\epsilon}\Gamma^\epsilon_{\beta\gamma} \tag{3}$$

tandis que la définition du tenseur de Ricci est donnée par

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}. \tag{4}$$

Pour rappel, les symboles de Christoffel (ou connexion métrique ou encore connexion de Levi-Civita) sont donnés par

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \left(g_{\gamma\mu,\beta} + g_{\beta\mu,\gamma} - g_{\beta\gamma,\mu} \right). \tag{5}$$

Le tenseur de Weyl quant à lui est défini par

$$W_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}R_{\beta\gamma} + g_{\beta\delta}R_{\alpha\gamma} - g_{\beta\gamma}R_{\alpha\delta}\right) + \frac{1}{6}\left(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}\right)R. \tag{6}$$

En ce qui concerne les unités utilisées dans cette thèse : dans toutes les analyses effectuées dans le cadre du Système Solaire, nous avons utilisé le système d'unités international (SI, c'est-à-dire le mètre, la seconde, le kilogramme). Par contre, dans les analyses réalisées au niveau cosmologique, nous avons utilisé un système d'unités naturelles qui est caractérisé par $\hbar = c = 1$. Dans ces unités naturelles, toutes les unités peuvent s'exprimer en terme de puissances d'énergie et donc en puissance de GeV. Par exemple, une masse s'exprime en GeV, une longueur et un temps en GeV^{-1}, ...

La constante gravitationnelle est notée G et vaut $G = 6.673 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}/\mathrm{s}^2$. Lorsqu'on travaille en unités naturelles, il est courant d'utiliser la masse de Planck au lieu de G. En effet la masse de Planck est définie par

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = \sqrt{\frac{1}{G}} = 1.2209 \times 10^{19}\mathrm{GeV}. \tag{7}$$

On utilise également parfois la masse de Planck réduite définie par

$$M_p = \frac{m_p}{\sqrt{8\pi}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G}} = \sqrt{\frac{1}{8\pi G}} = 2.435 \times 10^{18}\mathrm{GeV}. \tag{8}$$

Finalement, nous noterons par $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} = 2.0753 \times 10^{-43} s^2/kg/m$ qui en unités naturelles s'exprime également par

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} = \frac{1}{M_p^2} = \frac{8\pi}{m_p^2}. \tag{9}$$

Chapitre 1

Contexte général et présentation du travail réalisé

"Nous sommes des nains assis sur des épaules de géants.
Si nous voyons plus de choses et plus lointaines qu'eux,
Ce n'est pas à cause de la perspicacité de notre vue, ni de notre grandeur,
C'est parce que nous sommes élevés par eux."
B. de Chartres

Sommaire

1.1 Introduction 12
1.2 La Relativité Générale 12
1.2.1 Le principe de covariance généralisée 12
1.2.2 Principe d'équivalence 16
1.2.3 Equation dynamique de la métrique 17
1.3 Présentation du travail réalisé dans le cadre du Système Solaire . . 18
1.4 Cosmologie 22
1.4.1 Modèle ΛCDM 23
1.4.2 Luminosité des Supernovae 25
1.4.3 Présentation du travail réalisé dans le cadre de la cosmologie 28
1.5 Présentation succincte des théories alternatives considérées dans cette thèse 29

1.1 Introduction

Ce chapitre est destiné à une présentation très générale de l'état de l'art actuel et à une présentation détaillée du travail réalisé dans le cadre de cette thèse. Nous commencerons par décrire brièvement les bases théoriques de la relativité générale (RG). Ensuite, nous présenterons en détails les motivations de ce travail et la procédure poursuivie. Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, nous avons considéré deux cadres très distincts : le Système Solaire et la cosmologie. Nous commencerons par présenter en détails le travail réalisé dans le cadre du Système Solaire. Ensuite, nous nous consacrerons à l'étude de la gravitation à très grande échelle en présentant le travail réalisé au niveau cosmologique. Finalement, nous terminerons par décrire très brièvement les théories alternatives considérées dans le cadre de cette thèse.

1.2 La Relativité Générale

La RG fut développée presque intégralement par Albert Einstein. Cette théorie se base sur plusieurs principes dont le principe de covariance généralisée et le principe d'équivalence auxquels il faut ajouter une description de la dynamique du champ gravitationnel. Nous allons reprendre ces différents principes pour les expliciter et en donner les motivations théoriques et expérimentales.

1.2.1 Le principe de covariance généralisée

Le principe de covariance généralisée peut être vu comme une généralisation du principe de relativité de Galilée. Ce principe s'exprime sous la forme suivante : **Toutes les lois de la mécanique sont identiques dans tous les référentiels galiléens.** Pour que la phrase précédente ait un sens, il nous faut préciser ce qu'est un référentiel galiléen. Un tel référentiel est un référentiel dans lequel est vérifiée la loi d'inertie de Newton (ou première loi de Newton) qui stipule que tout corps libre se meut dans un mouvement rectiligne uniforme.

Les transformations qui permettent de passer d'un référentiel galiléen à un autre définissent le groupe d'invariance de la théorie : le groupe de Galilée. Il contient notamment les translations spatiales et temporelles, les rotations spatiales et les transformations de Galilée qui permettent le passage entre deux référentiels en translation uniforme à vitesse $\vec{v}$ (transformation donnée par $t = t'$ et $\vec{x} = \vec{x}' - \vec{v}t$).

Le XIXe siècle a vu se développer la théorie de l'électromagnétisme (notamment par Maxwell). Cependant, cette théorie n'était mathématiquement pas invariante sous les transformations de Galilée s'opposant ainsi au principe de relativité de Galilée. Une solution pour résoudre ce conflit consistait d'abandonner le principe de relativité. Cependant, Einstein décida de garder ce principe qui s'exprime alors sous la forme : **Toutes les lois de la physique (sauf la gravitation) sont identiques dans tous les référentiels inertiels** et d'y ajouter le postulat de **l'invariance de la vitesse de la lumière** c (qui se déduit des équations de Maxwell et qui

fut vérifié expérimentalement par la célèbre expérience de Michelson et Morley en 1881). Ces deux principes ont conduit Einstein [1905b] à développer la théorie de la relativité restreinte et permirent la dérivation des transformations de Lorentz. Le passage de la théorie Newtonienne vers la relativité restreinte ne modifie absolument pas le principe de relativité. La seule chose qui change est l'expression des transformations entre les référentiels inertiels. Ces transformations qui permettent d'effectuer le passage entre deux référentiels en translation à vitesse uniforme l'un par rapport à l'autre mélangent espace et temps produisant des effets complètement inattendus dans la théorie de Newton (dilatation du temps, contraction des longueurs, ...). Le groupe d'invariance de la théorie devient alors le groupe de Poincaré.

Dans son article fondateur de la relativité générale, Einstein [1916], guidé par des considérations liées au principe de Mach, généralisa le principe de relativité en demandant que les lois de la physique soient les mêmes pour tous les observateurs (et non plus uniquement dans les référentiels inertiels). Ceci revient à exiger que

> *"Les lois générales de la nature sont représentées par des équations qui sont valables pour tous les systèmes de coordonnées, c'est-à-dire qui sont covariantes vis-à-vis de n'importe quelle substitution."*
>
> (Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Einstein [1916], traduit par F. Balibar [Hawking, 2005])

Cette covariance généralisée se traduit mathématiquement par l'utilisation d'identités tensorielles. Elle implique notamment que les points de l'espace-temps ne sont pas en soi observables. Cette propriété est typique d'une théorie possédant une invariance de jauge (la particularité de la gravitation résidant dans le fait que les quantités non-invariantes de jauge ne sont pas des valeurs de champs (comme dans les théories de jauge basées sur un groupe de symétrie interne) mais les coordonnées de l'espace-temps lui-même [Bruneton, 2007]). Ceci signifie entre autre que les résultats d'une expérience ne peuvent être décrits par des coordonnées mais il faut considérer des quantités invariantes de jauge. Ces quantités sont appelées des observables. Cette difficulté de la théorie de la RG fut rencontrée par Einstein lui-même comme il en fit part :

> *"Je me rendis bientôt compte qu'avec la conception des transformations non linéaires requise par le principe d'équivalence, c'en devait être fini de l'interprétation physique directe des coordoonnées ; autrement dit : on ne pouvait plus exiger que les différences entre coordonnées représentent les résultats immédiats de mesures effectuées à l'aide de règles ou d'horloges. Cette constatation me tracassa beaucoup, car je restai longtemps incapable de comprendre ce que, tout compte fait, les coordonnées doivent alors représenter en physique."*
>
> (Conférence prononcée le 20 juin 1933 par Einstein à Glasgow [Delva, 2007])

Finalement, notons que toutes les théories modernes de la gravitation sont des théories covariantes sous transformations de coordonnées. Des théories qui ne possèdent pas cette propriété seraient caractérisées par le fait que les coordonnées de l'espace-temps soient directement observables, ce qui semble contre-intuitif aujourd'hui.

Covariance et importance de l'observable

Comme nous venons de le mentionner, la RG (tout comme les théories alternatives modernes de la gravitation) est une théorie invariante sous transformations de coordonnées (difféomorphismes). Par conséquent, nous pouvons choisir le système de coordonnées dans lequel nous voulons effectuer les développements mathématiques (comme par exemple l'écriture des équations du mouvement des corps). Cette liberté implique que des quantités dépendantes des coordonnées n'ont en général pas de réalité physique (elles dépendent justement d'un choix, d'une convention humaine) et ne sont pas observables. Un système de coordonnées est un pure artéfact mathématique nécessaire pour réaliser les calculs et que nous avons le loisir de choisir et il est extrêmement important de s'intéresser à des quantités qui soient invariantes sous les difféomorphismes et qui sont appelées des observables.

La discussion ci-dessus peut paraître fort abstraite et pourtant, elle a des conséquences directe dans la simulation et l'analyse des observables spatiales. L'objectif de cette section est d'illustrer ces propos avec un exemple relativement simple. Considérons une modélisation du mouvement d'un corps quelconque autour du Soleil. Nous allons modéliser le Soleil comme étant un corps sphérique et considérer un corps test qui suit les trajectoires géodésiques. Considérons deux jeux de coordonnées différents (t, x', y', z') et (t, x, y, z) (par simplicité, on a choisi les mêmes composantes temporelles $t' = t$) dont les origines coïncident avec la position du Soleil. Nous utiliserons les notations $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (et des notations semblables pour les primes). Nous allons considérer une métrique solution de l'équation d'Einstein autour d'un corps sphérique : la métrique de Schwarzschild découverte par Karl Schwarzschild [1916]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{1.1}$$

où $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ avec les angles θ et ϕ représentant la colatitude et la longitude construites à partir des coordonnées (x, y, z). Les coordonnées (t, x, y, z) sont appelées coordonnées de Schwarzschild. Une simple transformation de coordonnées $r = r'\left(1 + \frac{GM}{2c^2 r'}\right)^2$ permet de transformer la métrique de Schwarzschild et de l'exprimer sous une forme isotrope [voir Weinberg, 1972, chap. 8]

$$ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{GM}{2c^2 r'}\right)^2}{\left(1 + \frac{GM}{2c^2 r'}\right)^2} c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{GM}{2c^2 r'}\right)^4 (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2). \tag{1.2}$$

Les coordonnées (t, x', y', z') sont appelées coordonnées isotropes [1]. Les deux métriques sont reliées par une transformation de coordonnées et elles représentent le même espace-temps, la même réalité physique.

Nous pouvons maintenant calculer les équations du mouvement (équations des géodésiques) découlant de ces deux métriques. Si nous nous restreignons au premier ordre Post-Newtonien (premier ordre en GM/rc^2 et en v^2/c^2), nous trouvons les équations du mouvement suivantes [Brum-

1. Pour être complet, les coordonnées de Schwarzschild ont l'avantage que la coordonnée radiale r représente le rayon vecteur tandis que les coordonnées isotropes ont l'avantage d'être des coordonnées cartésiennes.

berg, 1991, Eq.(3.1.46)]

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r} + \frac{GM}{c^2 r^3}\left[\left(2\frac{GM}{r} - 2v^2 + 3\frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})^2}{r^2}\right)\vec{r} + 2(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v}\right] \quad (1.3)$$

$$\ddot{\vec{r}}\,' = -\frac{GM}{r'^3}\vec{r}\,' + \frac{GM}{c^2 r'^3}\left[\left(4\frac{GM}{r'} - v'^2\right)\vec{r}\,' + 4(\vec{r}\,'\cdot\vec{v}\,')\vec{v}\,'\right]. \quad (1.4)$$

On reconnait dans ces deux expressions une composante qui correspond à la force de Newton. Cependant les corrections relativistes au premier ordre ne sont pas identiques dans les deux jeux de coordonnées qui correspondent cependant à la même situation physique. Notons au passage que la correction apparaissant dans la seconde forme des équations est connue comme étant la *correction de Schwarzschild* qui est usuellement appliquée dans les logiciels d'orbitographie (comme par exemple dans le logiciel GINS [GRGS, 2001]). Notons qu'il s'agit d'un choix et que d'un point de vue théorique rien ne favorise l'équation (1.4) par rapport à l'équation (1.3).

Pour illustrer le fait que des effets non-physiques peuvent apparaître en étudiant des quantités dépendantes de coordonnées, nous allons étudier le mouvement d'un corps (qui correspond approximativement à Mercure) en intégrant sa trajectoire dans les deux jeux de coordonnées. La figure 1.1 (haut) représente la différence de coordonnées qui résulte de l'intégration des équations (1.3) et (1.4). La différence entre les deux trajectoires qui est de l'ordre du km n'est pas physique (rappelons que la situation physique modélisée est identiquement la même).

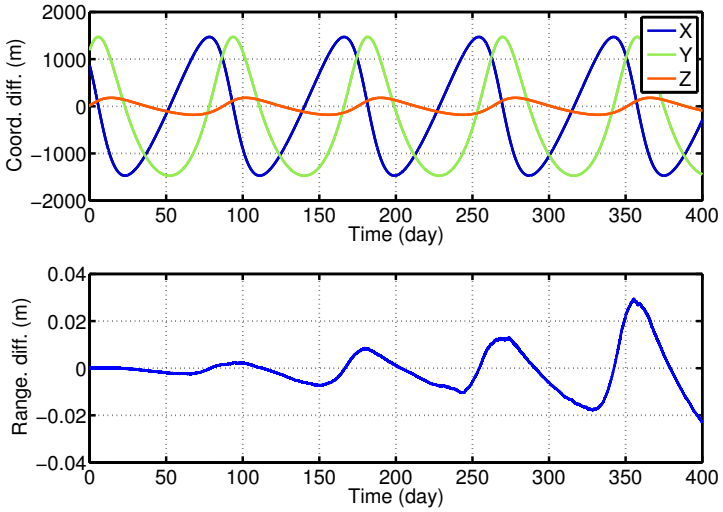

FIGURE 1.1 – Haut : Représentation de la différence entre les coordonnées obtenues en intégrant la trajectoire d'un corps avec les équations (1.3) et (1.4). La différence de coordonnées représentées est grande et pourtant non physique.
Bas : Représentation du Range entre le corps intégré et un corps fixe obtenu en utilisant les deux types de coordonnées considérés (coordonnées de Schwarzschild et coordonnées isotropes). Cette fois-ci, la différence est faible (et est dû aux erreurs numériques et à des effets du second ordre non-considérés).

Cependant, la modélisation du résultat d'une mesure physique est observable et par conséquent indépendante du jeu de coordonnées. Dans l'exemple considéré, une observable est par exemple

le temps propre mis par la lumière pour réaliser le trajet aller-retour entre un observateur (pour l'exemple, nous avons placé un observateur fixe à environ 1 UA du Soleil) et le corps. Sans entrer plus dans les détails ici, cette observable est appelée Range et peut être calculé aisément à l'ordre 1 PN dans les deux systèmes de coordonnées considérés. La différence entre le Range calculé dans les deux jeux de coordonnées est tracée sur la figure 1.1 (bas). La différence est maintenant de l'ordre du *cm* après une année. Cette différence résiduelle est en fait due aux erreurs numériques et à des termes du second ordre non-modélisés ici. La comparaison des observables est donc cohérente et reflète le fait que la situation physique est la même.

Le point essentiel que nous avons essayé de souligner ici est la réelle importance de travailler avec des observables proprement définies et indépendantes de coordonnées tandis que le fait de travailler avec des quantités dépendantes de coordonnées peut conduire à des signaux qui ne sont pas physiques.

1.2.2 Principe d'équivalence

Le second principe sur lequel est fondé la RG vient également de Galilée qui avait remarqué que tous les corps soumis à un même champ de gravitation subissent la même accélération indépendamment de leur constitution et de leur mouvement propre (universalité de la chute libre). Ce principe fut remarqué expérimentalement par Galilée qui faisait rouler des billes sur un plan incliné ; mais à travers des expériences de pensée, il parvint à montrer intuitivement que ce principe est correct [Galileo, 1638]. Concrètement dans la théorie de Newton, ce principe s'exprime par l'égalité entre la masse inertielle (qui quantifie la réponse d'un corps à une force appliquée) et la masse gravitationnelle (qui quantifie la réponse d'un corps à la force gravitationnelle).

Ce principe selon lequel masse inertielle et gravitationnelle coïncident est inexpliqué par Newton et a conduit Einstein à "l'idée la plus heureuse de sa vie" qui consiste à identifier localement l'effet d'un champ gravitationnel dans un référentiel inertiel avec l'effet d'une accélération de ce référentiel [Einstein, 1911]. Autrement dit, le principe d'équivalence d'Einstein affirme que le principe d'équivalence faible est vérifié et que, localement, les effets d'un champ gravitationnel sur une expérience n'utilisant pas la gravitation sont identiques aux effets d'une accélération correspondante du référentiel de l'observateur. De façon équivalente, nous pouvons affirmer que en tous points de l'espace-temps, il existe un référentiel local inertiel dans lequel les lois de la relativité restreinte sont applicables. L'effet de la gravitation peut être obtenu en considérant la transformation non-linéaire entre ce référentiel localement inertiel et un référentiel quelconque. Sous une version moderne, le principe d'équivalence d'Einstein est présenté par les trois affirmations suivantes [Will, 1993] :

1. le principe d'équivalence faible est vérifié (principe d'universalité de la chute libre pour des masses tests - *Universality of Free Fall - UFF*) .
2. le résultat d'une expérience non-gravitationnelle est indépendant de la vitesse du système de référence inertiel dans laquelle elle est réalisée (*Local Lorentz Invariance - LLI*).
3. le résultat d'une expérience non-gravitationnelle est indépendant de la position et du moment où elle est réalisée (*Local Position Invariance - LPI*).

Ce principe d'équivalence est extrêmement profond. La transformation entre un référentiel localement inertiel et un référentiel quelconque permet d'identifier la gravitation au tenseur métrique $g_{\mu\nu}$. En particulier, les masses tests suivent les géodésiques de cette métrique et les horloges idéales mesurent le temps propre qui est donné par l'intégration de

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}. \tag{1.5}$$

Sans entrer dans les détails, précisons que le principe d'équivalence d'Einstein est aujourd'hui fortement contraint [pour une revue des tests du principe d'équivalence d'Einstein, voir par exemple Will, 2006] mais qu'il existe des motivations théoriques pour poursuivre les tests expérimentaux de ce principe [pour une revue voir par exemple Damour, 2012].

Finalement, une version forte du principe d'équivalence existe (principe d'équivalence fort). Dans cette version, le principe d'équivalence d'Einstein est étendu au cas où on considère des expériences gravitationnelles. Ce principe implique l'universalité de la chute libre entre des masses dont l'énergie de liaison gravitationnelle est différente.

La relativité générale respecte ces trois principes d'équivalence. La grande majorité des théories alternatives rencontrées dans la littérature conduisent à une violation du principe d'équivalence fort [2]. Dans le cadre de cette thèse, les théories alternatives de la gravitation considérées sont des théories métriques qui respectent donc le principe d'équivalence d'Einstein.

1.2.3 Equation dynamique de la métrique

Si le principe d'équivalence permet d'identifier la gravitation avec la métrique de l'espace-temps, il nous reste à expliciter ce qui détermine cette métrique. En RG, l'évolution de la métrique $g_{\mu\nu}$ est déterminée par les équations d'Einstein (dont la limite non-relativiste donne l'équation de Poisson bien connue en théorie Newtonienne)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.6}$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci, R est le scalaire de courbure, G la constante de Newton, Λ la constante cosmologique et $T_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion. Ces équations nous indiquent la façon dont la géométrie de l'espace-temps est gouvernée par son contenu en énergie-matière. En contrepartie, la géométrie de l'espace-temps gouverne l'évolution de la matière. En effet, la divergence du membre de gauche de l'équation d'Einstein s'annule en vertu des identités de Bianchi ce qui implique notamment l'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion (cette loi de conservation peut également se dériver de l'invariance sous difféomorphisme de l'action (1.8))

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \tag{1.7}$$

Cette équation peut être interprétée comme l'équation d'évolution de la matière (en particulier cette équation permet de retrouver l'équation des géodésiques pour le cas des masses tests).

2. A l'exception de la théorie scalaire de Nordström mais cette théorie ne prédit pas de déflexion de la lumière et est donc rejetée par l'expérience.

Notons que les équations d'Einstein peuvent s'écrire comme résultant d'un principe variationnel et peuvent se dériver de l'action d'Einstein-Hilbert [Einstein, 1916]

$$S_{\rm RG} = \frac{c^4}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}(R-2\Lambda) + S_{\rm mat}[g_{\mu\nu},\Psi_m] \tag{1.8}$$

où Ψ_m représente les champs de matière. Il est intéressant de préciser que le théorème de Lovelock [1971, 1972] stipule que les équations d'Einstein (1.6) sont les seules équations du second ordre qui peuvent être dérivées à partir d'un principe de moindre action en ne considérant que le tenseur métrique (et ses dérivées) dans une théorie en quatre dimensions.

En résumé la théorie de la RG est basée (outre le principe de covariance inhérent à toute théorie moderne) sur le principe d'équivalence qui permet d'assimiler la gravitation au tenseur métrique et sur les équations d'évolution de cette métrique donnée par les équations d'Einstein (1.6). Nous allons maintenant introduire de façon détaillée le travail réalisé dans le cadre de cette thèse.

1.3 Présentation du travail réalisé dans le cadre du Système Solaire

Il existe aujourd'hui un certain nombre de tests de la RG qui ont été réalisés dans le Système Solaire. Ces tests sont généralement réalisés dans deux formalismes : le formalisme Post-Newtonien Paramétré (PPN) et le formalisme de recherche d'une cinquième force. Dans le formalisme PPN [pour une présentation détaillée, voir par exemple Will, 1993], la métrique dans le Système Solaire est paramétrée par 10 coefficients sans dimension. Les principaux paramètres PPN sont γ et β qui sont tous les deux contraints à l'ordre de 10^{-5} aujourd'hui : le paramètre γ est contraint par la mesure du délai Shapiro lors d'observations radioscience de la sonde Cassini par Bertotti et al. [2003]

$$\gamma - 1 = (2.1 \pm 2.3)\times 10^{-5}; \tag{1.9}$$

le paramètre β, quant à lui, est contraint par l'étude de la dynamique des planètes du Système Solaire par les éphémérides INPOP [Fienga et al., 2011] qui fournissent la contrainte

$$\beta - 1 = (-4.1 \pm 7.8)\times 10^{-5}. \tag{1.10}$$

D'autre part, la recherche pour une cinquième force considère une déviation du potentiel gravitationnel Newtonien sous la forme d'un potentiel de Yukawa paramétré par deux paramètres. Ces deux paramètres sont aujourd'hui bien contraints [voir par exemple Adelberger et al., 2003, 2009]. La RG est donc bien contrainte dans ces deux formalismes.

Cependant, il y a de fortes raisons de croire que la théorie de la RG n'est pas la théorie ultime de la gravitation (voir l'introduction pour des motivations de cette affirmation) et il existe de fortes motivations pour poursuivre les tests de la théorie de la gravitation. Tout d'abord, différents modèles théoriques prédisent des déviations des paramètres Post-Newtoniens plus petites que les contraintes actuelles. Parmi ces modèles, mentionnons certaines théories tenseur-scalaire qui possèdent un mécanisme d'attraction cosmologique vers la RG [Damour et Nordtvedt, 1993a,b]

dans lesquelles la déviation du paramètre $\gamma-1$ est de l'ordre de 10^{-7} au minimum. Un mécanisme semblable apparait dans des théories tenseur-scalaire motivées par les théories des cordes [Damour et Polyakov, 1994a,b] où un dilaton (champ scalaire) apparait. Dans ce cadre, si le dilaton est non-massif, son évolution cosmologique peut le pousser à se découpler de la matière et à produire une déviation par rapport à la RG plus petite que les contraintes actuelles [Damour et Polyakov, 1994a,b]. Certains modèles de théories tenseur-scalaire présentant des mécanismes d'écrantage (nous les évoquerons dans le chapitre 5) prédisent également des déviations par rapport à la RG plus petites que les contraintes actuelles. C'est par exemple le cas des théories qui présentent un mécanisme caméléon [Khoury et Weltman, 2004a,b; Hees et Füzfa, 2012]. En particulier, ce mécanisme caméléon apparait dans certaines théories $f(R)$ [3] qui produisent des déviations du paramètre γ plus petites que les contraintes actuelles [Faulkner et al., 2007; Capozziello et Tsujikawa, 2008; de Felice et Tsujikawa, 2010]. Ces quelques exemples illustrent la motivation pour continuer à améliorer les contraintes actuelles.

Cependant, il n'est pas suffisant de se contenter d'améliorer les contraintes dans les deux formalismes utilisés : le formalisme PPN et le formalisme de cinquième force. En effet, les deux formalismes utilisés ne couvrent pas toutes les théories alternatives de la gravitation et ce n'est pas parce que les observations contraignent fortement les théories alternatives dans le formalisme PPN ou de cinquième force que ceci est également le cas dans d'autres formalismes. Par exemple, les théories présentées à la section 1.5 sont des exemples de théories qui ne sont pas couvertes par le formalisme PPN ou de cinquième force. Citons par exemple la théorie post-Einsteinienne qui est une phénoménologie dont la métrique de l'espace-temps présente des modifications par rapport à la RG décrites par deux fonctions qui dépendent de la position [Jaekel et Reynaud, 2005b, 2006a]. Cette théorie étend donc le formalisme PPN traditionnel. Un autre exemple est donné par l'Extension du Modèle Standard qui est un formalisme développé pour tenir compte d'une éventuelle brisure de l'invariance de Lorentz [Kostelecký, 2004]. Dans ce formalisme, la métrique de l'espace-temps est également beaucoup plus générale que la métrique PPN [Bailey et Kostelecký, 2006]. D'autres exemples sont encore donnés par des théories motivées par la cosmologie. Par exemple dans le cadre de l'étude des "Fab Four" [Bruneton et al., 2012] (ces théories sont explicitées à la section 4.6.1) ou des théories $f(R)$ [Capozziello et al., 2007a; Saffari et Rahvar, 2008; Hashemi et Saffari, 2011], on peut montrer que la métrique sort également des formalismes standards. Ces quelques exemples (et ils ne sont pas exhaustifs) justifient le fait de considérer des tests de la RG qui vont au-delà des formalismes standards. Cependant, le travail de cette thèse sera utile bien au-delà des seules théories considérées ici, car on aura développé un outil polyvalent qui pourra être réutilisé par la suite pour considérer d'autres théories de la gravitation et permettre ainsi d'envisager d'autres tests par de la gravitation par la suite...

Dans cette partie, nous allons nous concentrer sur des tests de la gravitation dans le Système Solaire. Dans ce contexte, les observations gravitationnelles sont composées soit d'observations astrométriques (position dans le ciel sous la forme d'ascensions droites et de déclinaisons), soit d'observations de poursuite de sondes spatiales (Range, Doppler, VLBI). L'idée générale du travail est de simuler les observations astrométriques et de poursuite dans diverses théories alternatives de la gravité (au-delà du formalisme PPN ou de cinquième force). L'objectif étant de proposer une solution très générale, nous avons développé un logiciel qui permet de simuler

3. Théories dont l'action est une fonction du scalaire de courbure R qui étendent la RG pour laquelle l'action est retrouvée dans le cas $f(R) = R$ comme indiqué à la relation (1.8).

ces observables à partir de la métrique de l'espace-temps. Ceci permet de considérer une classe très large de théories alternatives et d'effectuer des simulations au-delà des formalismes usuels : il suffit de changer la métrique pour changer la théorie de la gravitation à partir de laquelle les simulations sont effectuées. Il est alors possible d'effectuer des simulations d'observables en RG, dans des théories PPN ou dans toute autre théorie de la gravitation dont on connait la métrique. Ceci permet de mettre en évidence les signatures provoquées par une hypothétique théorie alternative de la gravitation sur certaines observations.

Cependant, une comparaison directe de signaux simulés dans deux théories de la gravitation ne peut être effectuée telle quelle. En effet, même si nous simulons des observables (invariantes de jauge), les signaux simulés dépendent encore des conditions initiales des différents corps (planètes et sondes). Ces conditions initiales sont dépendantes de coordonnées et il est relativement délicat de comparer ces conditions initiales dans deux théories différentes. Pour éviter qu'un effet de coordonnées (non-physiques) provenant de ce choix de conditions initiales n'apparaissent dans les simulations, nous allons ajuster les conditions initiales lorsque nous comparerons le signal produit par une théorie alternative par rapport à un signal produit en RG. D'autre part, cet ajustement des conditions initiales est toujours réalisé en pratique dans les analyses de données [Zarrouati, 1987] et dès lors, il est important de le réaliser pour obtenir la signature incompressible produite par une théorie alternative qui s'approche le plus de la situation expérimentale.

A long terme, le projet initié dans cette thèse (et brièvement décrit au paragraphe précédent) a pour objectif de permettre une recherche *systématique* et *polyvalente* d'une déviation de la RG dans les observations du Système Solaire. Par systématique, nous voulons insister sur le fait que la même méthode peut être utilisée pour traiter différents types de données (Range, Doppler, VLBI, astrométrie) voire de leurs combinaisons et par polyvalent nous voulons insister sur le fait que la méthode proposée est aisément adaptable d'une théorie à l'autre (et ne se limite pas uniquement au formalisme PPN). La procédure de base consistera (quand elle sera complètement terminée) en quatre étapes représentées à la figure 1.2 que nous allons décrire en détails.

1. simulation des observables d'une situation physique donnée (par exemple des observations de poursuite d'une sonde spatiale depuis la Terre) dans la théorie alternative. Dans cette étape, une version simplifiée de la situation physique peut être considérée : seuls les éléments qui sont susceptibles de produire une déviation significative due à la théorie alternative doivent être simulés. Les perturbations gravitationnelles (des planètes supplémentaires par exemple) ou non-gravitationnelles (radiation solaire, effets thermiques, ...) ne doivent pas nécessairement être simulées à ce stade.

2. analyse des observables résultant de la simulation en théorie alternative en utilisant la procédure usuelle en RG. La procédure usuelle consiste à ajuster les paramètres libres, de même que les conditions initiales. A l'issu de cette étape, nous disposons des résidus incompressibles produits par la théorie alternative qui seraient présents dans les résidus des vrais données si la théorie de la gravitation est la théorie alternative considérée mais si les données ont été analysées en utilisant une procédure standard en RG. Ces résidus feront office de "template".

3. analyse des données réelles en utilisant la procédure standard en RG (en incluant cette fois-ci toutes les perturbations standards comme par exemple les effets thermiques, la radiation solaire, ...).

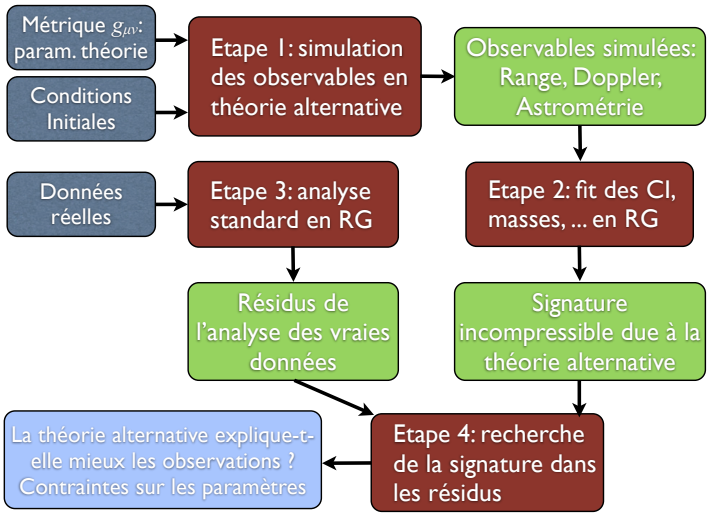

FIGURE 1.2 – Représentation du processus général proposé pour analyser des données d'observations dans le Système Solaire. Les quatre étapes décrites dans cette section sont représentées.

4. recherche des résidus incompressibles dérivés à l'étape 2 dans les résidus de l'analyse réelle effectuée à l'étape 3. Cette recherche peut se faire en utilisant n'importe quelle méthode statistique adaptée aux données et au signal recherché. Si le signal cherché est trouvé avec un rapport signal sur bruit (S/N) supérieur à 1, alors la théorie alternative considérée explique mieux les données que la RG. Il sera alors intéressant d'approfondir cette analyse pour confirmer ce résultat en analysant plus systématiquement les données et/ou en considérant d'autres situations physiques (autres sondes spatiales, autres types d'observations) qui pourraient confirmer ou infirmer le résultat.

Le chapitre 2 présente en détails le logiciel qui réalise l'étape 1 présentée ci-dessus. Ce logiciel de simulation travaille à partir de la métrique de l'espace-temps ce qui signifie que la théorie alternative est directement implémentée de façon consistante dans toutes les étapes de la simulation (orbitographie, comportement des horloges, propagation de la lumière, ...). Comme nous l'avons mentionné, dans cette première étape, uniquement les effets principaux sont simulés car on s'attend à ce que les modifications de la théorie de la gravitation sur les effets de perturbations (perturbations gravitationnelles, radiation solaire, effets thermiques, ...) soient petites par rapport aux termes principaux.

Le chapitre 3 présente une version simplifiée de l'étape 2 présentée ci-dessus. Dans ce chapitre, nous présentons un logiciel qui permet d'ajuster (aux moindres carrés) les conditions initiales des différents corps présents dans la simulation en RG. Idéalement, ce logiciel devrait inclure tous les effets susceptibles d'absorber du signal anormal produit par la théorie alternative de telle sorte qu'on obtienne un signal résiduel incompressible. Dans le cadre de cette thèse, seules les conditions initiales furent considérées. Cependant, une certaine prudence est nécessaire pour respecter la cohérence entre les étapes 1 et 2 pour éviter que de "faux" signaux soient générés par des perturbations inclues à l'étape 2 mais pas à l'étape 1. Par exemple, si on inclut une planète supplémentaire (un corps perturbateur) à l'étape 2 (mais pas à l'étape 1), cela modifiera de façon significative les résidus obtenus. Par contre si on inclut cette planète dans les deux

étapes ou dans aucune des deux étapes, cela ne changera pas significativement les résultats (nous donnerons un exemple explicite de ceci dans la section 4.7). Le point essentiel pour éviter l'ajout non-intentionnel de signal est qu'on peut ajouter à l'étape 2 uniquement des termes dont la contribution peut être annulée par l'ajustement (typiquement les effets thermiques). Ces termes sont ainsi susceptibles d'absorber une partie du signal sans en générer.

Les deux premières étapes permettent de dériver les signatures incompressibles produites par une théorie alternative de la gravitation. Si les données étaient disponibles (ou tout au moins les résidus obtenus lors d'une analyse en RG des vraies données), il serait intéressant de réaliser les étapes 3 et 4 qui permettraient de fournir une estimation des paramètres apparaissant dans les théories alternatives de la gravitation (semblable aux contraintes sur les paramètres PPN). En attendant, il est possible de comparer l'amplitude maximale des signaux résiduels obtenus avec la précision des observations pour obtenir une idée de l'ordre de grandeur sur les contraintes qu'il est possible d'obtenir en analysant les vraies données. De plus, si on fait l'hypothèse qu'aucun signal anormal n'a été détecté après analyse des vraies données, la comparaison de l'amplitude maximale des résidus simulés avec la précision réelle fournit un ordre de grandeur de contraintes sur les paramètres des théories alternatives. Il s'agit ici uniquement d'ordre de grandeur car d'une part la contrainte pourrait être légèrement moins bonne si on tient compte de plus d'effets susceptibles d'absorber le signal dans l'étape 2 et d'autre part, un filtrage plus optimal qu'une simple comparaison des ordres de grandeurs permettrait d'améliorer la contrainte obtenue. Finalement, le chapitre 4 présente des simulations dans les théories alternatives présentées à la section 1.5.

Il est intéressant de préciser que les logiciels développés dans le cadre de ce travail pourraient également être utilisés pour optimiser d'éventuelles futures missions spatiales dans le but de maximiser les signaux provenant de théories alternatives.

En résumé, dans le cadre de ce travail, nous avons proposé une méthode qui permet d'étendre les analyses des théories de la gravitation au-delà des analyses réalisées dans les formalismes traditionnels. Cette méthode consiste à simuler les observations à partir de la métrique de l'espace-temps et à ensuite les analyser en RG pour en dériver les signatures incompressibles. Ensuite, cette signature incompressible doit être recherchée dans les résidus des analyses réelles.

1.4 Cosmologie

Dans cette section, nous allons commencer par rappeler très brièvement les rudiments du modèle standard cosmologique [plus de détails peuvent se trouver par exemple dans Hobson et al., 2006]. Ensuite, nous présenterons en détails une observable cosmologique qui sera considérée dans le cadre de ce travail : la distance-luminosité des Supernovae. Finalement, nous présenterons en détails le travail réalisé dans le cadre de la cosmologie.

1.4.1 Modèle ΛCDM

La cosmologie est la science ayant pour étude l'Univers dans son ensemble (comme un seul objet physique). Elle concerne donc l'étude de la gravitation aux très grandes échelles (à des échelles supérieures à 100 Mpc [4]). Cette tâche ne serait pas possible sans un certain nombre d'hypothèses simplificatrices : le principe cosmologique qui stipule que l'espace est homogène et isotrope (ce qui se traduit mathématiquement par l'utilisation de la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) et l'utilisation de la limite des milieux continus qui permet de décrire le contenu en énergie et matière de l'Univers sous la forme de fluides parfaits. La cosmologie décrit l'évolution de l'Univers à partir de la RG et des deux hypothèses précédentes. Pour rappel, la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLWR) s'écrit sous la forme [voir par exemple Weinberg, 1972; Hobson et al., 2006]

$$ds^2 = -c^2dt^2 + R^2(t)\left[\frac{d\sigma^2}{1-k\sigma^2} + \sigma^2 d\Omega^2\right] = -c^2dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\Omega^2\right] \tag{1.11}$$

où $R(t)$ a une dimension de longueur, σ est une variable sans dimension, $a(t) = R(t)/R_0$ est le facteur d'échelle, $r = R_0\sigma$, $K = k/R_0^2$ et k prend les valeurs 0 et ± 1 selon que la géométrie spatiale soit euclidienne, elliptique ($k = 1$) ou hyperbolique ($k = -1$). Cette métrique fut dérivée par Friedmann [1922, 1924], Lemaître [1927, 1931a], Robertson [1935, 1936a,b] et Walker [1937]. De façon équivalente, elle peut se réécrire sous la forme

$$ds^2 = -c^2dt^2 + R(t)^2(d\chi^2 + S_k^2(\chi)d\Omega^2) \tag{1.12}$$

où χ est déterminé par la relation différentielle $d\chi = d\sigma/\sqrt{1-k\sigma^2}$ et la fonction $S_k(\chi)$ est donnée par

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin(\chi) \text{ si } k = 1 \\ \chi \text{ si } k = 0 \\ \sinh(\chi) \text{ si } k = -1 \end{cases} . \tag{1.13}$$

Actuellement, le modèle cosmologique accepté est le modèle appelé ΛCDM (pour Λ - *Cold Dark Matter*) qui est composé de divers constituants. Chacun de ces constituants est caractérisé par son paramètre de densité Ω défini par

$$\Omega_{n0} = \Omega_n(t = t_0) = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_{n0} \qquad \text{avec} \quad H \equiv \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \tag{1.14}$$

où ρ_n est la densité d'énergie liée au constituant n, H est le paramètre de Hubble et les indices 0 réfèrent à l'époque actuelle ($t = t_0$). Les divers constituants de l'Univers sont également caractérisés par leur équation d'état paramétré par ω_n défini par

$$p_n = \omega_n \rho_n c^2 \tag{1.15}$$

où p_n est la pression relative au constituant n.

Selon le modèle ΛCDM, l'Univers est constitué de :

4. 1 Mpc = $3.08568025 \times 10^{22}$m

- Energie sombre : Cette composante est nécessaire pour expliquer l'accélération de l'expansion cosmique observée. Dans le modèle ΛCDM, elle est modélisée par une constante cosmologique dont le paramètre de densité est donné par $\Omega_{\Lambda 0} = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} = 0.729$ avec Λ la valeur de la constante cosmologique [Suzuki et al., 2012].
- Matière noire : Cette composante est nécessaire pour expliquer certaines observations galactiques (les problèmes des courbes de rotation par exemple) et pour expliquer les observations du CMB. Elle est modélisée par un fluide parfait, dont le paramètre de l'équation d'état est $\omega = 0$ et dont le paramètre de densité est donné par $\Omega_{\mathrm{DM}0} = 0.226$ [Komatsu et al., 2011].
- Matière baryonique : il s'agit là de la matière standard dont le paramètre de densité est donné par $\Omega_{b0} = 0.045$ [Komatsu et al., 2011].
- Radiation : il s'agit d'un fluide dont le paramètre de l'équation d'état est donné par $\omega_r = 1/3$ et dont le paramètre de densité vaut $\Omega_{r0} \approx 5 \times 10^{-5}$ [Beringer et al., 2012].

Finalement, Ω_m représente la densité de matière totale (baryonique et noire) : $\Omega_m = \Omega_{\mathrm{DM}} + \Omega_b$. Il est à noter que le modèle de concordance ΛCDM est un modèle qui est plat. En effet, les analyses du CMB permettent de dériver la contrainte $-0.0133 < \Omega_{k0} < 0.0084$ [Komatsu et al., 2011]. Finalement, pour être complet, le paramètre de Hubble dans ce modèle vaut $H_0 = 70.3$ km/s/Mpc [Komatsu et al., 2011]. L'âge de notre Univers est environ de 14 milliards d'années.

Ce modèle permet d'expliquer la plupart des observations cosmologiques : la luminosité des Supernovae, le spectre angulaire du fonds diffus cosmologique, les oscillations acoustiques de baryons, ...

Cependant, ce modèle présente plusieurs difficultés dont celles présentées ci-dessous :

- nature de la matière noire : nous ne savons actuellement pas ce qu'est la matière noire requise pour expliquer les observations cosmologiques. Cela peut être un nouveau type de particule (qui n'a pas encore été détectée) ou éventuellement une indication d'une modification de la théorie de la gravitation [pour une revue sur cette problématique, voir par exemple Bertone et al., 2005; Famaey et McGaugh, 2012].
- nature de l'énergie noire et problème de l'ajustement fin : dans le modèle ΛCDM, l'énergie noire est modélisée par une constante de la nature : la constante cosmologique Λ. Beaucoup de physiciens ne sont pas en accord avec cette approche conservative et essaient de donner une explication rationnelle à cette constante, par exemple en essayant de l'interpréter comme provenant de l'énergie du vide. Le problème de cette interprétation est qu'il y a environ 120 ordres de grandeur entre la valeur calculée théoriquement pour l'énergie du vide et la valeur observée par la cosmologie. On peut imaginer introduire un mécanisme qui vienne réduire la densité d'énergie du vide calculée théoriquement mais un tel mécanisme devrait être précis à 120 décimales ce qui est difficilement imaginable. C'est ce qu'on appelle le problème de l'ajustement fin de la constante cosmologique [voir par exemple Weinberg, 1989, 2000; Martin, 2012].
- problème de coïncidence cosmique : la valeur de la constante cosmologique mesurée par les observations est $\Lambda = 1.2 \times 10^{-52} m^{-2}$ ou encore si on considère que la constante cosmologique est modélisée par un fluide parfait dont l'équation d'état est donnée par $p + c^2\rho = 0$, la densité d'énergie qui s'y rapporte vaut $\rho_{\Lambda 0} = 6.52 \times 10^{-27} \mathrm{kg/m^3}$. Cette valeur de densité

d'énergie observée est du même ordre de grandeur que la densité critique aujourd'hui [5]. Le fait que la densité d'énergie associée à la constante cosmologique (qui est constante au cours du temps) soit du même ordre de grandeur que la densité critique aujourd'hui semble être une coïncidence fortuite. Cette coïncidence est très importante car si la valeur de la constante cosmologique était un ordre de grandeur plus grand, cela aurait empêché la formation des structures et nous ne serions probablement pas là pour en parler [Weinberg, 1987]. D'autre part, si la valeur de la constante cosmologique était un ordre de grandeur plus petit, il nous aurait été probablement impossible de la détecter (et nous n'en parlerions sans doute pas non plus). Cette coïncidence est peut-être le fruit du hasard mais elle interpelle cependant un bon nombre de physiciens qui préfèrent trouver une solution plus élégante et plus rationnelle pour expliquer le fait que $\rho_{\Lambda 0} \approx \rho_{c0}$ plutôt que de se résoudre à accepter qu'il s'agisse du hasard [voir par exemple Weinberg, 2000; Sapone, 2010].

Plusieurs tentatives de solutions furent proposées pour résoudre les deux problèmes liés à la constante cosmologique [voir par exemple Weinberg, 1989, 2000; Sapone, 2010, et les références associées]. Citons par exemple les tentatives d'introduire une nouvelle symétrie (éventuellement liée à la supersymétrie) pour expliquer l'ajustement fin, le remplacement de la constante cosmologique par un champ scalaire appelé quintessence (ou k-essence dans les cas où le terme cinétique du champ scalaire n'est pas usuel), l'introduction d'un nouveau fluide de matière telle un gaz de Chaplygin. D'autres modèles tentent d'expliquer les observations qui requièrent l'énergie noire par une modification de la théorie de la gravité : c'est le cas des théories $f(R)$, des théories à dimensions supplémentaires, de la quintessence ou des champs caméléons. Finalement, certains modèles associent une modification de la gravité avec l'ajout d'une composante de matière. C'est par exemple le cas de la théorie AWE (*Abnormally Weighted Energy* [Alimi et Füzfa, 2007, 2008; Füzfa et Alimi, 2007]) dans laquelle l'accélération de l'expansion cosmique est une conséquence de la violation du principe d'équivalence faible de la matière noire. Finalement, certains (peut-être en désespoir de cause) appliquent un principe anthropique pour expliquer la valeur de la constante cosmologique : elle a la valeur qu'elle possède car nous sommes là pour la mesurer [Weinberg, 1987, 2000]. Finalement, mentionnons également le développement très récent de théories tenseur-scalaire dans lesquelles la densité d'énergie du vide est écrantée au niveau cosmologique. Cela signifie qu'une énorme densité d'énergie du vide peut avoir une influence très faible sur le facteur d'échelle a et cela permet ainsi de contourner le problème de l'ajustement fin. Ces théories portent le nom des "Fab Four" et furent développés par Charmousis et al. [2012a,b]. Nous en rediscuterons à la section 4.6.1.

1.4.2 Luminosité des Supernovae

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, le modèle ΛCDM permet d'expliquer les différentes observations cosmologiques. En particulier, ce modèle explique les observations de distance-luminosité des Supernovae Ia qui ont permis de mettre en évidence l'accélération de l'expansion cosmique. Etant donné que nous avons travaillé avec ces observables (voir le chapitre 5), nous allons les présenter en détails dans cette section.

5. La densité critique est la densité d'énergie que l'on doit avoir pour que la courbure de l'Univers soit nulle. Elle est définie par $\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 9 \times 10^{-27}\mathrm{kg/m^3} \approx 4 \times 10^{-47}\mathrm{GeV}^4$.

Les Supernovae Ia sont des explosions extrêmement lumineuses produites par des systèmes binaires. Les processus qui conduisent à ces explosions sont relativement bien connus si bien que la luminosité absolue produite lors de telles explosions est connue [voir par exemple Kowal, 1968; Miller et Branch, 1990; Branch et Tammann, 1992]. Par conséquent, les luminosités mesurées des Supernovae donnent des indications quant aux distances auxquelle ces explosions se produisent. D'autre part, il est possible de mesurer le décalage en fréquence z des photons entre le moment où ils sont émis et le moment où il sont observés. La relation entre la distance luminosité et le redshift donne une indication quant à l'évolution du facteur d'échelle et permet donc d'inférer le contenu en matière/énergie de l'Univers [Perlmutter, 2003].

Tout d'abord, un décalage en fréquence gravitationnel est présent dans les univers de FLRW. Ce redshift gravitationnel provoqué par l'expansion cosmique s'écrit sous la forme [Weinberg, 1972; Hobson et al., 2006]

$$\frac{\nu_e}{\nu_r} = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = 1 + z = \frac{a(t_r)}{a(t_e)} \tag{1.16}$$

avec ν la fréquence propre et λ la longueur d'onde propre du photon et où les indices e réfèrent à l'émission et r à la réception du signal. Les quantités ν et λ sont des quantités propres mesurées par un observateur local comobile avec le fluide cosmologique. Si l'observation est réalisée à l'époque actuelle, nous avons $a(t_r) = a_0 = 1$ et le redshift s'exprime sous la forme

$$1 + z = \frac{1}{a(t_e)}. \tag{1.17}$$

D'autre part, la distance luminosité est une distance définie de façon opérationnelle. En effet, si nous notons par L la luminosité absolue (en $\mathrm{W} = \mathrm{J/s}$) émise par la Supernova et par F le flux observé (exprimé en $\mathrm{W/m^2}$), la distance luminosité est définie par

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi F}\right)^{1/2}. \tag{1.18}$$

Cette relation est intuitive dans le cas où nous travaillons avec un espace Euclidien. Cette définition est opérationnelle car d'une part, nous supposons que la luminosité des Supernovae Ia est connue (comme indiqué ci-dessus) et d'autre part, le flux F est mesuré. La distance luminosité est donc une quantité qui peut être déterminée expérimentalement. Voyons maintenant comment relier la distance d_L à la métrique de FLRW. Tout d'abord, il faut noter que deux effets influencent la luminosité observée : premièrement, les photons subissent un décalage gravitationnel ce qui signifie que l'énergie observée est diminuée d'un facteur $(1 + z)$; ensuite, le temps d'observation entre deux photons est dilaté d'un facteur $(1 + z)$. Ceci signifie que le flux observé s'exprime sous la forme

$$F = \frac{L}{(1+z)^2 A} = \frac{L}{(1+z)^2 4\pi R_0^2 S_k^2(\chi)} \tag{1.19}$$

où $A = 4\pi R_0^2 S_k^2(\chi)$ est la surface d'une sphère centrée sur la source lumineuse passant par l'observateur (dont la coordonnée comobile est donnée par χ). En insérant cette expression dans la définition de la distance luminosité, nous obtenons

$$d_L = (1 + z) R_0 S_k(\chi). \tag{1.20}$$

Il reste à remplacer χ par sa valeur. Pour ce faire, il faut considérer le mouvement radial d'un photon dont les équations du mouvement peuvent être obtenues en imposant $ds = 0$ dans (1.12), ce qui donne après intégration

$$\chi = \frac{c}{R_0}\int_t^{t_0}\frac{dt}{a(t)} = \frac{c}{R_0}\int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \tag{1.21}$$

Après quelques calculs, il est possible de réécrire l'expression de la distance-luminosité sous la forme [cette relation est standard, voir par exemple Peebles, 1993]

$$d_L(z) = (1+z)R_0 S_k\left(\frac{c}{R_0}\int_0^z \frac{dz}{H(z)}\right) = (1+z)\frac{c}{H_0\sqrt{|\Omega_{k0}|}}S_k\left(H_0\sqrt{|\Omega_{k0}|}\int_0^z \frac{dz}{H(z)}\right). \tag{1.22}$$

Cette relation nous donne donc le lien entre le redshift et la distance luminosité qui sont deux quantités mesurables.

Il est intéressant de développer l'expression ci-dessus pour des faibles valeurs de redshift z pour obtenir [Hobson et al., 2006]

$$d_L(z) = \frac{c}{H_0}\left[z + \frac{1}{2}(1+q_0) + \mathcal{O}(z^3)\right]. \tag{1.23}$$

Cette relation permet de montrer que les observations des Supernovae permettent de déterminer le paramètre d'accélération $q_0 = \frac{\ddot{a}_0}{a_0 H_0^2}$. L'analyse de ce type de données en 1998 par Riess et al. [1998]; Perlmutter et al. [1999] a permis de montrer que $q_0 > 0$, ce qui montre que l'Univers subit une phase d'expansion accélérée. Ces observations ont valu le prix Nobel de physique 2011 aux physiciens Schmidt, Riess et Perlmutter.

Les données Supernovae ne s'expriment usuellement pas en terme de distance luminosité mais plutôt en terme de module de distance μ qui est défini comme la différence entre la magnitude apparente et la magnitude absolue et qui s'exprime par

$$\mu(z) = 25 + 5\log_{10}\left(\frac{d_L(z)}{1\text{ Mpc}}\right). \tag{1.24}$$

Les relations (1.24) et (1.22) permettent donc de lier les données expérimentales aux prédictions théoriques obtenues en considérant différents modèles cosmologiques. Par exemple, la figure 1.3 représente les données Supernovae UNION [Kowalski et al., 2008] de même que les prédictions de trois modèles cosmologiques caractérisés par différentes valeurs de Ω_{m0} et $\Omega_{\Lambda 0}$. Une comparaison des données avec les simulations permet de montrer que le modèle qui reproduit au mieux les données est caractérisé par des valeurs proches de $(\Omega_{m0} \approx 0.3, \Omega_{\Lambda 0} \approx 0.7)$. Une analyse statistique plus fine permet d'obtenir le meilleur modèle [Suzuki et al., 2012] et des régions de confiance sur les paramètres.

Nous avons vu comment les données des Supernovae peuvent être utilisées pour contraindre des modèles cosmologiques au travers de la relation (1.24). Nous utiliserons ces données pour contraindre des théories alternatives à la RG au chapitre 5.

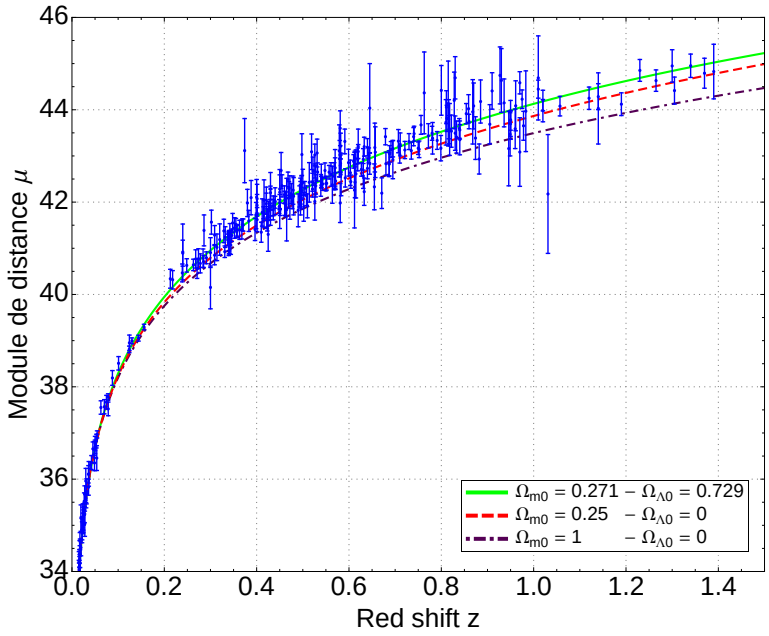

FIGURE 1.3 – Représentation des données Supernovae UNION [Kowalski et al., 2008] et trois modèles cosmologiques caractérisés par différentes valeurs de $(\Omega_{m0}, \Omega_{\Lambda 0})$. Les données des Supernovae Ia ne sont pas du tout sensibles aux faibles valeurs de Ω_{r0} qui est donc pris comme étant 0 pour les simulations présentées dans cette figure. D'autre part, $H_0 = 70.3$ km/s/Mpc.

1.4.3 Présentation du travail réalisé dans le cadre de la cosmologie

Comme nous l'avons mentionné à la section 1.4.1, le modèle ΛCDM est extrêmement bien testé et fonctionne relativement bien pour expliquer les diverses observations réalisées au niveau cosmologique. Cependant, il y a toujours de fortes motivations pour tester la théorie de la gravitation aux échelles cosmologiques. Tout d'abord, le modèle ΛCDM présente encore quelques difficultés dont certaines furent évoquées dans la section 1.4.1. Certaines propositions pour résoudre ces difficultés impliquent de considérer des théories alternatives de la gravitation. D'autre part, d'autres motivations pour considérer des théories alternatives proviennent de tentatives pour dériver une théorie quantique de la gravitation et pour unifier l'interaction gravitationnelle avec les autres interactions (comme indiqué dans l'introduction de cette thèse). Tout comme à l'échelle du Système Solaire, il y a donc une forte motivation pour tester différentes théories de la gravitation à l'aide des observations cosmologiques.

Dans le cadre de cette thèse, nous avons travaillé avec les données des Supernovae Ia présentées en détails dans la section 1.4.2. L'idée est d'utiliser les données des Supernovae pour contraindre les théories alternatives de la gravitation. La stratégie suivie est légèrement différente que celle développée dans le Système Solaire. Au niveau cosmologique, la stratégie se décompose en trois étapes :

1. simulations des données de distance-luminosité en fonction du redshift dans la théorie alternative considérée. Ces simulations se font par l'intégration des équations de champs dans le cadre cosmologique et permettent d'obtenir numériquement la relation $\mu(z)$ pour

un jeu de paramètres donnés (paramètres caractérisant la théorie alternative et paramètre de densité cosmologique de matière).

2. comparaison de cette simulation avec les données réelles fournies sous la forme (z_i, μ_i) et représentées à la figure 1.3. Cette comparaison se fait en calculant le χ^2 qui donne une idée de l'adéquation de la simulation avec les données.
3. répétition des étapes 1 et 2 un grand nombre de fois en variant les paramètres (paramètres caractérisant la théorie alternative et paramètre de densité cosmologique de matière) pour pouvoir faire une analyse statistique et dériver des régions de confiance statistiquement en adéquation avec les données.

Dans le cadre de ce travail, parmi les théories alternatives considérées, seuls les champs caméléons s'appliquent directement au niveau cosmologique. Nous avons donc analysé les données Supernovae Ia dans le cadre de cette théorie particulière et dérivé des régions de confiance pour les paramètres qui caractérisent cette théorie [Hees et Füzfa, 2012]. Nous avons ensuite comparé les régions des paramètres admissibles avec les régions autorisées par les contraintes du Système Solaire. Cette analyse combinée est relativement fructueuse car elle exclut la possibilité que les champs caméléons puissent expliquer l'expansion cosmique tout en satisfaisant les contraintes du Système Solaire. Cette analyse est présentée au chapitre 5.

1.5 Présentation succincte des théories alternatives considérées dans cette thèse

"The physics is theoretical,
But the fun is real."
S. Cooper

Dans cette section, nous allons évoquer les différentes théories alternatives considérées dans le cadre de cette thèse sans entrer dans les détails qui seront développés plus loin. L'objectif de cette section est de pouvoir différencier les différentes théories étudiées.

La première théorie considérée est la *Gravitation Post-Einsteinienne* (développée dans la section 4.3.1). Dans le cadre de cette thèse, PEG a été considérée comme étant une phénoménologie qui paramétrise la métrique (générée par une masse ponctuelle) par deux fonctions arbitraires de la coordonnée radiale. Précisons que initialement, la théorie PEG fut développée à partir d'une généralisation non-locale des équations d'Einstein [Jaekel et Reynaud, 2005b, 2006a]. Dans le cadre de la thèse, nous avons opté pour une interprétation phénoménologique de PEG fort semblable au formalisme PPN qu'elle étend. Il ne s'agit donc pas d'une théorie fondamentale bien définie (à partir d'une action par exemple). Cette phénoménologie n'a été développée que dans le cadre du Système Solaire dans lequel nous l'avons utilisé au chapitre 4.

La seconde théorie considérée est *l'effet de champ externe (EFE)* présent dans les théories MOND. L'effet de champ externe est un effet produit par une violation du principe d'équivalence fort des théories MOND [Milgrom, 2009; Blanchet et Novak, 2011a]. Cet effet consiste en une modification du potentiel Newtonien par l'ajout d'un terme quadrupolaire (comme indiqué à

la section 4.4.1). Cet effet se dérive à partir de la formulation non-relativiste de MOND qui est également une phénoménologie et non une théorie bien définie. La phénoménologie MOND peut être retrouvée comme limite de théories relativistes de la gravitation (qui elles sont de vraies théories bien définies) telles que les théories Tenseur-Vecteur-Scalaire (TeVeS) [Bekenstein, 2004] ou d'Einstein-Ether [Zlosnik et al., 2007] que nous présentons à la section 4.4.1. Cette phénoménologie peut aussi provenir d'une modification des propriétés de la matière en considérant une matière polarisée gravitationnellement [Blanchet, 2007]. L'effet de champ externe considéré dans le cadre de la thèse est valide dans le Système Solaire qui est le cadre dans lequel nous l'avons considéré.

La troisième théorie considérée porte le nom d'*extension du modèle standard (SME)* (développée dans la section 4.5.1). Le formalisme qui se cache derrière ce nom est très vaste et a été développé pour couvrir de façon systématique toutes les violations possibles de l'invariance de Lorentz qui proviendraient d'une théorie fondamentale. Ce formalisme a d'abord été introduit comme extension du modèle standard des particules [voir par exemple Colladay et Kostelecký, 1997, 1998; Bluhm, 2005] puis fut généralisé au secteur gravitationnel par Kostelecký [2004]. Au niveau gravitationnel, ce formalisme est une pseudo-théorie dans le sens où la théorie est définie à partir d'une action (contrairement aux deux autres théories présentées ci-dessus) ce qui signifie qu'elle possède des propriétés bien établies au niveau des lois de conservation. Par contre, cette action fait explicitement apparaitre des nouveaux tenseurs qui provoquent la brisure de l'invariance de Lorentz et qui doivent être liés à une théorie plus fondamentale. Dans le cadre de cette thèse, nous avons considéré uniquement la métrique Post-Newtonienne qui dérive de cette action [Bailey et Kostelecký, 2006] dans le cadre du Système Solaire.

Les deux dernières théories considérées dans le cadre de la thèse sont des *théories tenseur-scalaire* dans lesquelles un champ scalaire est ajouté à la métrique pour décrire l'interaction gravitationnelle. Ces extensions sont motivées pour diverses raisons. Tout d'abord, les théories tenseur-scalaire apparaissent naturellement dans les théories de dimensions supplémentaires (comme les théories de type Kaluza-Klein et de type cordes [voir par exemple Lidsey et al., 2000]). Les théories de gravité $f(R)$ (dans lesquelles l'action est une fonction du scalaire de courbure) sont également équivalentes à des théories tenseur-scalaire [voir par exemple Teyssandier et Tourrenc, 1983; de Felice et Tsujikawa, 2010]. Des champs scalaires apparaissent également dans les modèles de type DGP (Dvali-Gabadadze-Porrati) [Dvali et al., 2000; Nicolis et al., 2009]. Les théories tenseur-scalaire ont également été utilisées pour construire des modèles phénoménologiques de théories dans lesquelles le principe d'équivalence fort est violé (car la constante de gravitation G est remplacé par un champ scalaire) [Nordtvedt, 1968b; Füzfa et Alimi, 2009]. Finalement, des champs scalaires sont parfois invoqués pour expliquer les observations cosmologiques qui requièrent l'introduction de matière noire [voir par exemple Chiba, 1999; Alimi et al., 2010; Boisseau et al., 2000] ou dans des modèles d'inflation [voir par exemple le Chap. 16 de Hobson et al., 2006]. Il s'agit de théories bien définies à partir d'action.
La première théorie tenseur-scalaire considérée est une sous-classe de la théorie très générale des "Fab-Four" présentée à la section 4.6.1. Cette théorie a été développé pour des raisons cosmologiques (écrantage de l'énergie du vide). Cependant, dans le cadre de cette thèse, nous avons dérivé l'expansion Post-Newtonienne qui a été utilisée dans le cadre du Système Solaire.
L'autre théorie tenseur-scalaire considérée est les *champs caméléons* qui sont présentés dans le chapitre 5. Il s'agit d'une théorie qui présente un mécanisme d'écrantage (les déviations par

rapport à la RG sont camouflées dans certaines régions) développée par Khoury et Weltman [2004a,b]. Nous avons considéré cette théorie au niveau cosmologique où une analyse des données Supernovae a été réalisée ainsi qu'au niveau du Système Solaire où nous avons dérivé l'expression de la métrique Post-Newtonienne que nous avons contrainte à l'aide de la contrainte Cassini de Bertotti et al. [2003].

Chapitre 2

Simulations d'observables à partir de la métrique

"L'informatique, ça fait gagner beaucoup de temps...
A condition d'en avoir beaucoup devant soi !"
M. Stibon

Sommaire

2.1 Introduction 34
2.2 Définition des observables 34
2.2.1 Observables de type radioscience 35
2.2.2 Observables de type astrométrique 38
2.2.3 Observables de type VLBI 39
2.3 Simulations à partir de la métrique 40
2.3.1 Equations du mouvement 41
2.3.2 Comportement des horloges 43
2.3.3 Propagation du signal 44
2.3.4 Observables de type Range 49
2.3.5 Observables de type Doppler 50
2.3.6 Equations d'évolution de la tétrade 52
2.3.7 Observables de type astrométrique 53
2.4 Analyse numérique 55
2.4.1 Intégration numérique 55
2.4.2 Interpolation de Tchebychev 56
2.4.3 Inversion du temps propre 56
2.4.4 Dérivation de la métrique 57
2.5 Test du logiciel sur une métrique relativiste 59
2.6 Limitations du logiciel 61
2.7 Conclusion 62

2.1 Introduction

Comme mentionné dans la section 1.3, l'idée générale de ce travail est de réaliser des simulations d'observations spatiales dans diverses théories de la gravitation. Ainsi, en comparant des simulations provenant d'une théorie alternative avec une simulation en Relativité Générale, nous pourrons identifier la signature provenant de la théorie alternative et identifier l'ordre de grandeur associé. La section 1.3 présente en détails la procédure suivie. Dans ce chapitre, nous allons décrire l'étape 1 de cette procédure qui consiste à simuler des observables spatiales à partir de la métrique de l'espace-temps.

Le tenseur métrique est la brique de base d'une grande partie des théories de la gravitation. En général, une fois que la métrique est connue, il est possible de dériver les équations du mouvement des corps, les équations du mouvement des photons (la propagation de la lumière et des signaux électromagnétiques), ... Ainsi, tout ce qui est nécessaire pour simuler des observations spatiales peut se dériver de la métrique. C'est pourquoi, nous avons décidé de prendre comme élément de base de notre software la métrique de l'espace-temps et de tout dériver à partir de celle-ci. Cette approche associée à une conception modulaire du software permet de changer aisément la théorie de la gravité étudiée simplement en changeant le module correspondant à la métrique.

L'idée de développer un logiciel qui calcule tout à partir de la métrique de l'espace-temps n'est pas complètement neuve. Des prémices de cette idée se retrouvent dans la thèse de X. Moisson [2000] où il présente un prototype de logiciel qui permet de calculer la trajectoire des particules à partir de la métrique. Cette idée de Relativistic Motion Integrator (RMI) fut ensuite développée par Pireaux et al. [2004, 2005, 2006]; Pireaux [2008]; Pireaux et al. [2008]. Si la philosophie de départ de notre travail est la même que celle qui a conduit au développement de RMI, nous allons plus loin. En effet, dans RMI, seule la trajectoire d'une particule test est intégrée autour d'un corps central en RG. Comme nous l'avons précisé à la section 1.2.1, la trajectoire d'un corps est une quantité dépendante du système de coordonnées et pour cette raison n'est pas observable. La simulation d'observables n'a jamais été réalisée à partir de la métrique de l'espace-temps. Nous comblons donc ici un vide qui est conceptuellement crucial.

L'objectif de ce chapitre essentiellement technique est de présenter les méthodes utilisées pour réaliser des simulations d'observations à partir de la métrique. Ces méthodes seront présentées en détails, y compris les méthodes numériques utilisées et leurs limitations.

2.2 Définition des observables

La définition des observables que nous désirons simuler peut sembler anodine de prime abord. Cependant, il s'agit là d'une étape cruciale qui peut conduire à des erreurs importantes. L'importance de la définition provient du fait que la RG est invariante sous transformations de coordonnées (comme nous l'avons mentionné dans la section 1.2.1). Comme nous l'avons montré explicitement à la section 1.2.1, travailler avec des observables invariantes de jauge est crucial pour éviter de générer des effets qui ne sont pas physiques (mais uniquement liés au choix du jeu de coordonnées).

2.2.1 Observables de type radioscience

Nous entendons par radioscience une expérience qui mesure le temps de propagation et le décalage en fréquence de signaux électromagnétiques (à l'exception du VLBI). Ceci inclut toutes les mesures de poursuite de sondes spatiales, les tirs au laser sur un corps du Système Solaire, le GPS, ...

La situation générale considérée, représentée à la figure 2.1 est la suivante : un signal électromagnétique est émis depuis un émetteur (dénoté par un indice e par la suite), il est éventuellement réceptionné et transmis (l'indice t dénotera la transmission) et il sera finalement détecté par un observateur (dénoté par la lettre r). La figure 2.1 représente le cas d'une transmission "aller-retour" mais des situations correspondant à un "aller simple" peuvent également être considérées.

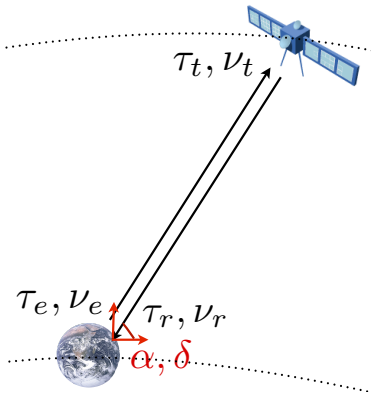

FIGURE 2.1 – Schéma représentant un exemple de situation simulée : l'émission du signal se fait depuis la Terre, il est transmis depuis un satellite et il revient vers la Terre. Les différentes quantités (les temps propres d'émission et de réception (τ_e et τ_r), les fréquences émise ν_e et observée ν_r de même que les angles (α et δ) du signal reçu observé dans un référentiel local) nécessaires pour la définition des observables sont représentées.

Le signal émis est caractérisé par une fréquence propre ν_e et par son temps d'émission τ_e (ce temps est le temps propre de l'émetteur lors de l'émission du signal, il s'agit du temps physique tel que donné par une horloge transportée par l'émetteur). De façon similaire, le signal observé est caractérisé par sa fréquence propre ν_r et son temps de réception τ_r (qui est le temps propre du récepteur au moment de la réception).

Nous pouvons alors définir le *Range* (évalué au moment de la réception) comme étant le temps propre de la propagation du signal. Plus précisément, le Range est défini par [1]

$$\boxed{R(\tau_r) = \tau_r - \tau_e.} \tag{2.1}$$

Le *Doppler*, quant à lui, est défini comme étant le rapport entre la fréquence reçue et la fréquence

1. Par la suite, le Range est généralement exprimé en terme de longueur plutôt qu'en terme d'un temps. Ceci se fait en considérant la quantité cR.

émise [2]

$$\boxed{D(\tau_r) = \frac{\nu_r}{\nu_e}.} \tag{2.2}$$

Insistons encore sur le fait que ces définitions couvrent aussi bien le cas d'un signal "two-way" (aller-retour) que le cas d'un signal "one-way" (aller simple). Dans ce dernier cas, les temps propres d'émission et de réception sont mesurés par deux horloges différentes.

Ces définitions sont des observables car elles sont construites à partir de temps/fréquences propres qui sont des quantités invariantes de jauge. Nous sommes donc certains que le Doppler et le Range ainsi définis ne dépendent pas du choix du jeu de coordonnées. Les définitions dépendantes de coordonnées (définissant le Range comme étant la distance coordonnée entre l'émetteur et le récepteur et le Doppler comme étant la vitesse coordonnée relative entre l'observateur et l'émetteur le long de la ligne de visée [Yseboodt et al., 2003]) ne sont pas invariantes et donc ne seront pas utilisées ici.

Il est intéressant de voir que les définitions données ci-dessus correspondent bien au processus expérimental utilisé pratiquement lors des mesures de Range et de Doppler. Pour ce faire, nous allons expliciter brièvement (sans entrer dans les détails techniques) le protocole expérimental utilisé lors de mesures de radioscience.

D'un point de vue expérimental [une description complète peut être trouvée dans Zarrouati, 1987], une mesure de Range est réalisée comme suit : un signal électromagnétique est envoyé et ensuite réceptionné. Différentes technologies permettent de réaliser cette mesure :

- mesure par laser pulsé : mesure la durée écoulée entre l'émission et la réception d'un "pulse" laser très concentré dans le temps.
- mesure par tons : le signal envoyé est constitué de plusieurs signaux harmoniques. A la réception, il est possible de mesurer la durée de propagation en mesurant le déphasage des différentes harmoniques.
- mesure par code pseudo-aléatoire : le signal envoyé est un code binaire pseudo-aléatoire. Il est donc possible de mesurer de façon univoque le déphasage entre le code envoyé et reçu pour déterminer la durée de propagation.

Les méthodes précédentes sont très bien adaptées dans le cas où la station de réception et d'émission sont confondues (cas d'un aller-retour). Si ce n'est pas le cas (cas d'un aller simple), il faut en plus coder le temps d'émission du signal dans le signal lui-même, ce qui peut se faire par modulation d'amplitude. On compare ainsi deux dates provenant d'horloges différentes. Il n'est pas nécessaire d'introduire une convention de synchronisation des horloges. Par contre, au moment d'analyser les données, il faut être attentif au fait que chaque horloge a une condition initiale qui lui est propre (et qu'il faudra ajuster aux mêmes titres que les positions et vitesses initiales comme nous l'expliquerons au chapitre 3). En conclusion, nous pouvons remarquer que le protocole expérimental des mesures de Range correspond effectivement bien à une mesure de temps propre comme la définition (2.1) l'indique.

En ce qui concerne les mesures de Doppler, la situation est plus complexe. En effet, pratiquement, on ne mesure pas la fréquence instantanée du signal mais bien un nombre de cycles (par

2. Le Doppler est parfois exprimé en terme de vitesse plutôt que par une grandeur adimensionnée. Ceci se fait en considérant la quantité $c(D-1)$.

exemple le nombre de passage par 0 d'un signal harmonique) sur un temps de comptage défini (généralement entre 5 s et 1000 s [Balmino, 1988]). Mathématiquement, la quantité mesurée s'exprime par

$$N(\tau_r) = \int_{\tau_r-\delta\tau/2}^{\tau_r+\delta\tau/2} \nu_r(\tau) d\tau \tag{2.3}$$

où $\delta\tau$ est le temps de comptage [3]. Si nous notons $\tau_e(\tau_r \pm \delta\tau/2)$ le temps propre d'émission du signal qui a été observé au temps propre $\tau_r \pm \delta\tau/2$, nous pouvons écrire que la quantité mesurée $N(\tau_r)$ correspond à

$$\begin{aligned} N(\tau_r) &= \int_{\tau_e(\tau_r-\delta\tau/2)}^{\tau_e(\tau_r+\delta\tau/2)} \nu_e(\tau) d\tau = \nu_e \left[\tau_e(\tau_r+\delta\tau/2) - \tau_e(\tau_r-\delta\tau/2)\right] \\ &= \nu_e \left[\tau_e(\tau_r+\delta\tau/2) - \tau_r - \delta\tau/2 - \tau_e(\tau_r-\delta\tau/2) + \tau_r - \delta\tau/2 + \delta\tau\right] \\ &= -\nu_e \left[R(\tau_r+\delta\tau/2) - R(\tau_r-\delta\tau/2) - \delta\tau\right] \end{aligned} \tag{2.4}$$

où nous avons supposé que la fréquence d'émission était connue et constante pendant la période d'émission (qui correspond au temps de comptage). Etant donné que ν_e et le temps de comptage $\delta\tau$ sont connus, la mesure du nombre de cycles N est équivalente à une mesure de différence de Range entre deux signaux dont la réception est séparé de $\delta\tau$. Si nous prenons le quotient de la différence de Range par le temps de comptage, nous obtenons le *Range Rate* qui est une quantité directement liée à la mesure [Balmino, 1988; Zarrouati, 1987; Tommei et al., 2010]

$$RR(\tau_r) = \frac{R(\tau_r+\delta\tau/2) - R(\tau_r-\delta\tau/2)}{\delta\tau} = 1 - \frac{N(\tau_r)}{\delta\tau\ \nu_e}. \tag{2.5}$$

Le Range Rate et le Doppler (D) ne sont pas identiques mais peuvent être reliés l'un à l'autre par le fait que

$$\begin{aligned} RR(\tau_r) &= \frac{1}{\delta\tau}\int_{\tau_r-\delta\tau/2}^{\tau_r+\delta\tau/2} \frac{dR(\tau)}{d\tau} d\tau = -\frac{1}{\delta\tau}\int_{\tau_r-\delta\tau/2}^{\tau_r+\delta\tau/2} \frac{d\tau_e}{d\tau} d\tau = -\frac{1}{\delta\tau}\int_{\tau_r-\delta\tau/2}^{\tau_r+\delta\tau/2} \frac{\nu(\tau)}{\nu_e} d\tau \\ &= -\frac{1}{\delta\tau}\int_{\tau_r-\delta\tau/2}^{\tau_r+\delta\tau/2} D(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Le résultat d'une mesure physique diffère de la définition du Doppler (2.2) par le fait qu'il s'agit d'une mesure du Doppler intégré sur le temps de comptage. En pratique, la définition (2.5) pourrait être utilisée. Cependant, pour des raisons numériques, cette définition n'est pas utilisée dans ce travail. En effet, l'opération de soustraction entre deux nombres proches induit une perte de précision numérique qui n'est plus acceptable avec la précision attendue pour les futures missions spatiales et il est préférable d'utiliser la formulation intégrale (ce problème est discuté en détails par Tommei et al. [2010]).

Le fait d'utiliser la définition (2.2) pour le Doppler se justifie si on considère des temps de comptage courts par rapport au temps caractéristique de variation du Doppler. Dans ce cas, nous obtenons

$$RR(\tau_r) \approx -D(\tau_r). \tag{2.7}$$

3. En fait, étant donné que les fréquences utilisées sont très élevées, il n'est pas possible de compter le nombre de cycles. La solution consiste à faire battre la fréquence ν_r avec une fréquence voisine de référence et à compter les battements du signal. Cette petite complication technique ne change rien à la discussion.

Par conséquent, les signaux obtenus en calculant des valeurs de Doppler seront extrêmement proches des signaux obtenus en réalité. L'avantage majeur est que la définition du Doppler ne souffre pas du problème numérique décrit au paragraphe précédent.

Le point clef de cette section est les définitions du Range (2.1) et du Doppler (2.2). Ces deux définitions sont des observables (ce qui est une condition indispensable vu la discussion de la section 1.2.1) et correspondent bien à la mesure expérimentale.

2.2.2 Observables de type astrométrique

L'objectif de l'astrométrie est de déterminer la position des corps sur la sphère céleste. Trouver une définition indépendante de coordonnées pour les observables astrométriques est une chose plus délicate que dans le cas de la radioscience. La définition la plus logique est de considérer le résultat d'une expérience : considérer la direction de propagation du rayon lumineux provenant du corps considéré telle qu'observée par un observateur donné (comme représenté à la figure 2.1). Cette définition est très intuitive et se comprend aisément d'un point de vue physique : cela correspond à un observateur qui mesure la direction incidente d'un rayon lumineux (que nous noterons $\vec{n}$). Au lieu de considérer le vecteur $\vec{n}$, il est usuel de définir des ascensions droites α et déclinaisons δ en adoptant la convention suivante

$$\vec{n} = (\cos\alpha\cos\delta, \sin\alpha\cos\delta, \sin\delta). \tag{2.8}$$

Cependant, la définition est jusqu'ici incomplète car il faut préciser le système de référence par rapport auquel est mesurée la direction du rayon lumineux. Le choix le plus logique est de considérer un référentiel inertiel comobile avec l'observateur (représenté dans la figure 2.1). D'un point de vue mathématique cela se traduit par l'emploi d'une tétrade comobile (le terme vierbein est parfois utilisé dans le langage mathématique) qui est la traduction mathématique d'un référentiel localement Minkowskien (appelé aussi Lorentzien dans Misner et al. [1973]). Le formalisme des tétrades est rappelé dans l'annexe A. Pour résumer simplement, l'espace-temps étant modélisé par une variété différentiable, une tétrade est une base de l'espace tangent qui diagonalise localement la métrique de l'espace-temps et qui soit comobile avec l'observateur. Ainsi, dans cette base, la physique est localement celle de la relativité restreinte (ce qui est l'expression du principe d'équivalence d'Einstein énoncé à la section 1.2.2) et la direction observée du rayon lumineux est simplement donnée par le vecteur d'onde. Une fois la tétrade comobile connue, il suffit d'exprimer les composantes du vecteur d'onde du rayon lumineux dans la base de la tétrade pour obtenir la direction observée du rayon.

Il nous reste à déterminer comment cette tétrade est construite. L'annexe A présente diverses constructions de tétrades comobiles. Dans notre cas, deux tétrades sont intéressantes : une tétrade locale qui est "cinématiquement" non-tournante par rapport au jeu de coordonnées globales et une tétrade locale "dynamiquement" non tournante. Ces deux repères de référence furent introduits par Klioner [1993]; Klioner et Soffel [1998]. Le premier repère (cinématiquement non-tournant) essaie de rétablir un semblant d'espace Newtonien dans lequel les directions de l'espace sont fixées à priori. Cette tétrade est induite par les coordonnées globales. Par conséquent, elle est dépendante des coordonnées et ne peut être utilisée dans l'optique de générer des observables strictement indépendantes de coordonnées. La seconde possibilité consiste à utiliser un repère

dynamiquement non-tournant. Physiquement, un tel référentiel est réalisé par le transport de gyroscopes. Mathématiquement, la tétrade est modélisée par une tétrade qui est transportée par Fermi-Walker (voir à la section A.2.2). Cette tétrade est alors définie de manière indépendante du jeu de coordonnées et remplit bien les conditions attendues. De plus, cette définition a un sens physique très clair : il est possible de définir l'observable à partir de deux gyroscopes et un télescope. Cette observable est donc manifestement invariante.

En résumé les observables astrométriques sont définies comme étant les directions de propagation des signaux électromagnétiques observées dans une tétrade comobile transportée Fermi-Walker par l'observateur. Remarquons en passant que le fait de définir les observables astrométriques dans une tétrade est également utilisé dans la modélisation de la mission Gaia [Klioner, 2004].

2.2.3 Observables de type VLBI

Une observation VLBI (Very Large Baseline Interferometry) consiste en une mesure de la différence entre les temps propres de réception d'un même signal reçu par deux stations différentes (la figure 2.2 représente schématiquement la mesure VLBI). Une description très rigoureuse des observables VLBI consiste à considérer la position de deux stations de réception sur la Terre et à calculer les temps propres de réception de ces deux stations. La différence de ces temps propres est dénotée $\delta\tau$.

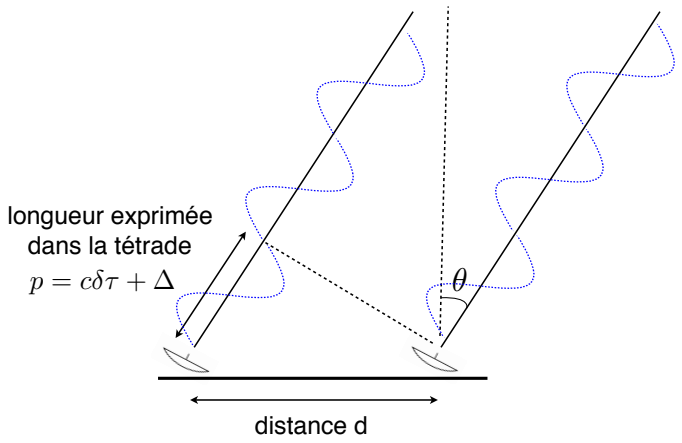

FIGURE 2.2 – Schéma représentant les observations VLBI. La quantité mesurée est la différence de temps propre $\delta\tau$ entre la réception du même signal par deux stations différentes. Cette quantité mesurée est ensuite interprété en terme d'une direction d'arrivée du signal observé dans un référentiel local.

La simulation de la position des deux stations doit se faire dans un référentiel planétocentrique. Cependant, pour des raisons évoquées à la section 2.6, nous n'avons considéré qu'un seul jeu de coordonnées dans nos simulations. Nous ne disposons donc pas de référentiel planétocentrique et il ne nous est pas possible de simuler la position de deux stations VLBI de façon cohérente.

Néanmoins, si nous considérons une tétrade comobile avec la Terre, nous pouvons relier la mesure de différence des temps propres à une longueur coordonnée exprimée dans la tétrade qui représente le déphasage entre les signaux reçus par les deux stations (cette longueur est notée p sur la figure 2.2). Ce lien se fait en corrigeant la différence de temps propre d'effets comme la désynchronisation des horloges (ces effets sont notés Δ). En associant cette longueur avec la distance entre les deux stations de mesure (notée d), il est aisé de dériver la direction du signal mesurée dans la tétrade locale (notée par l'angle θ sur la figure 2.2). Dans ce sens, la mesure VLBI peut être assimilée à une mesure astrométrique. Ceci n'est évidemment pas exact en toute rigueur mais est correct si on néglige les variations du champ gravitationnel sur la distance d.

En résumé, dans ce travail, nous considérerons les observables VLBI comme des observables astrométriques donnant la direction des rayons lumineux provenant des objets observés dans une tétrade locale comme développé à la section précédente.

2.3 Simulations à partir de la métrique

Cette section est dédiée à une présentation approfondie de la façon dont il est possible de simuler les observables définies dans la section précédente à partir de la métrique de l'espace-temps. La métrique est donc la brique de base du logiciel développé et d'un point de vue pratique, la métrique est codée dans un module spécifique du logiciel de telle façon qu'il soit possible de la modifier aisément.

Détaillons tout d'abord les étapes nécessaires pour calculer les différentes observables. Pour calculer les observables de type radioscience (Range et Doppler), il faut

- dériver et intégrer les équations du mouvement qui donneront les expressions des trajectoires des planètes et satellites considérés ;
- dériver et intégrer l'équation du temps propre pour les différentes horloges présentes dans la mesure ;
- calculer le transfert de temps (propagation d'un signal électromagnétique) en espace-temps courbe ;
- déterminer le décalage en fréquence en espace-temps courbe.

En ce qui concerne les observables de type astrométrique, il faudra en plus des étapes citées ci-dessus

- calculer une tétrade initiale ;
- dériver et intégrer les équations de Fermi-Walker qui modélisent le transport de la tétrade ;
- calculer la direction de propagation du rayon lumineux dans la base naturelle de coordonnées ;
- transformer l'expression de la direction de propagation du rayon lumineux dans la tétrade locale.

Ces différentes étapes permettent de simuler les observables à partir de la métrique de l'espace-temps. Ces étapes sont représentées à la figure 2.3. Ci-dessous, nous allons les détailler une à une et montrer comment il est possible de tout calculer à partir de la métrique $g_{\mu\nu}$. Nous commencerons par détailler pour chaque étape les méthodes d'un point de vue théorique. Après cela, la section 2.4 sera consacrée à la description des méthodes numériques employées dans le

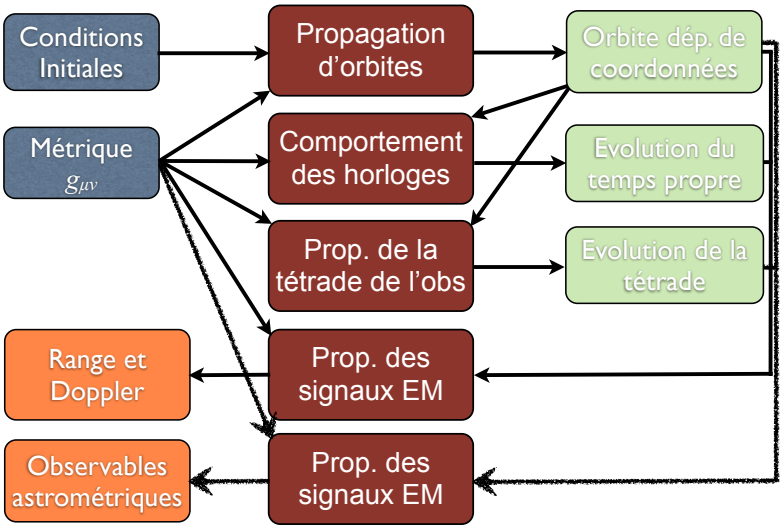

FIGURE 2.3 – Représentation des différentes étapes nécessaires pour simuler des observables à partir de la métrique de l'espace-temps.

logiciel. Finalement, dans la section 2.5, nous utiliserons les méthodes présentées dans ce chapitre à partir d'une métrique relativiste pour montrer que nous obtenons des résultats cohérents avec la littérature. Ceci nous permettra également de valider le logiciel.

2.3.1 Equations du mouvement

Les équations du mouvement intégrées sont les équations des géodésiques. Rappelons que les géodésiques modélisent les trajectoires des masses ponctuelles qui ne sont soumises à aucune force de type non-gravitationnelle. Cette équation peut se dériver par la minimisation de l'action associée à une particule ponctuelle, libre et de masse m donnée dans Landau et Lifshitz [1975]

$$S = -\int mc^2 d\tau. \tag{2.9}$$

En effet, la variation de cette action $\delta S = 0$ donne l'équation des géodésiques [Landau et Lifshitz, 1975; Hobson et al., 2006]

$$c\frac{Du^\alpha}{D\tau} = c^2 u^\beta u^\alpha_{;\beta} = \frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{2.10}$$

où dans cette expression $u^\alpha = 1/c\ dx^\alpha/d\tau$ représente la quadri-vitesse, la dérivée $D/D\tau$ est une dérivée covariante et $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ sont les symboles de Christoffel définis à la relation (5).

Une manière géométrique de dériver l'équation des géodésiques est de considérer la conservation du tenseur énergie-impulsion et d'appliquer cette loi de conservation à un fluide de poussière (c'est-à-dire sans pression) dont le tenseur énergie-impulsion est $T^{\mu\nu} = c^2\rho u^\mu u^\nu$ [la dérivation peut se trouver dans Hobson et al., 2006; Brumberg, 1991; Gérard, 2007]

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 = (\rho u^\mu u^\nu)_{;\nu} = (\rho u^\nu)_{;\nu} u^\mu + \rho u^\nu u^\mu{}_{;\nu}. \tag{2.11}$$

En contractant la dernière équation avec u_μ et en utilisant le fait que $u_\mu u^\mu_{;\nu} = 0$ (résultant de la constance de la norme de la quadri-vitesse), nous déduisons l'équation de conservation relativiste

$$(\rho u^\mu)_{;\mu} = 0. \tag{2.12}$$

En injectant cette équation de conservation dans l'expression (2.11), nous retrouvons l'équation des géodésiques $u^\nu u^\mu_{;\nu} = 0$ qui peut se réécrire sous la forme (2.10).

Cependant, l'équation des géodésiques telle que présentée ci-dessus à l'équation (2.10) n'est pas satisfaisante pour notre logiciel. En effet, l'intégration de ces équations différentielles donne l'évolution de la trajectoire de chacun des corps considérés en fonction de son temps propre. Ceci signifie que l'intégration de ces équations fournirait les évolutions des trajectoires de chacun des corps dans des échelles de temps différentes ; ce qui n'est absolument pas pratique. En conséquent, il est beaucoup plus pratique d'intégrer le mouvement de tous les corps par rapport au temps de coordonné t. C'est cette approche qui est adoptée dans les éphémérides [Fienga et al., 2009]. Pour ce faire, il faut transformer l'équation des géodésiques pour en donner une version qui fasse apparaître des dérivées par rapport au temps coordonné t au lieu des dérivées par rapport au temps propre τ. Il suffit d'appliquer les règles de dérivation

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{d^2x^i}{d\tau^2}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + \frac{dx^i}{d\tau}\frac{d^2\tau}{dt^2} = \frac{d^2x^i}{d\tau^2}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 - \frac{dx^i}{d\tau}\frac{d^2t}{d\tau^2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-3},$$

de remplacer $d^2x^i/d\tau^2$ par son expression donnée par la composante spatiale de (2.10), $dt^2/d\tau^2$ par l'expression donnée par la composante 0 de (2.10) (en prenant garde au fait que $x^0 = ct$) et nous trouvons

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} + \frac{1}{c}\Gamma^0_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^i}{dt}. \tag{2.13}$$

En développant les termes, nous obtenons

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{00} - 2\Gamma^i_{0j}\beta^j - \Gamma^i_{jk}\beta^j\beta^k + \Gamma^0_{00}\beta^i + 2\Gamma^0_{0j}\beta^i\beta^j + \Gamma^0_{jk}\beta^i\beta^j\beta^k} \tag{2.14}$$

où $\beta^i = \frac{1}{c}\frac{dx^i}{dt}$. Cette équation se dérive donc à partir de la métrique et de sa dérivée première (nécessaire pour calculer les symboles de Christoffel (5)). L'intégration de ces équations donne l'évolution de la trajectoire des corps en fonction du temps coordonné t.

Précisons que toutes les trajectoires des corps modélisés sont intégrées. Le logiciel n'utilise pas d'éphémérides extérieures. Ce choix se justifie car les éphémérides actuelles (telles que INPOP [Fienga et al., 2009, 2011], DE [Newhall et al., 1983] ou EPM [Pitjeva, 2005]) sont calculées en utilisant la théorie de la RG ou éventuellement le formalisme PPN [Fienga et al., 2010; Folkner, 2010b; Pitjeva, 2010] et notre objectif est d'aller au-delà. Dans un but de consistance, nous préférons intégrer également les trajectoires planétaires dans la théorie considérée. Cette remarque fait d'ailleurs apparaître un problème soulevé par A. Fienga [2011] : les éphémérides et les traitements des observables de type radioscience sont effectués de manière indépendante. Ceci conduit à une incohérence (au moins d'un point de vue conceptuel) car les tests de gravité effectués en analysant les données des poursuites de sondes spatiales utilisent des éphémérides produites en RG et inversement les tests de gravité effectués avec les éphémérides utilisent des données radioscience traitées en RG. Un traitement complètement consistant et cohérent du

point de vue théorique consisterait à réaliser un unique test de la gravité qui impliquerait une modification de la gravitation à la fois dans le traitement des observables et dans les éphémérides. L'approche adoptée ici permet d'éviter ce type de problème et d'être complètement cohérent.

Le point central de cette section consiste en l'équation (2.14) qui permet de calculer les trajectoires des corps à partir de la métrique de l'espace-temps et sa dérivée première.

2.3.2 Comportement des horloges

Comme nous venons de le voir, l'intégration des équations du mouvement se fait par rapport au temps coordonné t. Par contre, les observables radioscience (2.1-2.2) sont définies à partir du temps propre (invariant sous transformations de coordonnées). Il faut donc donner le lien entre ces deux échelles de temps aux lieux d'observation.

Le temps propre fut défini géométriquement par Minkowski [1909a,b] comme étant $cd\tau = \sqrt{-\mathbf{g}(d\mathbf{x}, d\mathbf{x})}$ avec $\mathbf{g}$ la métrique, et $d\mathbf{x}$ un quadri-vecteur de genre espace (sous la forme présentée ici, il est clair que cette quantité est invariante de coordonnées). Comme indiqué par Gourgoulhon [2010, chap. 2.2], cette définition du temps est arbitraire. Ce qui distingue le temps propre, c'est qu'avec la définition donnée ci-dessus, les lois de la physique ont une forme relativement simple. Comme l'a mentionné Poincaré [1898], c'est pour une raison de commodité que cette définition est utilisée. Cette définition arbitraire du temps engendre directement la définition d'une horloge idéale qui est un dispositif donnant le temps propre. Le point important est donc de construire des dispositifs expérimentaux qui s'en approchent le plus possible. Aujourd'hui, les horloges atomiques constituent une bonne approximation d'une horloge idéale.

Dans le cas qui nous intéresse ici, il nous faut donc déterminer l'évolution du temps propre modélisant le comportement des horloges présentes. Pour ce faire, il suffit d'intégrer la définition du temps propre donnée ci-dessus le long de la ligne d'univers de l'horloge

$$\tau_{AB} = \frac{1}{c}\int_A^B \sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} \tag{2.15}$$

où τ_{AB} est le temps propre pour passer d'un événement A à un événement B et où l'intégrale est une intégrale de chemin le long de la ligne d'univers. Etant donné que l'intégration des équations du mouvement présentée à la Section 2.3.1 fournit l'évolution $x^i(t)$ et $v^i(t) = dx^i/dt$, nous allons utiliser la paramétrisation par le temps coordonné dans la formulation du temps propre qui devient

$$\tau_{AB} = \int_A^B \sqrt{-g_{00} - 2g_{0i}\beta^i - g_{ij}\beta^i\beta^j}\ dt \tag{2.16}$$

avec $\beta^i = v^i(t)/c$.

Ainsi, pour obtenir l'évolution du temps propre (qui modélise le comportement des horloges) à partir de la métrique, il faut intégrer l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{-g_{00} - 2g_{0i}\beta^i - g_{ij}\beta^i\beta^j}} \tag{2.17}$$

le long de la trajectoire de l'horloge. Pratiquement, cette équation peut s'intégrer en même temps que les équations du mouvement.

2.3.3 Propagation du signal

Cette section présente une méthode pour calculer le transfert de temps dans un espace-temps courbe en terme du temps coordonné t. Le lien avec le temps propre pour obtenir une observable sera fait à la section suivante.

Le transfert de temps se fait par des signaux électromagnétiques qui sont modélisés d'un point de vue théorique par des rayons. L'équation de propagation des rayons lumineux est donnée par l'équation des géodésiques nulles

$$\boxed{k^\mu k_\mu = 0, \qquad \text{et} \qquad \frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0} \tag{2.18}$$

où k^μ est un vecteur tangent au rayon électromagnétique ($k^\mu = dx^\mu/d\lambda$) avec λ un paramètre affine. L'annexe B donne deux dérivations de cette équation depuis les bases fondamentales de la physique. Cette annexe montre également que cette équation n'est applicable que dans un régime particulier appelé l'optique géométrique dont le domaine d'application est donné par (B.21). Pour rappel l'optique géométrique s'applique dans la limite des faibles longueurs d'onde, c'est-à-dire lorsque la longueur d'onde est petite par rapport à la longueur caractéristique de la courbure de l'espace-temps et par rapport à la longueur caractéristique de variations de l'amplitude de l'onde. Les fréquences utilisées dans les mesures de poursuite des sondes spatiales sont de l'ordre de quelques GHz ($1-2$ GHz pour la bande L, $2-4$ GHz pour la bande S, $8-12$ GHz pour la bande K [Turyshev et Toth, 2010]), ce qui donne des longueurs d'onde de l'ordre du cm :

$$\lambda \sim 1 - 50 \text{ cm}. \tag{2.19}$$

Une longueur caractéristique de la courbure de l'espace-temps peut être obtenue en considérant l'invariant de courbure pour une métrique de Schwarzschild (appelé aussi scalaire de Kretschmann) [Hobson et al., 2006, chap. 11.2]

$$\ell_R^{-4} \sim R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48(GM)^2}{c^4 r^6} \Longrightarrow \ell_R \sim r\sqrt{\frac{r}{r_s}} \tag{2.20}$$

où r est la coordonnée radiale de Schwarzschild et $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ est le rayon de Schwarzschild. Dans le Système Solaire, r est plus grand que le rayon de surface du Soleil $r \gg 696\,000$ km et nous obtenons donc que $\ell_R \gg 10^8$ km. Il est évident que l'approximation $\lambda \ll \ell_R$ est parfaitement vérifiée dans ce type d'expérience. La seconde condition pour appliquer l'optique géométrique stipule que la longueur d'onde doit être plus petite que la taille des objets avec lesquels le signal interagit. Dans le cas contraire, des phénomènes de diffusion et d'interférence peuvent apparaître et il faut alors considérer la nature ondulatoire du signal pour en décrire sa propagation. Cette hypothèse est néanmoins utilisée [4] et la propagation de la lumière peut être modélisée par les équations des géodésiques nulles (2.18).

4. Précisons tout de même que certaines corrections sont ajoutées pour tenir compte des effets liés à la propagation du signal dans l'atmosphère ou dans le plasma solaire.

Dans la littérature, plusieurs méthodes ont été développées pour calculer la trajectoire des rayons lumineux et le transfert de temps. Le calcul du transfert de temps revient à calculer le temps coordonné nécessaire pour que le signal électromagnétique parvienne d'un émetteur (dont la position est notée $\vec{x}_e$ et le temps coordonné d'émission t_e) à un observateur (dont la position est notée $\vec{x}_r$ et le temps coordonné de réception t_r), il se dérive à partir des équations des géodésiques nulles (2.18) avec des conditions initiales et finales données (les deux positions). Il s'agit donc d'un problème aux bords (*Boundary Value Problem (BVP)*). Nous allons citer et commenter brièvement les différentes méthodes qui existent dans la littérature pour calculer ce transfert de temps :

- la première méthode consiste à dériver analytiquement et intégrer analytiquement l'équation des géodésiques. Cette méthode a été utilisée en champs faibles par Blanchet et al. [2001] qui ont déterminé le transfert de temps dans une géométrie de Schwarzschild à l'ordre $1/c^3$. Cette méthode a également été utilisée par Chauvineau et al. [2005] dans le cadre de la mission LISA en termes de paramètres PPN. Klioner et Zschocke [2010] ont poussé le calcul analytique jusqu'au second ordre Post-Minkowskien [5]. Finalement, dans un cadre non perturbatif, notons qu'il existe des solutions analytiques des équations des géodésiques nulles pour les métriques de Schwarzschild et de Kerr [voir par exemple Chandrasekhar, 1998; Cadez et al., 1998; Fujita et Hikida, 2009; Čadež et Kostić, 2005; Kostić, 2012]. Toutes les méthodes présentées ci-dessus sont extrêmement rapides pour calculer le temps de propagation des signaux lumineux (car elles sont analytiques). Cependant, elles ne s'appliquent qu'à la géométrie de Schwarzschild (ou éventuellement de Kerr ou de type PPN), ce qui est relativement limité. Etant donné que notre objectif est d'implémenter une méthode qui soit la plus général possible par rapport à la métrique, nous n'utiliserons pas ces expressions analytiques. Finalement, dans le cadre de l'intégration des géodésiques, citons également le travail de Kopeikin et Schäfer [1999] qui ont calculé analytiquement la solution de l'équation des géodésiques au premier ordre Post-Minkowskien pour un ensemble de masses mobiles. Cependant, ces résultats ne s'appliquent que pour la RG.
- une seconde méthode utilise la théorie eikonale au lieu de l'intégration des géodésiques. Cette méthode développée par Ashby et Bertotti [2010] consiste à résoudre l'équation eikonale (B.23) de façon perturbative. Le principal défaut de cette méthode est qu'elle ne s'applique qu'à des métriques en coordonnées isotropes et dont les coefficients de la métrique ne dépendent que de la variable radiale (du moins jusqu'à présent, il est possible que cette méthode puisse être étendue pour une classe plus générale de métriques).
- la troisième méthode consiste en une intégration complètement numérique des équations des géodésiques avec utilisation d'une méthode de shooting. La méthode de shooting est nécessaire car le problème est un problème au bord et non un problème de Cauchy. Cette méthode est développée par San Miguel [2007]. Cette méthode est la plus générale et elle peut s'appliquer à n'importe quelle métrique.
- la dernière méthode qui utilise la *World Function de Synge* est une alternative au calcul explicite de la géodésique. La World Function introduite par Synge [voir par exemple Synge, 1960] et utilisée par Linet et Teyssandier [2002] pour calculer le transfert de temps à l'ordre $1/c^4$ dans des géométries axisymétriques. Cette approche fut généralisée par une expansion Post-Minkowskienne par Le Poncin-Lafitte et al. [2004]. Finalement, une version

5. Un développement perturbatif Post-Minkowskien consiste à développer toutes les quantités (en particulier la métrique) en séries du paramètre G.

plus simple permettant de calculer directement le transfert de temps fut développée par Teyssandier et Le Poncin-Lafitte [2008]. Avec cette méthode, le transfert de temps se calcule par une expansion Post-Minkowskienne dont les différents termes peuvent être calculés par des intégrales de fonctions dépendant de la métrique (et de ses dérivées) sur la trajectoire minkowskienne du photon (c'est-à-dire sur une ligne droite). Cette approche est particulièrement intéressante car elle permet de s'affranchir du calcul explicite de la trajectoire du photon dans un espace-temps courbe.

Les deux dernières méthodes pourraient être utilisées dans le logiciel développé mais la dernière méthode a été préférée pour deux raisons. Tout d'abord, la méthode de la World Function est plus rapide si on se limite aux premiers ordres par rapport à l'intégration complète des équations des géodésiques nulles [voir la présentation de Delva, 2010]. La seconde raison est liée à la précision numérique : pour des champs faibles, un développement Post-Minkowskien souffre moins d'erreurs d'arrondis par rapport à une méthode non-perturbative. Ces deux raisons ont motivé le choix de la méthode basée sur la World Function et la fonction de transfert de temps présenté par Teyssandier et Le Poncin-Lafitte [2008] pour calculer le temps de propagation du signal en espace-temps courbe. [6]

Suivant Teyssandier et Le Poncin-Lafitte [2008]; Jaekel et Reynaud [2005b, 2006a,b], nous introduisons la fonction de transfert de temps (*time transfer function*) $\mathcal{T}_r$ définie par

$$t_r - t_e = \mathcal{T}_r(\vec{x}_e, t_r, \vec{x}_r) \tag{2.21}$$

où t_r et t_e sont les temps coordonnés apparentés à la réception et à l'émission du signal et $\vec{x}_e$ et $\vec{x}_r$ sont les positions coordonnées de l'émetteur (au moment de l'émission) et du récepteur (au moment de l'observation). L'expression de la fonction de transfert de temps peut s'écrire [Teyssandier et Le Poncin-Lafitte, 2008]

$$t_r - t_e = \mathcal{T}_r(\vec{x}_e, t_r, \vec{x}_r) = \frac{1}{c} R_{er} + \frac{1}{c} \Delta_r(\vec{x}_e, t_r, \vec{x}_r) \tag{2.22}$$

où $R_{er} = |\vec{x}_r(t_r) - \vec{x}_e(t_e)|$ est la distance Euclidienne entre les points d'émission et de réception et Δ_r représente la contribution gravitationnelle au transfert de temps (c'est-à-dire une généralisation du délai Shapiro). La dernière équation est implicite car la position de l'émetteur dépend elle-même de la fonction de transfert de temps : $\vec{x}_e(t_e) = \vec{x}_e(t_r - \mathcal{T}_r)$.

Le calcul du transfert de temps se fait en deux étapes qui sont présentées ci-dessous. La première étape consiste à calculer le transfert de temps en espace-temps plat, ce qui revient à déterminer le temps d'émission Minkowskien noté t_{em}. Cette première étape est réalisée par l'algorithme 1 présenté ci-dessous. La seconde étape consiste à calculer la correction liée à la courbure de l'espace-temps Δ_r dont l'expression est donnée à la relation (2.29).

Calcul du transfert de temps Minkowskien

La première étape pour le calcul du transfert de temps concerne la détermination de t_{em} le temps d'émission du signal en négligeant la courbure de l'espace-temps. Ce temps d'émission est

6. Précisons en passant que dans le cas d'un champ fort, l'intégration complète des géodésiques serait un choix plus judicieux.

solution de l'équation non-linéaire

$$t_r - t_{em} = \frac{|\vec{x}_r(t_r) - \vec{x}_e(t_{em})|}{c}. \tag{2.23}$$

Cette équation peut se résoudre numériquement par une procédure itérative. La procédure itérative est standard (on note par ϵ la précision désirée) :

Algorithme 1 Algorithme de calcul de t_{em}

1: Données : $\vec{x}_r(t_r), t_r, \vec{x}_e(t)$
2: Initialisation : $i = 0$, $t_{em}^{(0)} = t_r$
3: **while** $\left| t_{em}^{(i)} + \frac{\left|\vec{x}_r(t_r) - \vec{x}_e(t_{em}^{(i)})\right|}{c} - t_r \right| > \epsilon$ **do**
4: $\quad t_{em}^{(i+1)} = t_r - \frac{\left|\vec{x}_r(t_r) - \vec{x}_e(t_{em}^{(i)})\right|}{c}$
5: $\quad i = i + 1$
6: **end while**
7: **return** $t_{em} = t_{em}^{(i)}$.

Nous pouvons démontrer que cet algorithme converge en remarquant que la procédure revient à calculer le point fixe de la fonction $f(t) = t_r - \frac{|\vec{x}_r(t_r) - \vec{x}_e(t)|}{c}$. Le théorème du point fixe de Banach stipule que le point fixe de f est unique et que l'algorithme converge si la fonction f est une contraction, c'est-à-dire si la fonction f est une application $k-$lipschitzienne avec $0 \leq k \leq 1$. Il suffit donc de montrer que f est une application contractante, ce qui veut dire que f vérifie la condition

$$\forall (t_1, t_2), \quad |f(t_1) - f(t_2)| \leq |t_1 - t_2| \,. \tag{2.24}$$

Ceci se fait aisément en utilisant l'inégalité du triangle

$$|f(t_1) - f(t_2)| = \frac{1}{c} \left| \; |\vec{x}_r(t_r) - \vec{x}_e(t_2)| - |\vec{x}_r(t_r) - \vec{x}_e(t_1)| \; \right| \leq \frac{1}{c} |\vec{x}_e(t_1) - \vec{x}_e(t_2)| \tag{2.25}$$

et en notant V_{max} la vitesse maximale de l'émetteur dans l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$, nous pouvons écrire

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq \frac{1}{c} |\vec{x}_e(t_1) - \vec{x}_e(t_2)| \leq \frac{V_{max}}{c} |t_1 - t_2| \leq |t_1 - t_2| \,. \tag{2.26}$$

Ceci démontre donc que l'application f est une contraction et donc que l'algorithme converge dans tous les cas. Notons que la vitesse de convergence de l'algorithme dépend de $\frac{V_{max}}{c}$: plus ce rapport sera petit plus l'algorithme convergera rapidement. En pratique, les vitesses considérées (qui sont celles des planètes ou des spacecraft) sont très petites devant la vitesse de la lumière et l'algorithme converge très rapidement (en deux ou trois itérations).

Une méthode alternative pour calculer le temps de propagation Minkowskien consiste à faire une expansion de l'équation (2.23) jusqu'à l'ordre $1/c^3$ [Petit et Wolf, 1994]

$$\begin{aligned} t_{em} \;=\; & t_r - \frac{D_{er}}{c} - \frac{\vec{D}_{er} \cdot \vec{v}_e(t_r)}{c^2} \\ & - \frac{D_{er}}{2c^3} \left[v_e(t_r)^2 + \left(\frac{\vec{D}_{er} \cdot \vec{v}_e(t_r)}{D_{er}} \right)^2 - \vec{a}_e(t_r) \cdot \vec{D}_{er} \right] + \mathcal{O}(1/c^4) \end{aligned} \tag{2.27}$$

où $\vec{D}_{er} = \vec{x}_r(t_r) - \vec{x}_e(t_r)$, $D_{er} = \left|\vec{D}_{er}\right|$, $\vec{v}_e$ est la vitesse coordonnée de l'émetteur au moment de la réception du signal et $\vec{a}_e$ est son accélération coordonnée.

Les deux méthodes ont été implémentées et comparées. La méthode itérative fut choisie car elle produit des résultats plus précis (et valides à n'importe quelle ordre en $1/c$).

Corrections gravitationnelles pour le transfert de temps

La seconde étape pour calculer le transfert de temps consiste à calculer la correction gravitationnelle. Pour ce faire, comme annoncé ci-dessus, nous allons utiliser le formalisme de la World Function et plus précisément, le développement Post-Minkowskien de la fonction de transfert de temps présenté par Teyssandier et Le Poncin-Lafitte [2008]. Dans ce contexte, la fonction de transfert de temps se décompose comme indiqué à la relation (2.22). La seconde partie de cette expression concerne la correction gravitationnelle et peut être exprimée sous une expansion Post-Minkowskienne [7]. Si nous introduisons la correction Post-Minkowskienne de la métrique

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \tag{2.28}$$

(qui est donc du premier ordre Post-Minkowskien), il est possible d'exprimer la correction gravitationnelle de l'équation (2.22) sous la forme [Teyssandier et Le Poncin-Lafitte, 2008]

$$\Delta_r(\vec{x}_e, t_r, \vec{x}_r) = \Delta_r^{(1)}(\vec{x}_e, t_r, \vec{x}_r) + \mathcal{O}(G^2/c^4)$$

$$\boxed{\Delta_r^{(1)}(\vec{x}_e, t_r, \vec{x}_r) = \frac{R_{er}}{2}\int_0^1 f\left[h_{\mu\nu}(z^\alpha(\mu)), N_{er}^i\right] d\mu = \int_0^1 m(\mu) d\mu} \tag{2.29}$$

où les fonction f et m sont définies par

$$f\left[h_{\mu\nu}(z^\alpha(\mu)), N_{er}^i\right] = \left[h_{00} + 2N_{er}^i h_{0i} + N_{er}^i N_{er}^j h_{ij}\right]_{z^\alpha(\mu)} \tag{2.30a}$$

$$m(\mu) = \frac{R_{er}}{2} f\left[h_{\mu\nu}(z^\alpha(\mu)), N_{er}^i\right] = \frac{R_{er}}{2}\left[h_{00} + 2N_{er}^i h_{0i} + N_{er}^i N_{er}^j h_{ij}\right]_{z^\alpha(\mu)} \tag{2.30b}$$

où le chemin d'intégration $z^\alpha(\mu)$ est le chemin Euclidien entre l'émetteur et le récepteur (c'est-à-dire une ligne droite) paramétré par

$$z^0(\mu) = ct_r - \mu R_{er} \tag{2.31a}$$

$$z^i(\mu) = x_r^i(t_r) - \mu R_{er} N_{er}^i \tag{2.31b}$$

et la fonction $m_{,\alpha}$ qui sera utilisée par la suite dénote

$$m_{,\alpha}(\mu) = \frac{R_{er}}{2}\left[h_{00,\alpha} + 2N_{er}^i h_{0i,\alpha} + N_{er}^i N_{er}^j h_{ij,\alpha}\right]_{z^\alpha(\mu)}. \tag{2.32}$$

Finalement, le vecteur unitaire N_{er}^i pointe de l'émetteur au récepteur

$$\vec{N}_{er} = \frac{\vec{x}_r(t_r) - \vec{x}_e(t_e)}{R_{er}}. \tag{2.33}$$

7. Rappelons qu'une expansion Post-Minkowskienne est une série perturbatrice dont les ordres sont comptés en terme du paramètre G.

En écrivant $t_e = t_{em} + \delta t_e$, la relation (2.22) devient

$$t_r - t_{em} - \delta t_e = \frac{|\vec{x}_r(t_r) - \vec{x}_e(t_{em} + \delta t_e)|}{c} + \frac{1}{c}\Delta_r(\vec{x}_e(t_{em} + \delta t_e), t_r, \vec{x}_r(t_r)). \tag{2.34}$$

Une expansion en δt_e permet de résoudre cette équation implicite

$$\begin{aligned} \delta t_e &= -\frac{1}{c}\Delta_r(\vec{x}_e(t_{em}), t_r, \vec{x}_r(t_r)) - \frac{1}{c}\delta t_e \vec{v}_e(t_{em}) \cdot \vec{\nabla}\Delta_r(\vec{x}_e(t_{em}), t_r, \vec{x}_r(t_r)) \\ &\quad + \frac{1}{c}\delta t_e \vec{N}_{er} \cdot \vec{v}_e(t_{em}) + \mathcal{O}(\delta t_e^2). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Etant donné que Δ_r est en $\mathcal{O}(G/c^2)$, la dernière équation permet de voir que δt_e est en $\mathcal{O}(G/c^3)$. Si nous nous limitons au premier ordre Post-Minkowskien, le terme contenant la dérivée de Δ_r peut être négligé (il est en $\mathcal{O}(G^2/c^6)$), Nous pouvons alors utiliser l'expression (2.29) pour Δ_r pour trouver l'expression

$$\delta t_e = -\frac{1}{c}\Delta_r^{(1)}(\vec{x}_e(t_{em}), t_r, \vec{x}_r(t_r)) \left(1 + \frac{\vec{v}_e(t_{em}) \cdot \vec{N}_{er}}{c}\right) + \mathcal{O}(G^2/c^5). \tag{2.36}$$

En résumé, le temps coordonné d'émission du signal t_e est calculé à partir du temps coordonné de réception t_r par la relation

$$\boxed{t_e = t_{em} - \frac{1}{c}\Delta_r^{(1)}(\vec{x}_e(t_{em}), t_r, \vec{x}_r(t_r)) \left(1 + \frac{\vec{v}_e(t_{em}) \cdot \vec{N}_{er}}{c}\right) + \mathcal{O}(G^2/c^5)} \tag{2.37}$$

avec t_{em} calculé par l'algorithme 1 et $\Delta_r^{(1)}$ calculé par l'intégrale (2.29) réalisée sur la droite joignant l'émetteur au récepteur.

Il est clair que les formules développées dans cette section sont valides dans le cas d'un transfert de temps one-way (un aller simple). La généralisation à un signal two-way (aller-retour) est triviale : il suffit d'additionner le temps de parcours des différents trajets du signal.

La méthode présentée ici est donc valide jusqu'au premier ordre Post-Minkowskien, ce qui correspond à l'ordre $1/c^4$ ou encore à l'ordre 1.5 Post-Newtonien. Cette méthode est très générale car elle s'applique à n'importe quelle métrique. De plus, elle est particulièrement rapide d'un point de vue numérique car elle ne nécessite que l'intégration d'une fonction sur une droite. Cela permet de s'affranchir du calcul explicite de la trajectoire du photon en espace courbe qui est un problème plus délicat d'un point de vue numérique (car il s'agit d'un problème au bord). Finalement, mentionnons le fait que cette méthode peut être généralisée à des ordres supérieures comme indiqué dans Hees et al. [2012a].

2.3.4 Observables de type Range

Le calcul de l'observable Range à partir du temps de propagation coordonné déterminé à la section précédente se fait aisément. Pour rappel, la définition du range est $R(\tau_r) = \tau_r - \tau_e(\tau_r)$ où la fonction $\tau_e(\tau_r)$ se calcule en trois étapes comme indiqué à la figure 2.4 :

(a) transformation du temps propre de réception τ_r vers le temps coordonné t_r. Ceci se fait en inversant numériquement la relation $\tau_r(t)$ obtenue après intégration de la relation (2.17).

(b) calcul du temps de propagation coordonné par la relation (2.37) développée dans la section précédente. Nous obtenons ainsi le temps coordonné d'émission du signal t_e.

(c) transformation du temps coordonné d'émission t_e vers le temps propre d'émission τ_e. Ceci se fait en évaluant directement la relation $\tau_e(t)$ obtenue après intégration de la relation (2.17).

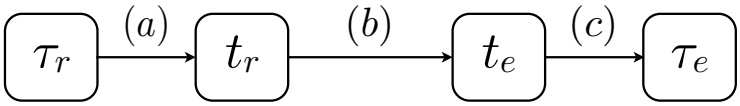

FIGURE 2.4 – Représentation des différentes étapes pour calculer le Range à partir du temps propre de l'observateur (noté τ_r).

2.3.5 Observables de type Doppler

Comme nous l'avons vu dans la section 2.2.1, le Doppler est modélisé comme le quotient entre la fréquence du signal reçu et la fréquence du signal émis. En suivant Blanchet et al. [2001], nous pouvons écrire le Doppler comme

$$D(\tau_r) = \frac{\nu_r}{\nu_e} = \frac{d\tau_e}{d\tau_r} = \left(\frac{d\tau}{dt}\right)_e \frac{dt_e}{dt_r} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)_r \tag{2.38}$$

où $d\tau_{e/r}$ représente la période propre du champ électromagnétique émis/reçu.

Le premier et le dernier facteur de la dernière expression s'évalue aisément à l'aide de l'équation (2.17). Le second terme présente plus de difficulté. La relation (2.21) nous permet d'écrire $t_e = t_r - \mathcal{T}_r(\vec{x}_e, t_r, \vec{x}_r)$. La dérivation de cette expression donne

$$\frac{dt_e}{dt_r} = 1 - \frac{d\mathcal{T}_r(\vec{x}_e, t_r, \vec{x}_r)}{dt_r} = 1 - \frac{\partial \mathcal{T}_r(\vec{x}_e, t_r, \vec{x}_r)}{\partial \vec{x}_e} \cdot \vec{v}_e(t_e) \frac{dt_e}{dt_r} - \frac{\partial \mathcal{T}_r(\vec{x}_e, t_r, \vec{x}_r)}{\partial t_r} - \frac{\partial \mathcal{T}_r(\vec{x}_e, t_r, \vec{x}_r)}{\partial \vec{x}_r} \cdot \vec{v}_r(t_r), \tag{2.39}$$

ce qui après une mise en évidence conduit à l'expression

$$\frac{dt_e}{dt_r} = \frac{1 - \frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial t_r} - \frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial \vec{x}_r} \cdot \vec{v}_r(t_r)}{1 + \frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial \vec{x}_e} \cdot \vec{v}_e(t_e)}. \tag{2.40}$$

Cette expression a déjà été dérivée par Jaekel et Reynaud [2006b] et est consistante avec l'équation (A.46) de Blanchet et al. [2001]

$$\frac{dt_e}{dt_r} = \frac{(k_0)_r}{(k_0)_e} \frac{1 + \left(\frac{k_i}{k_0}\right)_r \frac{v_r^i}{c}}{1 + \left(\frac{k_i}{k_0}\right)_e \frac{v_e^i}{c}} \tag{2.41}$$

où k^μ est le vecteur d'onde du photon qui peut être exprimé à partir de la fonction de transfert

de temps grâce aux relations (40-42) de Teyssandier et Le Poncin-Lafitte [2008]

$$\left(\frac{k_i}{k_0}\right)_r = -c\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial x_r^i}\left[1-\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial t_r}\right]^{-1} \tag{2.42}$$

$$\left(\frac{k_i}{k_0}\right)_e = c\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial x_e^i} \tag{2.43}$$

$$\frac{(k_0)_r}{(k_0)_e} = 1-\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial t_r}. \tag{2.44}$$

En combinant les 4 dernières équations, nous retrouvons l'équation (2.40). Il ne nous reste plus qu'à évaluer les dérivées de la fonction de transfert de temps. Si nous nous limitons au premier ordre Post-Minkowskien, nous pouvons dériver l'expression (2.22) dans laquelle Δ_r a été remplacé par sa valeur (2.29). La principale astuce consiste à intervertir les dérivations et les intégrations pour obtenir

$$c\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial \vec{x}_{e/r}} = \mp\vec{N}_{er} + \int_0^1 \left[m_{,\alpha}(\mu)\frac{\partial z^\alpha}{\partial \vec{x}_{e/r}} \pm \vec{l}(\mu)\right] d\mu + \mathcal{O}(G^2/c^4) \tag{2.45a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial t_r} = \int_0^1 m_{,0}(\mu)d\mu + \mathcal{O}(G^2/c^5) \tag{2.45b}$$

où les intégrales sont réalisées sur le chemin Euclidien qui joint l'émetteur et le récepteur paramétré par (2.31), les fonctions $m_{,\alpha}(\mu)$ sont définis par (2.32) et la fonction $\vec{l}$ est définie par

$$l^k(\mu) = \left.\frac{\partial m}{\partial x_e^k}\right|_{z^\alpha \mathrm{cst}} = -\left.\frac{\partial m}{\partial x_r^k}\right|_{z^\alpha \mathrm{cst}} = \frac{1}{2}\left[-N_{er}^k h_{00} - 2h_{0k} - 2h_{kj}N_{er}^j + N_{er}^k N_{er}^i N_{er}^j h_{ij}\right]_{z^\alpha(\mu)}. \tag{2.46}$$

Les dérivées qui interviennent dans les intégrands peuvent être exprimées à partir des relations (2.31)

$$\frac{\partial z^0}{\partial x_{e/r}^i} = \pm\mu N_{er}^i \tag{2.47a}$$

$$\frac{\partial z^j}{\partial x_e^i} = \mu\delta_i^j \tag{2.47b}$$

$$\frac{\partial z^j}{\partial x_r^i} = (1-\mu)\delta_i^j. \tag{2.47c}$$

En injectant toutes ces expressions dans les intégrales (2.45), nous trouvons finalement

$$\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial x_e^i} = -\frac{N_{er}^i}{c} + \frac{1}{c}\int_0^1 \left[\mu N_{er}^i m_{,0}(\mu) + \mu m_{,i}(\mu) + l_i(\mu)\right] d\mu + \mathcal{O}(G^2/c^5) \tag{2.48a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial x_r^i} = \frac{N_{er}^i}{c} + \frac{1}{c}\int_0^1 \left[-\mu N_{er}^i m_{,0}(\mu) + (1-\mu)m_{,i}(\mu) - l_i(\mu)\right] d\mu + \mathcal{O}(G^2/c^5) \tag{2.48b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial t_r} = \int_0^1 m_{,0}(\mu)\ d\mu + \mathcal{O}(G^2/c^5). \tag{2.48c}$$

où il est bon de rappeler que ces fonctions sont évaluées sur le chemin Euclidien $z^\alpha(\mu)$ défini par (2.31) et que les fonction $m_{,\alpha}$ sont définies par (2.32) et les fonctions $\vec{l}$ par la relation (2.46).

Les formules développées dans cette section sont valides pour un signal one-way (aller simple). La généralisation au cas d'un signal two-way (aller-retour) est aisée car il suffit de calculer le

Doppler sur le trajet aller du signal $D_a = \frac{\nu_t}{\nu_e}$ (les différentes fréquences sont représentées sur la figure 2.1), de faire la même chose sur le trajet retour $D_r = \frac{\nu_r}{\nu_t}$ et ensuite le Doppler total se calcule en effectuant le produit de ces deux quantités

$$D = \frac{\nu_r}{\nu_e} = \frac{\nu_r}{\nu_t}\frac{\nu_t}{\nu_e} = D_a \times D_r. \tag{2.49}$$

En résumé, l'observable Doppler peut être calculée par l'évaluation

$$\boxed{D(\tau_r) = \frac{\left[\sqrt{-g_{00} - 2g_{0i}\beta^i - g_{ij}\beta^i\beta^j}\right]_{\vec{x}_e(t_e)}}{\left[\sqrt{-g_{00} - 2g_{0i}\beta^i - g_{ij}\beta^i\beta^j}\right]_{\vec{x}_r(t_r)}} \quad \times \quad \frac{1 - \frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial t_r} - \frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial \vec{x}_r}\cdot\vec{v}_r(t_r)}{1 + \frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial \vec{x}_e}\cdot\vec{v}_e(t_e)} + \mathcal{O}(G^2/c^5)} \tag{2.50}$$

où les dérivées de la fonction de transfert sont données par les intégrales (2.48). Comme pour le calcul du transfert de temps, cette méthode est valide au premier ordre Post-Minkowskien, ce qui correspond à l'ordre $1/c^4$ ou encore à l'ordre 1.5 PN. Cette méthode est aussi particulièrement rapide d'un point de vue numérique car elle consiste à intégrer des fonctions sur une ligne droite sans nécessité de calculer la trajectoire du photon. Il faut cependant noter que si le transfert de temps se calcule par des intégrales définies seulement par la métrique $h_{\mu\nu}$, le Doppler requiert l'intégration de fonctions définie par la métrique et sa dérivée première $h_{\mu\nu,\alpha}$. Finalement, il est possible d'étendre les relations présentées ci-dessus à des ordres plus élevés comme réalisé par Hees et al. [2012a].

2.3.6 Equations d'évolution de la tétrade

Dans le cadre des simulations des observables de type astrométrique, nous avons besoin d'un système de référence local pour identifier la direction de propagation des signaux lumineux. Ce système est modélisé mathématiquement par une tétrade qui est transportée par l'observateur. Cette section est consacrée à la présentation des équations de propagation de cette tétrade. Plusieurs types de transports ou de constructions locales de tétrades existent et sont rappelées dans l'annexe A.

Comme indiqué dans la section 2.2.2, nous avons décidé de travailler avec une tétrade transportée Fermi-Walker. Ceci correspond physiquement à un système de référence dont les axes sont construits à l'aide de gyroscopes. Ce système de référence est appelé système dynamiquement non tournant par Klioner [1993]; Klioner et Soffel [1998]. La section A.2.2 rappelle les équations de Fermi-Walker. Par la suite, nous noterons par $\mathbf{e}_{(\alpha)}$ les 4 vecteurs de base de la tétrade dont les composantes s'expriment dans la base naturelle de coordonnées par $\lambda^\mu_{(\alpha)}$. Le premier vecteur de la tétrade $\mathbf{e}_{(0)}$ est colinéaire avec la quadrivitesse de l'observateur (car il s'agit d'une tétrade comobile). Nous avons donc facilement

$$\boxed{\lambda^\mu_{(0)} = u^\mu = \frac{1}{c}\frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{1}{c}\frac{dt}{d\tau}\frac{dx^i}{dt}\right) = \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^{-1}\left(1, \frac{v^i}{c}\right)} \tag{2.51}$$

où u^μ est la quadrivitesse et $\vec{v}$ est la vitesse coordonnée. L'expression de $d\tau/dt$ est donnée par la relation (2.17) et la vitesse coordonnée est donnée par le résultat de l'intégration des équations du mouvement présentées dans la section 2.3.1. Les composantes de ce premier vecteur de la tétrade se calculent donc très facilement.

En ce qui concerne les vecteurs spatiaux de la tétrade, l'idée est de partir de vecteurs initiaux et de les propager par l'équation de Fermi-Walker. Une façon de calculer des vecteurs spatiaux orthogonaux est d'utiliser un algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt tel que présenté dans la section A.2.3. A partir de ces vecteurs initiaux, nous pouvons utiliser l'équation du transport de Fermi-Walker

$$\frac{D\mathbf{e}_{(\alpha)}}{D\tau} = \frac{D\mathbf{u}}{D\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_{(\alpha)}) - \mathbf{u}\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\tau}, \mathbf{e}_{(\alpha)}\right) \tag{2.52}$$

où les parenthèses représentent des produits scalaires de l'espace-temps et les symboles en gras représentent des quadri-vecteurs (voir les conventions). En utilisant le fait que les vecteurs spatiaux de la tétrade sont orthogonaux à la quadrivitesse, nous pouvons réécrire cette dernière expression en termes de composantes sous la forme

$$\frac{D\lambda^\mu_{(i)}}{D\tau} = \frac{d\lambda^\mu_{(i)}}{d\tau} + c\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\lambda^\alpha_{(i)}u^\beta = -u^\mu a_\nu \lambda^\nu_{(i)} \tag{2.53}$$

où les symboles de Christoffel sont donnés par (5) et $a^\nu = \frac{Du^\nu}{D\tau}$ est la quadriaccélération de l'observateur. Dans la suite, nous supposerons que l'observateur suit une géodésique et donc que la quadriaccélération s'annule. En multipliant la dernière équation par $dt/d\tau$ pour faire apparaître une équation d'évolution en fonction du temps de coordonné plutôt qu'en fonction du temps propre (car les équations du mouvement sont intégrées par rapport à un temps coordonné), nous obtenons

$$\boxed{\frac{d\lambda^\mu_{(i)}}{dt} = -c\Gamma^\mu_{\alpha 0}\lambda^\alpha_{(i)} - \Gamma^\mu_{\alpha j}\lambda^\alpha_{(i)}v^j}. \tag{2.54}$$

Cette équation donne donc l'évolution des vecteurs spatiaux de la tétrade alors que la relation (2.51) donne le vecteur temporel. L'intégration de ces 12 équations différentielles supplémentaires le long de la trajectoire de l'observateur nous donne l'expression d'une tétrade comobile.

2.3.7 Observables de type astrométrique

Cette section est consacrée à l'expression des observables de type astrométrique. Une observable astrométrique correspond au vecteur incident d'un rayon lumineux exprimé dans un référentiel local comobile avec l'observateur (un tel référentiel étant représenté mathématiquement par une tétrade). L'expression des ces observables se fait donc en deux étapes. Tout d'abord, nous allons exprimer le vecteur d'onde k^μ dans la base globale de coordonnées. Ensuite, nous allons transformer les composantes de ce vecteur pour obtenir l'expression du vecteur d'onde dans la tétrade (nous noterons les composantes du vecteur d'onde dans la tétrade $k^{(\mu)}$).

Calcul du vecteur d'onde dans la base globale de coordonnées

Dans le même esprit que le calcul du Range et du Doppler, le calcul du vecteur d'onde peut se faire par l'utilisation de la World Function ou de la fonction de transfert de temps. En effet, l'expression du vecteur d'onde k^μ (à la réception du signal) à partir de la fonction $\mathcal{T}_r$ est donnée par Le Poncin-Lafitte et al. [2004]; Teyssandier et Le Poncin-Lafitte [2006, 2008]

$$\boxed{\hat{k}_i = \left(\frac{k_i}{k_0}\right)_r = c\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial x_r^i}\left(1 - \frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial t_r}\right)^{-1}}. \tag{2.55}$$

Les dérivées de la fonction de transfert de temps qui apparaissent dans cette expression sont exactement les mêmes dérivées qui apparaissent dans l'expression du Doppler à la section 2.3.5. Par conséquent, ces dérivées s'expriment comme des intégrales de fonctions définies par la métrique et sa dérivée première comme indiqué à la relation (2.48).

Transformation des composantes du vecteur d'onde dans la tétrade

La loi de transformation des coordonnées du vecteur d'onde entre la base globale de coordonnées et la tétrade locale suit la loi de transformation des tenseurs. Par conséquent, cette transformation est relativement simple et est donnée par la relation (A.17) :

$$k_{(\alpha)} = \lambda^\mu_{(\alpha)} k_\mu \tag{2.56}$$

où $\lambda^\mu_{(\alpha)}$ sont les composantes des vecteurs de base de la tétrade dans la base naturelle de coordonnées. Si on note par $\vec{n}$ la direction incidente du rayon lumineux dans la tétrade (c'est-à-dire la direction du rayon lumineux observée par l'observateur), nous obtenons

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}}{\left\|\vec{k}\right\|} \qquad \text{ou encore} \qquad n^{(i)} = \frac{k^{(i)}}{\sqrt{\delta_{jk}k^{(j)}k^{(k)}}}. \tag{2.57}$$

Etant donné que la quadrinorme de l'impulsion du photon est nulle (comme l'indique la relation (2.18)), nous pouvons écrire $0 = \left(k^{(0)}\right)^2 - \delta_{jk}k^{(j)}k^{(k)}$. En utilisant cette expression et en utilisant le fait que dans la tétrade la métrique est localement Minkowksienne, la dernière relation devient

$$n^{(i)} = \frac{k^{(i)}}{k^{(0)}} = -\frac{k_{(i)}}{k_{(0)}}. \tag{2.58}$$

Finalement, en utilisant la loi de transformation (2.56), nous obtenons

$$n^{(i)} = -\frac{\lambda^0_{(i)}k_0 + \lambda^j_{(i)}k_j}{\lambda^0_{(0)}k_0 + \lambda^j_{(0)}k_j}. \tag{2.59}$$

En mettant un facteur k_0 en évidence, l'expression devient

$$\boxed{n^{(i)} = -\frac{\lambda^0_{(i)} + \lambda^j_{(i)}\hat{k}_j}{\lambda^0_{(0)} + \lambda^j_{(0)}\hat{k}_j}} \tag{2.60}$$

où les composantes de la tétrade sont préalablement intégrées comme indiqué dans la section 2.3.6 et les vecteurs $\hat{k}$ sont définis à la relation (2.55) à partir de dérivées de la fonction de transfert de temps. Ces dérivées ont été calculées préalablement dans le cadre du Doppler à la relation (2.48). Avec cette méthode, nous obtenons donc une estimation de $\vec{n}$ valide au premier ordre Post-Minkowskien, c'est-à-dire les termes négligés sont de l'ordre de $\mathcal{O}(G^2/c^4)$.

Finalement, si nécessaire, le vecteur spatial $\vec{n}$ qui représente la direction d'observation du rayon lumineux dans un référentiel local comobile avec l'observateur peut s'exprimer sous la forme de déclinaisons et d'ascensions droites en utilisant la relation

$$n^{(i)} = (\cos\alpha\cos\delta, \sin\alpha\cos\delta, \sin\delta). \tag{2.61}$$

2.4 Analyse numérique

Dans cette section, nous allons passer en revue les méthodes numériques utilisées dans le logiciel et citer leurs limitations.

2.4.1 Intégration numérique

Dans le logiciel développé, de nombreuses intégrations sont réalisées : intégration des équations du mouvement (2.14), intégration du temps propre (2.17), intégration de la fonction de transfert de temps (2.29) et de ses dérivées (2.48) et intégration de l'évolution de la tétrade (2.54). Pour toutes ces intégrations, deux intégrateurs peuvent être utilisés : la librairie `rksuite` [Brankin et al., 1993] disponible sur `netLib` et un intégrateur du 15e ordre utilisant une méthode de Gauss-Radau [Everhart, 1985].

La librairie `rksuite` permet d'utiliser trois intégrateurs de type Runge-Kutta (d'ordre 2-3, 4-5 et 7-8) à pas adaptatif. La meilleure précision relative atteignable avec ce type d'intégrateur est de l'ordre de 10^{-14} en utilisant de la `double précision`[8]. Cette librairie a été modifiée de telle façon qu'elle soit utilisable en `quadruple précision`. La `quadruple précision` permet d'atteindre des précisions relatives de l'ordre de 10^{-28} [9] mais au prix d'un temps d'intégration qui augmente considérablement et qui devient limitatif.

L'intégrateur Radau 15 est un intégrateur qui peut s'utiliser avec pas adaptatif ou fixe. La précision relative atteignable avec le pas adaptatif est de l'ordre de 10^{-13} alors qu'un choix judicieux du pas fixe permet d'atteindre une précision relative de l'ordre de 10^{-14} (généralement légèrement meilleure que avec `rksuite`). Cet intégrateur ne donne pas de bons résultats en `quadruple précision`.

Pour éviter de perdre de la précision numérique à cause d'erreurs d'arrondis, deux subtilités sont utilisées. La première concerne l'intégration du temps propre (2.17). On sait que l'évolution

8. La précision relative a été obtenue en comparant une intégration utilisant `rksuite` et une intégration en `Mapple` qui permet d'atteindre n'importe quelle précision.

9. Cette précision est obtenue par une comparaison avec une intégration en Maple.

du temps propre $\tau(t)$ peut s'écrire sous la forme

$$\tau(t) = t + \delta\tau \tag{2.62}$$

où $\delta\tau$ est une correction qui est de l'ordre Post-Newtonien, c'est-à-dire de l'ordre de $10^{-7}t$. Une intégration de τ en fonction de t permet d'obtenir une précision relative de $\sim 10^{-14}$ sur τ, ce qui veut dire une précision de l'ordre de 10^{-7} sur $\delta\tau$. Au lieu d'intégrer τ, il est utile d'intégrer $\delta\tau$, ce qui permet d'obtenir une précision de 10^{-14} sur cette valeur signifiant un gain de 7 ordres de grandeur sur la précision numérique du résultat. La seconde subtilité (fort semblable) concerne le cas où il faut intégrer la trajectoire d'un orbiteur ($\vec{x}_{orb}$) d'une planète donnée (dont la trajectoire est notée $\vec{x}_{\rm pl}$). Etant donné que nous travaillons avec un jeu de coordonnées unique (généralement barycentrique), la précision de la variation de la trajectoire de l'orbiteur par rapport à la planète est très faible. Nous pouvons illustrer ce propos en considérant un spacecraft orbitant autour de la planète Mars. Si la distance entre Mars et le spacecraft est de l'ordre de quelques milliers de km et sachant que la distance entre le Soleil et Mars est de l'ordre 2×10^8 km, la précision de l'intégration de la trajectoire du spacecraft dans le jeu de coordonnées global est de l'ordre de 10^{-6} km. En pratique, étant donné que la fréquence orbitale du spacecraft est beaucoup plus grande que la fréquence orbitale de la planète autour du Soleil, la précision numérique du spacecraft se détériore plus vite menant à une précision effective de l'ordre de 10 cm. Cela signifie que la précision de l'orbite du spacecraft relativement à la planète est de l'ordre de 10^{-7} seulement. La solution consiste à utiliser comme variable d'intégration la différence

$$\vec{x}_{orb} - \vec{x}_{\rm pl} \tag{2.63}$$

ce qui permet de gagner 6 ordres de grandeur sur la précision numérique. Cette transformation ne doit pas être vue comme une transformation entre le système de référence globale et un système de référence planétocentrique car une telle transformation (cohérente au niveau relativiste) est beaucoup plus compliquée à écrire et n'existe pas toujours dans les théories alternatives considérées. Il s'agit réellement d'un changement de variables d'intégration pour obtenir une meilleure précision.

2.4.2 Interpolation de Tchebychev

L'intégration des équations du mouvement fournit un jeu de donnés du type $\vec{x}(t_i)$ pour un nombre fini de temps t_i. Pour la suite du calcul (évaluation du Range, Doppler ou observables angulaires), il est pratique de pouvoir évaluer $\vec{x}(t)$ pour tout temps de coordonné t. Pour ce faire, une interpolation de Tchebychev est réalisée et les coefficients des polynômes de Tchebychev sont stockés. La façon d'implémenter cette interpolation de même que les propriétés qui en découlent sont standards et peuvent être trouvés dans Magnus [2007]; Press et al. [2007].

2.4.3 Inversion du temps propre

La première étape du calcul du Range (étape (a) de la figure 2.4) consiste à inverser la relation $\tau(t)$ pour obtenir le temps coordonné t_r à partir d'un temps propre τ_r donné. La méthode

implémentée pour inverser la relation $\tau(t)$ est une méthode de Newton. Concrètement, il faut trouver t_r qui est solution de l'équation

$$\tau(t_r) = \tau_r. \tag{2.64}$$

La résolution d'équations non-linéaires par une méthode de Newton est classique et se trouve par exemple dans Press et al. [2007]. Dans notre cas, l'algorithme est donné par l'Algorithme 2 (dans lequel ϵ représente la précision requise et où $d\tau/dt$ est donné par (2.17)). Le taux de convergence

Algorithme 2 Algorithme d'inversion de $\tau(t)$

1: Données : $\tau(t), \tau_r$
2: Initialisation : $i = 0$, $t_r^{(0)} = \tau_r$
3: **while** $\left|\tau(t_r^{(i)}) - \tau_r\right| > \epsilon$ **do**
4: $\quad t_r^{(i+1)} = t_r^{(i)} - \frac{\tau\left(t_r^{(i)}\right) - \tau_r}{\frac{d\tau}{dt}\Big|_{t_r^{(i)}}}$
5: $\quad i = i + 1$
6: **end while**
7: **return** $t_r = t_r^{(i)}$.

de cet algorithme est quadratique et si nous nous plaçons dans le cadre d'une métrique en champs faibles, le taux de convergence est lié au paramètre d'expansion Post-Newtonien $\varepsilon_{PN} \sim 10^{-7}$. En pratique, cet algorithme converge en une ou deux itérations.

2.4.4 Dérivation de la métrique

Certaines étapes du calcul nécessitent la connaissance des dérivées de la métrique $g_{\mu\nu,\alpha}$. Concrètement, les dérivées de la métrique apparaissent dans le calcul des symboles de Christoffel (5) nécessaires pour obtenir les équations du mouvement et les équations de propagation de la tétrade. Ces dérivées sont également nécessaires dans le calcul du Doppler pour le calcul des dérivées de la fonction de transfert de temps (les dérivées apparaissent dans les expressions (2.32) qui sont utilisées dans l'intégration (2.48)).

Deux possibilités s'offrent pour évaluer ces dérivées : une évaluation analytique (pour autant que la métrique soit fournie sous forme analytique) ou une dérivation numérique. Dans toutes les applications réalisées dans le cadre de cette thèse, les métriques utilisées possèdent une expression analytique. Le choix a été fait d'utiliser une dérivée analytique de la métrique. Ce choix est justifié par deux raisons : le fait de coder directement la dérivée analytique est beaucoup plus rapide et plus précis que le calcul numérique.

Néanmoins, la dérivation numérique peut s'avérer utile dans un cas de figure : si la métrique est fournie sous forme numérique. Dans ce cas, le calcul de 40 dérivées de la métrique peut se faire numériquement [Hees et Pireaux, 2010]. Dans le cadre de cette thèse, une procédure de dérivation a été implémentée en utilisant une différence centrée du quatrième ordre et un procédé d'extrapolation de Richardson [Richardson et Gaunt, 1927] pour accélérer la convergence de la

dérivée. Pour expliciter ce schéma numérique, considérons que nous devons dériver une fonction $f(x)$. La différence centrée du quatrième ordre s'écrit [voir par exemple Kincaid et Cheney, 2002]

$$f'(x) = D_h + \mathcal{O}(h^4) = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h} + \mathcal{O}(h^4) \tag{2.65}$$

où h représente le pas de discrétisation. Il est possible de voir à la figure 2.5 que pour des valeurs trop faibles de h, les erreurs d'arrondis grandissent alors que pour des grandes valeurs de h, l'erreur de troncature devient importante. Un pas optimal h_{opt} peut être estimé en considérant que les termes dominant de la métrique sont en $1/r$. Le pas optimal est alors donné par [voir par exemple Kincaid et Cheney, 2002]

$$h_{opt} = (45\epsilon_m a^6 c^2/(960GM))^{1/5} \tag{2.66}$$

avec a le demi-grand axe de l'orbite considérée et M la masse du corps central et ϵ_m est la précision machine (de l'ordre de 10^{-16} dans le cas de la précision double). Il peut être remarqué à la figure 2.5 qu'il est plus intéressant de dériver $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ que la métrique elle-même.

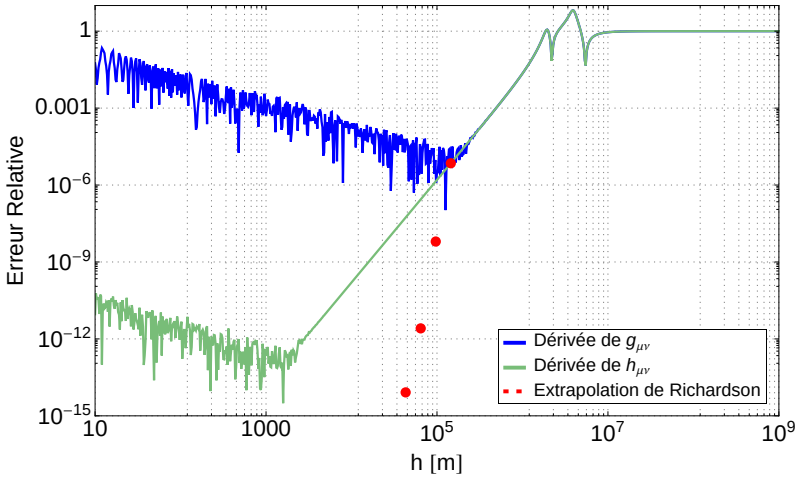

FIGURE 2.5 – Représentation du calcul numérique de la dérivée $g_{\mu\nu}$ dans le cas d'une métrique de Schwarzschild en fonction du pas de discrétisation h. La valeur de k utilisée dans la récursion de Richardson est $k = 1.5$.

Finalement, une extrapolation de Richardson est utilisée pour accélérer la convergence et augmenter la précision obtenue. Cette extrapolation utilise deux estimations de la dérivée d'ordre 4 (D_h et $D_{h/k}$ avec k un facteur réel) pour construire une estimation d'ordre 6

$$f'(x) \approx \frac{k^4 D_{h/k} - D_h}{k^4 - 1} + \mathcal{O}(h^6). \tag{2.67}$$

Typiquement la valeur de k utilisée se situe entre 1.5 et 2. Cette procédure peut être utilisée récursivement (l'ordre de l'exposant de la constante k changeant à chaque étape en fonction de l'ordre courant de l'estimation de la dérivée). Il est possible de voir sur la figure 2.5 que l'extrapolation de Richardson fournit la meilleure estimation de la dérivée de la métrique. De plus, cette méthode est moins sensible au choix de h_{opt}. Avec une telle implémentation, il est possible d'obtenir une dérivation numérique de la métrique avec une précision relative comprise entre $10^{-11} - 10^{-14}$.

Néanmoins, l'utilisation de la dérivation numérique est environ 1000 fois plus lent que l'évaluation d'une formule analytique. Les calculs des 40 dérivées peuvent être parallélisés et il est possible de réduire ce temps de calcul par un facteur 10. Le temps de calcul beaucoup plus grand et la possibilité de perte de précision de la dérivation numérique sont les raisons pour lesquelles lorsqu'une métrique analytique est disponible (ce qui est le cas dans le reste du travail), nous éviterons d'utiliser une dérivation numérique que nous réserverons exclusivement dans le cas de métriques fournies sous forme numérique.

2.5 Test du logiciel sur une métrique relativiste

Dans cette section, nous allons comparer les résultats numériques obtenus en utilisant le logiciel décrit dans ce chapitre à partir d'une métrique RG avec les résultats obtenus en utilisant une approche analytique standard. Ceci nous permettra de valider l'implémentation de notre logiciel et d'obtenir une idée de la précision numérique que nous pouvons obtenir.

La métrique relativiste utilisée est la métrique Einstein-Infeld-Hoffmann (EIH) [de Sitter, 1916; Einstein et al., 1938; Einstein et Infeld, 1940; Infeld, 1957; Brumberg, 2007]. Cette métrique représente un ensemble de masses ponctuelles traitées en RG au premier ordre Post-Newtonien. La dérivation de cette métrique peut être trouvée dans Soffel [1989]; Misner et al. [1973] et est celle qui est utilisée dans les recommandations IAU [Soffel et al., 2003]. L'expression de la métrique se trouve dans l'annexe C à la relation (C.1). Nous allons dériver analytiquement toutes les équations nécessaires pour calculer les observables à partir de cette métrique et ces expressions serviront de référence pour tester notre logiciel.

Les équations du mouvement qui dérivent de cette métrique (appelées équations EIH) sont rappelées à l'équation (C.17) et sont celles utilisées dans les éphémérides [voir par exemple dans Moyer, 1971]. De même, l'équation d'évolution du temps propre (2.17) est donnée dans l'Annexe C à la relation (C.19). Finalement, l'équation de Fermi-Walker modélisant le transport de la tétrade est donnée par (C.22).

Le transfert de temps se calcule en insérant la métrique EIH (C.1) dans l'expression (2.29), ce qui donne

$$\Delta_r^{(1)}(\vec{x}_e, t_r, \vec{x}_r) = \frac{R_{er}}{2} \int_0^1 \sum_k \frac{4Gm_k}{c^2 \left| z^i(\lambda) - x_k^i \right|} d\lambda \tag{2.68}$$

où $z^\alpha(\lambda)$ est défini à la relation (2.31), avec m_k la masse des corps et la somme sur k porte sur l'ensemble des masses considérées. Cette intégrale donne le retard de Shapiro et le transfert de temps s'écrit alors sous la forme

$$\mathcal{T}_r = \frac{R_{er}}{c} + \sum_k \frac{2Gm_k}{c^3} \ln \left[\frac{r_{ek} + r_{rk} + R_{er}}{r_{ek} + r_{rk} - R_{er}} \right] + \mathcal{O}(c^{-4}) \tag{2.69}$$

avec $r_{ek} = |\vec{x}_e - \vec{x}_k|$ et $r_{rk} = |\vec{x}_e - \vec{x}_k|$. Cette formule est standard et se retrouve dans de nombreuses références [voir par exemple Shapiro, 1964; Misner et al., 1973; Soffel, 1989; Brumberg, 1991].

De la même façon, une expression du frequency shift peut être obtenue à partir de la métrique EIH en utilisant (2.50). Les termes en $d\tau/dt$ ne posent pas de problèmes particuliers et sont exprimés à la relation (C.19). Le terme lié aux dérivées de la fonction de transfert de temps s'écrit à partir de la relation (2.40)

$$\frac{dt_e}{dt_r} = \frac{q_r}{q_e} = \frac{1 - \frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial t_r} - \frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial \vec{x}_r} \cdot \vec{v}_r(t_r)}{1 + \frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial \vec{x}_e} \cdot \vec{v}_e(t_e)}. \tag{2.70}$$

Prenons par exemple la dérivée de la fonction de transfert par rapport à x_r^i qui est donnée par (2.48)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial x_r^i} &= \frac{N_{er}^i}{c} + \sum_k \frac{2Gm_k}{c^3} \int_0^1 \left[-(1-\lambda) R_{er} \frac{(z^i(\lambda) - x_k^i)}{\left| z^i(\lambda) - x_k^i \right|^3} + \frac{N_{er}^i}{\left| z^i(\lambda) - x_k^i \right|} \right] d\lambda \\ &= \frac{N_{er}^i}{c} + \sum_k \frac{4Gm_k}{c^3 \left[(r_{ek} + r_{rk})^2 - R_{er}^2 \right]} \left[-R_{er} \frac{x_{ek}^i}{r_{ek}} + N_{er}^i (r_{ek} + r_{rk}) \right]. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Des intégrales similaires peuvent être calculées pour $\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial \vec{x}_e}$ et pour $\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial t_r}$ et on obtient alors les expressions

$$q_e = 1 - \frac{\vec{N}_{er} \cdot \vec{v}_e}{c} - \sum_k \frac{4Gm_k}{c^3} \frac{\vec{N}_{er} \cdot \vec{v}_e (r_e + r_r) + R_{er} \frac{\vec{x}_{ek} \cdot \vec{v}_{ek}}{r_{ek}}}{(r_{ek} + r_{rk})^2 - R_{er}^2} \tag{2.72a}$$

$$q_r = 1 - \frac{\vec{N}_{er} \cdot \vec{v}_r}{c} - \sum_k \frac{4Gm_k}{c^3} \frac{\vec{N}_{er} \cdot \vec{v}_r (r_e + r_r) - R_{er} \frac{\vec{x}_{rk} \cdot \vec{v}_{rk}}{r_{rk}}}{(r_{ek} + r_{rk})^2 - R_{er}^2} \tag{2.72b}$$

compatibles avec les résultats de Blanchet et al. [2001].

Pour tester l'implémentation de notre logiciel, l'idée est de comparer une intégration qui utilise notre logiciel (c'est-à-dire en utilisant les méthodes décrites dans les sections 2.3.1-2.3.7) à partir d'une métrique EIH avec une approche analytique qui consiste à intégrer les équations du mouvement (C.17), l'équation du temps propre (C.19), l'équation de propagation de la tétrade (C.22) et le calcul de la propagation de la lumière donné par (2.69-2.72). La figure 2.6 présente les signaux Range, Doppler et les mesures angulaires dans le cadre de la mission Cassini. Les signaux ont été simulés pour une période de 3 ans à partir de mai 2001 au moment où la sonde se trouvait entre Jupiter et Saturne. La figure 2.6 présente également les différences entre les signaux simulés avec le logiciel présenté dans ce chapitre et les signaux obtenus par l'approche analytique. Cette comparaison permet de valider le logiciel et de quantifier les erreurs numériques. Les précisions obtenues sont de l'ordre du cm pour le Range, du nm/s pour le Doppler et de 0.1 μas pour les variables angulaires. Ceci correspond à une précision relative de l'ordre de $10^{-13} - 10^{-14}$ pour le Range et le Doppler et de l'ordre de 10^{-12} pour les variables angulaires. La précision obtenue pour le Range et le Doppler correspond à la précision maximale atteignable avec les intégrateurs utilisés (voir la section 2.4.1). La précision des variables angulaires est moins bonne car le développement analytique n'est effectué qu'à l'ordre $1/c^2$ alors qu'il est valide à l'ordre $1/c^3$ avec notre logiciel. Le signal résiduel obtenu pour les variables angulaires provient donc des termes d'ordre supérieur non modélisés dans l'approche analytique.

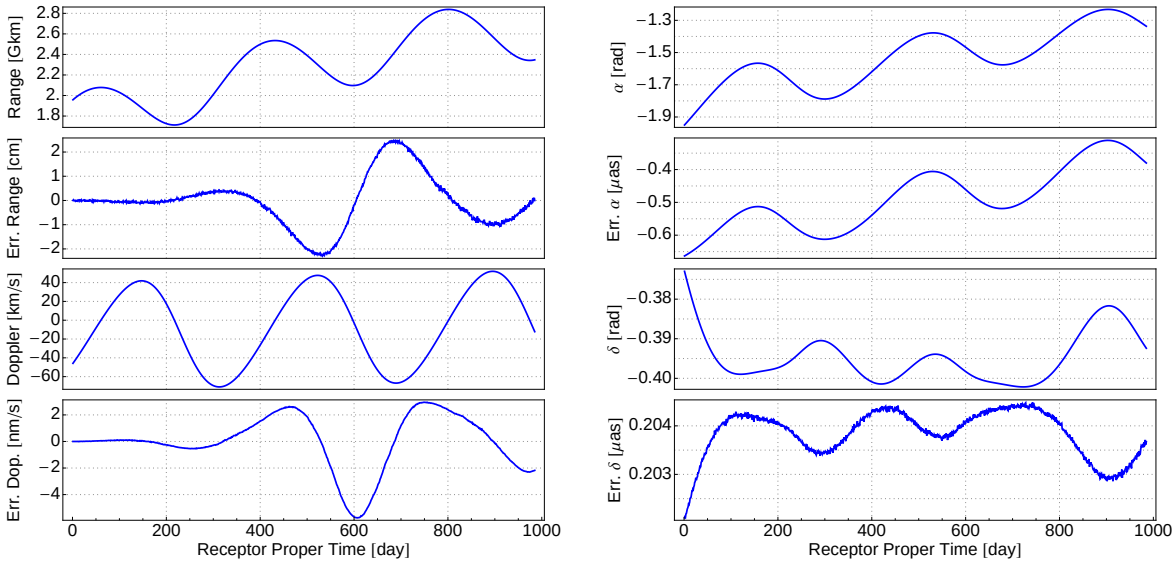

FIGURE 2.6 – Comparaison des signaux obtenus pour Cassini en utilisant le logiciel avec une métrique EIH et l'intégration des équations analytiques (nous avons utilisé l'expression qui donne le Range en terme d'une longueur (voir la note de bas de page 1 à la page 35) et nous avons utilisé l'expression qui donne le Doppler en terme d'une vitesse (voir la note de bas de page 2 à la page 36)). Les erreurs commises pour le Range, Doppler, ascension droite et déclinaison sont représentées de même que les signaux correspondants pour donner une idée de l'erreur relative entre les deux méthodes. L'erreur relative est de l'ordre de 10^{-13} pour le Range et Doppler et de l'ordre de 10^{-12} pour les variables angulaires. La mission considérée est la mission Cassini simulée pendant une durée de 3 ans à partir du 1 mai 2001.

2.6 Limitations du logiciel

Bien que très général, le logiciel présenté dans ce chapitre présente des limitations. Cependant, ces limitations sont justifiées car comme nous l'avons indiqué à la section 1.3, dans cette première étape, seuls les éléments principaux susceptibles de produire un signal associé à une modification de la gravitation doivent être simulés. Les éléments perturbatifs dont on n'attend pas de signal important généré par une modification de la théorie de la gravitation peuvent être négligés. Nous allons néanmoins citer les principales simplifications que nous avons utilisées.

Une hypothèse implicitement faite dans notre approche est que la métrique à partir de laquelle sont produites les simulations est globale. Le fait d'utiliser un seul jeu de coordonnées global a plusieurs conséquences :

– les planètes sont modélisées par des masses ponctuelles. Nous négligeons ainsi le champ de gravité multipolaire des planètes. Pour introduire correctement le champ multipolaire des planètes, il faut calculer explicitement la transformation de coordonnées entre le jeu de coordonnées global et un référentiel planétocentrique et ensuite introduire le développement multipolaire dans le référentiel planétocentrique. Cette procédure est connue en RG grâce aux travaux de Damour et al. [1991, 1992] et de Brumberg et Kopejkin [1989]; Kopejkin [1988]; Brumberg [1991]; Klioner et Voinov [1993] ou dans le formalisme Post-Newtonien en incluant les paramètre γ et β grâce à Klioner et Soffel [2000]; Kopeikin et Vlasov [2004].

Cependant, aucune méthode générale n'existe actuellement pour construire un référentiel planétocentrique et un développement multipolaire dans n'importe quelle théorie alternative de la gravitation. Néanmoins, le fait de négliger cette expansion multipolaire est justifié par le fait que la correction due à une théorie alternative sur le développement multipolaire produit un signal nettement plus petit que la correction provenant du terme de masse. Autrement dit, l'influence de la correction du développement multipolaire lié à une théorie alternative sur les signaux est d'un ordre plus élevé.

- les observateurs sont modélisés comme étant au centre de la planète et suivant des géodésiques. Ceci implique que nous négligeons les effets liés à la rotation de la planète et les effets liés à la transformation entre le référentiel planétocentrique et le référentiel global. Encore une fois, les effets d'une correction post-relativiste de ces termes sur les signaux sont d'un ordre supérieur et il n'est pas nécessaire de les considérer.
- l'observable VLBI est simulée comme étant la mesure de la direction incidente d'un signal alors qu'il s'agit réellement d'une mesure de différence de temps propre (voir la section 2.2.3). En effet, les positions des deux stations de réception doivent être décrites dans un référentiel planétocentrique que nous ne possédons pas.

Une solution partielle à tous ces problèmes consisterait à implémenter un modèle d'observateur Newtonien dans une tétrade locale située au centre de la planète observatrice. Ainsi, dans cette tétrade, la physique est localement celle de la relativité restreinte et un modèle Newtonien d'observateur peut alors être implémenté. Cette façon de procéder permettrait de résoudre partiellement les problèmes évoqués ci-dessus (partiellement dans le sens où ce ne serait pas totalement cohérent au niveau théorique).

Une autre limitation concerne la prise en compte d'une éventuelle violation du principe d'équivalence fort. La plupart des théories alternatives de la gravitation (sans doute la totalité d'entre elle outre la théorie scalaire de Nördstrom) produit une violation du principe d'équivalence fort. Au niveau du Système Solaire, la violation du principe d'équivalence fort implique que les corps gravitationnellement liés (c'est-à-dire les planètes) subissent une accélération supplémentaire par rapport aux trajectoires géodésiques. Nordtvedt [1968a,b, 1971] fut le premier à donner une description phénoménologique de la violation de ce principe en paramétrisant l'accélération supplémentaire par le *paramètre de Nordtvedt* η. Dans le cas des métriques PPN, le paramètre η se dérive à partir de la métrique (et il s'exprime en fonction des paramètres Post-Newtoniens). Cependant, à notre connaissance, il n'existe pas de méthode générale qui permette de dériver le terme d'accélération supplémentaire de façon directe à partir de la métrique (ou encore de lier le paramètre η aux paramètres de la métrique dans le cas général). Il s'agit là d'une réelle limitation car il est possible que nous manquions une partie du signal liée à la violation du principe d'équivalence fort.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les observables radioscience (Range et Doppler) et de type astrométrique de façon invariante sous transformations de coordonnées (conformément à la discussion tenue à la section 1.2.1). Ensuite, nous avons montré comment il est possible de simuler ces observations directement à partir de la métrique de l'espace-temps. Nous avons notamment

détaillé toutes les étapes nécessaires pour simuler les observables : équations du mouvement, équation du temps propre, propagation de la lumière, calcul du Doppler, propagation de la tétrade, calcul des angles des rayons lumineux dans cette tétrade. Nous avons également présenté de façon détaillée les méthodes numériques utilisées ainsi que leurs limitations. Finalement, en guise de validation, un exemple de simulation d'observables pour la mission Cassini fut présenté dans le cadre de la métrique Einstein-Infeld-Hoffmann. Nous avons comparé les résultats obtenus par notre logiciel avec l'approche analytique standard et validé l'implémentation du software qui peut maintenant être utilisé dans le cadre de métriques caractéristiques de théories alternatives de la gravitation.

Le logiciel présenté dans ce chapitre est complètement original et est le fruit de cette thèse. Précisons que les méthodes décrites dans ce chapitre pour dériver les observables radioscience à partir de la métrique ont fait l'objet d'une publication [Hees et al., 2012b].

Avec l'outil présenté dans ce chapitre, il est possible de simuler des observables dans n'importe quelle théorie métrique de la gravitation. Le software est particulièrement simple à utiliser car il suffit de changer le module dans lequel se trouve la métrique pour changer la théorie sous-jacente.

Chapitre 3

Comparaison de signaux dans des théories différentes

"Je vis dans l'approximatif
Et je m'en rapproche de plus en plus..."
J. Beaucarne

Sommaire

3.1 Introduction 65
3.2 Ajustement aux moindres carrés 66
3.3 Calcul des signaux en Relativité Générale et de leurs dérivées partielles 68
3.4 Tests des dérivées partielles 69
3.5 Quels paramètres est-il possible d'ajuster ? 70
3.6 Précision numérique du processus complet 72
3.7 Conclusion 73

3.1 Introduction

Le chapitre précédent décrit comment il est possible de simuler des observables radioscience et de type astrométrique à partir de la métrique de l'espace-temps, ce qui correspondait à la première étape du processus complet d'un test d'une théorie alternative de la gravitation tel que décrit à la section 1.3. Il est donc possible de faire des simulations en RG mais aussi dans des théories alternatives de la gravité. L'étape suivante décrite à la section 1.3 consiste à dériver la signature incompressible produite par la théorie alternative. Cette étape consiste à traiter les observables simulées dans une théorie alternative comme des observations réelles et à les analyser comme telles en utilisant la procédure standard en RG (procédure standard qui consiste à ajuster un certain nombre de paramètres). Après cet ajustement, les résidus restant seront caractéristiques de la théorie alternative considérée. Ces résidus sont dits incompressibles car ils ne peuvent plus

être absorbés par un ajustement quelconque. Ils peuvent alors servir de "templates" dont il faut chercher la trace dans les résidus des analyses des données réelles (voir les étapes 3 et 4 décrites dans la section 1.3). Cette méthode permet aussi de quantifier l'erreur produite en en interprétant avec la RG une réalité différente de la RG.

Ce chapitre s'attaque à décrire la méthode utilisée pour dériver les signaux incompressibles produits par une théorie alternative. En fait, la question qui se pose est comment peut-on comparer des signaux dans des théories différentes ? Et comment sera-t-il possible de détecter une éventuelle théorie alternative dans une expérience particulière ? Une comparaison directe de signaux produits dans deux théories alternatives de la gravité n'est pas satisfaisant d'un point de vue théorique. En effet, même si les signaux simulés sont des observables (c'est-à-dire des quantités mesurables et indépendantes du système de coordonnées), ils sont dépendants des conditions initiales (des planètes et des sondes) qui sont encore dépendants de coordonnées. En toute rigueur, les signaux produits dépendent donc encore du jeu de coordonnées choisi à travers la dépendance des conditions initiales des corps. La procédure pour extraire l'influence des conditions initiales sur les signaux est de les ajuster. D'autre part, d'un point de vue pratique, dans les analyses de données, le fit des conditions initiales est toujours réalisé [Zarrouati, 1987]. Par conséquent, pour obtenir une signature réaliste des théories alternatives sur les signaux Range/Doppler et sur les observations astrométriques, il est important de réaliser un fit des conditions initiales (au minimum). Le signal obtenu dans les résidus de ce fit est directement lié à la théorie de la gravitation et pourra alors être interprété comme la signature incompressible due à la théorie alternative considérée.

Ce chapitre va présenter les diverses étapes nécessaires pour réaliser l'ajustement. Nous nous sommes limités à l'ajustement des paramètres principaux, c'est-à-dire aux conditions initiales des différents corps et aux masses des planètes (ou plus précisément aux produits GM). Comme nous l'avons mentionné à la section 1.3, il s'agit d'une version simplifiée de l'étape 2. Une version plus complète impliquerait de ajuster plus de paramètres (par exemple les coefficients qui interviennent dans les forces perturbatrices non-gravitationnelles) en particulier si ces paramètres peuvent absorber une partie du signal provenant de la théorie alternative.

3.2 Ajustement aux moindres carrés

La procédure pour ajuster les conditions initiales est standard et peut se trouver dans Zarrouati [1987]; Lainey et al. [2004b,a]. Nous allons reprendre ici les étapes principales. Le fit consiste à ajuster un modèle construit en RG sur des données simulées dans une théorie alternative (les quantités se référant au modèle RG seront indicées par RG tandis que les données simulées dans une théorie alternative seront indicées par s). L'ajustement consiste à minimiser la quantité

$$\begin{aligned} S &= \sum_j \frac{(R_s(\tau_j) - R_{RG}(\tau_j, p_l))^2}{\sigma_{Rj}^2} + \sum_j \frac{(D_s(\tau_j) - D_{RG}(\tau_j, p_l))^2}{\sigma_{Dj}^2} \\ &\quad + \sum_j \frac{(\alpha_s(\tau_j) - \alpha_{RG}(\tau_j, p_l))^2}{\sigma_{\alpha j}^2} + \sum_j \frac{(\delta_s(\tau_j) - \delta_{RG}(\tau_j, p_l))^2}{\sigma_{\delta j}^2} \end{aligned} \tag{3.1}$$

où $R_s(\tau_j)$, $D_s(\tau_j)$, $\alpha_s(\tau_j)$ et $\delta_s(\tau_j)$ sont le Range, Doppler, ascension droite et déclinaison simulés dans la théorie alternative de la gravitation au temps propre de réception τ_j tandis que $R_{RG}(\tau_j, p_l)$, $D_{RG}(\tau_j, p_l)$, $\alpha_{RG}(\tau_j, p_l)$ et $\delta_{RG}(\tau_j, p_l)$ représentent ces mêmes signaux simulés en RG avec les différents paramètres p_l (ces paramètres représentent les quantités à ajuster, c'est-à-dire les conditions initiales et les masses des planètes). Finalement, les quantités $\sigma_{R/D/\alpha/\delta j}$ sont les variances (ou précisions) des signaux Range/Doppler/ascension droite/déclinaison au temps τ_j.

Pour simplifier les notations, nous noterons par O une observation quelconque (Range, Doppler ou un angle) et nous réécrivons la quantité précédente sous la forme

$$S = \sum_i \frac{(O_{si} - O_{RGi}(p_l))^2}{\sigma_i^2}. \tag{3.2}$$

La procédure d'ajustement par moindres carrés est une procédure itérative qui suppose que nous disposons d'une estimation de la valeur des paramètres au début de l'itération k (cette valeur est notée $p_l^{(k)}$). L'idée est de linéariser la dernière expression pour calculer la variation des paramètres $\delta p_l^{(k)}$ qui va minimiser S. La linéarisation de S donne

$$S = \sum_i \frac{\left(O_{si} - O_{RGi}(p_l^{(k)}) - \frac{\partial O_{GRi}(p_l^{(k)})}{\partial p_j}\delta p_j^{(k)}\right)^2}{\sigma_i^2} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\delta\mathbf{p}^{(k)})^T \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}\delta\mathbf{p}^{(k)}) \tag{3.3}$$

où $\mathbf{A}$ est le vecteur défini par $A_i = \frac{O_{si} - O_{RGi}(p_l^{(k)})}{\sigma_i}$, $\delta\mathbf{p}^{(k)}$ est le vecteur des corrections des conditions initiales et $\mathbf{B}$ est la matrice définie par

$$B_{ij} = \frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial O_{GRi}(p_l^{(k)})}{\partial p_j}. \tag{3.4}$$

La minimisation de S par rapport à $\delta\mathbf{p}^{(k)}$ donne

$$\delta\mathbf{p}^{(k)} = (\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{A}. \tag{3.5}$$

Le processus général consiste donc à partir d'une estimation des paramètres à ajuster $\delta p_j^{(k)}$, de calculer les quantités $O_{GRi}(p_l^{(k)})$ et les dérivées partielles $\frac{\partial O_{GRi}(p_l^{(k)})}{\partial p_j}$ pour calculer la correction aux paramètres $\delta p_j^{(k)}$ en utilisant la relation (3.5). Ensuite, on recommence cette procédure jusqu'à convergence (c'est-à-dire jusqu'au moment où la variation des paramètres est plus petite qu'une précision requise ou jusqu'au moment où la variation de la quantité S est inférieure à une précision requise).

Cette procédure d'ajustement aux moindres carrés fait une hypothèse implicite : celle que les erreurs des mesures sont distribuées de façon Gaussienne. D'autre part, pour que la procédure converge, il faut que l'estimation des paramètres initiaux $\delta p_j^{(0)}$ soit "proche" de la solution finale. En pratique, ceci fut toujours le cas pour les simulations réalisées.

Finalement, il est utile de préciser que la matrice $\mathbf{C}$ définie par

$$\mathbf{C} = (\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1} \tag{3.6}$$

est la matrice de variance-covariance [Press et al., 2007]. Ses éléments diagonaux contiennent les variances des paramètres estimés $C_{ii} = \sigma^2_{p_i}$ et les éléments hors de la diagonale représentent les covariances entre les paramètres. Finalement, le coefficient de corrélation entre les paramètres p_i et p_j (noté ρ_{ij}) se calcule par

$$\rho_{ij} = \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}C_{jj}}}. \tag{3.7}$$

Ces éléments sont intéressants dans le sens où ils permettent d'estimer les corrélations entre les paramètres ajustés.

En résumé, nous venons de présenter une méthode d'ajustement des conditions initiales pour ajuster un modèle RG sur des simulations produites en théorie alternative. Pour pouvoir utiliser cette procédure, il faut pouvoir calculer $O_{GRi}(p_l)$ de même que les dérivées partielles $\frac{\partial O_{GRi}(p_l)}{\partial p_j}$. C'est l'objet de la section suivante.

3.3 Calcul des signaux en Relativité Générale et de leurs dérivées partielles

Comme mentionné dans la section précédente, pour pouvoir utiliser la procédure d'ajustement aux moindres carrés, il faut pouvoir calculer les quantités $O_{GRi}(p_l)$ qui sont les valeurs des observables en RG obtenus à partir des conditions initiales p_l. Ce calcul peut se faire en développant analytiquement les expressions de la métrique Einstein-Infeld-Hoffmann (voir en annexe C) comme cela a été effectué à la section 2.5. En plus de calculer les observations en RG, il faut calculer les dérivées partielles de ces signaux par rapport aux paramètres à ajuster $\frac{\partial O_{GRi}(p_l)}{\partial p_j}$. Ces calculs sont longs mais sans difficultés techniques et une bonne partie des calculs se trouvent en annexe D. Nous nous contenterons d'esquisser ici les grandes lignes du calcul.

Tout d'abord, il est utile de séparer le calcul en deux parties : la partie dynamique qui concerne les intégrations et la partie relative à la fonction de mesure qui concerne le calcul des signaux à partir des résultats des intégrations.

La partie dynamique concerne les intégrations des équations du mouvement, du temps propre et des équations de l'évolution de la tétrade. De façon générique, nous pouvons écrire ces équations dynamiques sous la forme

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{a}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \alpha, t) \tag{3.8}$$

où α sont des paramètres.

Ensuite, les observables sont construites à l'aide du résultat des intégrations (ces observables sont souvent définies comme étant la *fonction de mesure*)

$$O_{GRi} = O_{GR}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \zeta; \tau_i) \tag{3.9}$$

où ζ sont des paramètres qui apparaissent dans le modèle et $\vec{x}$ et $\dot{\vec{x}}$ représentent le résultat de l'intégration du modèle dynamique. Le calcul des dérivées partielles se fait alors aisément

$$\frac{\partial O_{GR}}{\partial p_j} = \left.\frac{\partial O_{GR}}{\partial p_j}\right|_{\vec{x},\dot{\vec{x}}} + \frac{\partial O_{GR}}{\partial \vec{x}}\frac{\partial \vec{x}}{\partial p_j} + \frac{\partial O_{GR}}{\partial \dot{\vec{x}}}\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial p_j} \tag{3.10}$$

et fait apparaitre deux types de termes : des termes liés à la modélisation de la fonction de mesure $\frac{\partial O_{GR}}{\partial p_j}$, $\frac{\partial O_{GR}}{\partial \vec{x}}$ et $\frac{\partial O_{GR}}{\partial \dot{\vec{x}}}$ et des termes liés à la dynamique $\frac{\partial \vec{x}}{\partial p_j}$ et $\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial p_j}$. Les termes relatifs à la modélisation de la fonction de mesure se dérivent analytiquement et sont développés explicitement dans l'annexe D.2 tandis que les termes relatifs à la dynamique se calculent en intégrant les équations variationnelles (parfois appelées équations aux dérivées partielles).

Les équations variationnelles s'expriment en dérivant les équations d'évolution (3.8) par rapport aux paramètres

$$\frac{\partial \ddot{\vec{x}}}{\partial p_j} = \frac{d}{dt^2}\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial p_j}\right) = \frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}}\frac{\partial \vec{x}}{\partial p_j} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial \dot{\vec{x}}}\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial p_j} + \left.\frac{\partial \vec{a}}{\partial p_j}\right|_{\vec{x},\dot{\vec{x}}} \tag{3.11}$$

où la variable d'intégration est $\frac{\partial \vec{x}}{\partial p_j}$. Ces équations variationnelles s'expriment analytiquement à partir des équations dynamiques et elles s'intègrent conjointement avec les équations dynamiques. Le modèle dynamique utilisé de même que toutes les équations variationnelles relatives se trouvent dans l'annexe D.1.

3.4 Tests des dérivées partielles

Il est nécessaire de vérifier que la dérivation et le codage des dérivées partielles présentées dans l'annexe D soient corrects. Pour ce faire, une méthode consiste à comparer la dérivée partielle calculée par les équations dérivées analytiquement avec des estimations de cette même dérivée estimée numériquement par deux schémas numériques différents. Pour expliciter ceci, nous noterons $O(p_l)$ l'observable dont nous désirons calculer la dérivée (il s'agit du Range, Doppler, ascension droite ou déclinaison). Nous noterons par $O_{,j}(p_l) = \frac{\partial O}{\partial p_j}$ la dérivée partielle de cette observable telle que calculée par les formules analytiques présentées en annexe D.

Nous allons utiliser deux estimations numériques de cette dérivée partielle que nous noterons $D_{1,j}(\varepsilon, p_l)$ et $D_{2,j}(\varepsilon, p_l)$ définies par

$$D_{1,j}(\varepsilon, p_l) = \frac{O(p_j + \varepsilon) - O(p_j)}{\varepsilon} \tag{3.12}$$

$$D_{2,j}(\varepsilon, p_l) = \frac{O(p_j + \varepsilon) - O(p_j - \varepsilon)}{2\varepsilon}. \tag{3.13}$$

Une simple expansion de Taylor permet de trouver les précisions de ces schémas numériques

$$O_{,j}(p_l) = D_{1,j}(\varepsilon, p_l) + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{3.14a}$$

$$O_{,j}(p_l) = D_{2,j}(\varepsilon, p_l) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{3.14b}$$

Par conséquent, une bonne indication du fait que la dérivée partielle $O_{,j}$ est calculée et codée correctement est que l'erreur commise entre la dérivée analytique et numérique soit relativement petite. En outre, il faut que l'erreur entre la dérivée analytique et numérique d'ordre 2 soit de l'ordre de l'erreur entre la dérivée analytique et numérique d'ordre 1 au carré.

Pour illustration, la figure 3.1 représente les erreurs relatives entre les dérivées partielles calculées analytiquement et les dérivées partielles numériques. La situation simulée correspond

à la mission Cassini à partir du 1 mai 2001 sur une période de trois ans. Le modèle utilisé inclut le Soleil, la Terre et la sonde Cassini. Sur la figure 3.1, sont représentées les erreurs relatives des dérivées partielles par rapport à deux paramètres : une position (X) de la Terre et la masse du Soleil. Les erreurs des dérivées par rapport aux autres paramètres se comportent de manière semblable. Nous pouvons remarquer que l'erreur relative par rapport à la dérivée numérique d'ordre 2 est beaucoup plus petite que celle par rapport à la dérivée numérique d'ordre 1 (plus précisément, l'erreur relative par rapport à D_2 est de l'ordre de l'erreur relative par rapport à D_1 au carré). Ce comportement est complètement conforme à ce qui est attendu et est une indication que les dérivées analytiques sont calculées correctement dans notre software.

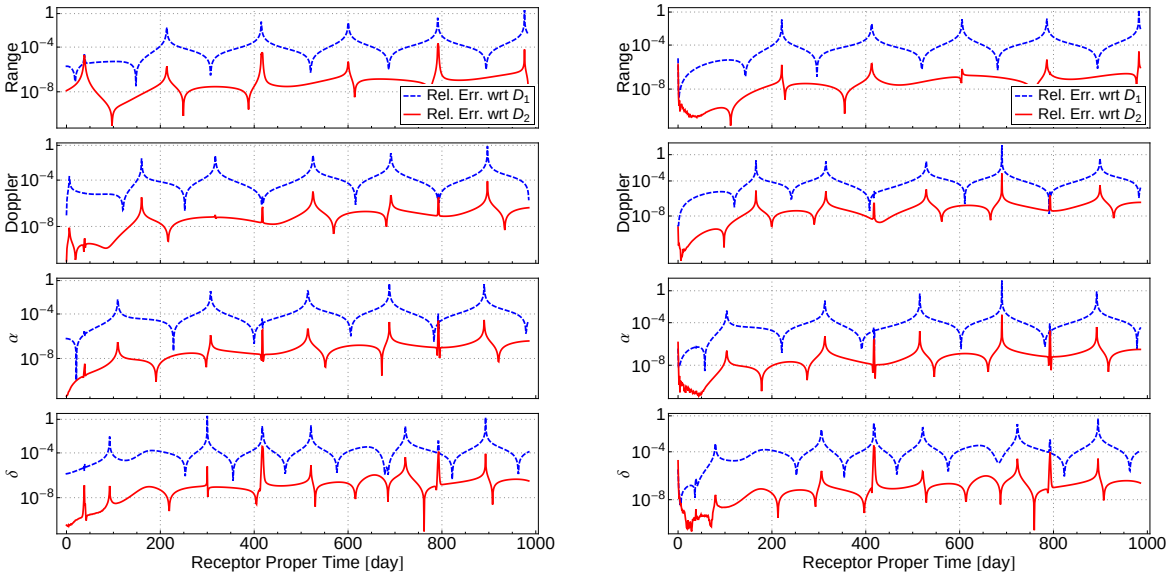

FIGURE 3.1 – Erreur relative entre la dérivée analytique des différents signaux (Range, Doppler, ascension droite et déclinaison) et les dérivées numériques d'ordre 1 (en pointillé bleue) et d'ordre 2 (en rouge continu). A gauche : dérivée partielle par rapport à la position initiale X de la Terre. A droite : dérivée partielle par rapport à la masse du Soleil.

3.5 Quels paramètres est-il possible d'ajuster ?

Comme indiqué dans l'introduction de ce chapitre, la comparaison de deux signaux produits dans des théories différentes de la gravitation requiert de ajuster les paramètres impliqués dans le problème. Ces paramètres sont constitués des conditions initiales des corps considérés (planètes et spacecraft) de même que les masses des planètes. Cependant, il faut être prudent dans le choix des paramètres à ajuster à cause des corrélations qui peuvent survenir. Dans certains cas, des corrélations entre des paramètres peuvent devenir égales à l'unité. Ceci rend la matrice $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ dégénérée et par conséquent non-inversible rendant la recherche de la solution du problème de l'ajustement par moindres carrés compliqué (comme l'indique la relation (3.5)).

Il est utile de comprendre pourquoi de telles corrélations peuvent apparaître. Il est possible de montrer que le problème de dégénérescence de la matrice normale $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ est intimement lié

à la présence de symétries qui laissent les mesures O invariantes [Bonanno et Milani, 2002]. Ceci se comprend aisément car si nous considérons un jeu de paramètres p_l solution de l'ajustement (c'est-à-dire qui minimise la quantité S définie à la relation (3.2)), alors tous les jeux de paramètres obtenus en appliquant la symétrie laissant les mesures invariantes sont aussi des solutions de l'ajustement (car les quantités O n'auront pas changé et ainsi la valeur de S sera semblable). Ceci signifie qu'une symétrie dans le problème rend la solution de l'ajustement non-unique. Cependant, dans le cas qui nous intéresse ici, nous nous intéressons à trouver une solution parmi toutes les solutions possibles de l'ajustement car toutes les autres solutions obtenues en appliquant les transformations liées au groupe de symétries sous-jacent laisseront les quantités O de même que les résidus recherchés inchangés. Par conséquent, une manière de s'assurer que la procédure de minimisation décrite par la relation (3.5) converge est de briser les symétries du système en réduisant le nombre de paramètres à ajuster.

Illustrons ces propos par un exemple concret en considérant la situation utilisée pour tester le software : une simulation du Soleil, de la Terre et de la sonde Cassini. A priori, il y a 18 conditions initiales à ajuster (3 composantes de position et 3 composantes de vitesse par corps) en plus de la masse du Soleil (si on ne considère pas la masse de la Terre). Il est évident que les signaux entre la Terre et Cassini sont invariants sous les translations globales, sous les boosts de Lorentz globaux et sous les rotations spatiales globales. Par conséquent, tenter d'ajuster toutes les conditions initiales n'est pas réalisable. Il faut donc fixer un certain nombre de ces conditions initiales pour briser ces symétries avant de procéder à l'ajustement. Dans cet exemple, une solution pour briser l'invariance sous les translations et les boosts est de fixer les six conditions initiales du Soleil. Cela revient à fixer l'origine du repère utilisé. Pour briser l'invariance sous rotations, il faut fixer trois conditions initiales supplémentaires (une rotation est spécifiée par 3 paramètres ou encore il existe 3 générateurs infinitésimaux indépendants au groupe $SO(3)$) choisies de telle façon que l'invariance sous rotations soit brisée.

En pratique, la recherche des 3 conditions supplémentaires qui brisent l'invariance sous rotations n'est pas toujours évidente. Une façon de vérifier que l'invariance sous rotations est bel et bien brisée est de montrer que les conditions initiales non ajustées ne laissent plus la liberté d'effectuer une rotation globale qui laisse le système et les conditions imposées invariants. Une façon de faire est de considérer une rotation infinitésimale quelconque (paramétrée par trois paramètres) et de montrer que les conditions initiales imposées permettent de déterminer de façon unique les trois paramètres caractéristiques de la rotation. Si ce n'est pas le cas, cela veut dire qu'il y a une dégénérescence qui reste synonyme d'une invariance résiduelle. Illustrons ces propos dans le cas considéré jusqu'à présent : une simulation du Soleil, de la Terre et de Cassini. Nous commençons par imposer les six conditions initiales du Soleil pour fixer l'origine du système de coordonnées. Ensuite, nous allons imposer trois conditions initiales de la Terre pour briser l'invariance sous rotation. Pour trouver quels jeux de paramètres nous pouvons fixer, considérons une rotation infinitésimale quelconque paramétrisée par les trois angles θ_x, β, γ. La rotation infinitésimale s'écrit sous forme matricielle par

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \theta_x \mathbf{R}_x + \theta_y \mathbf{R}_y + \theta_z \mathbf{R}_z \tag{3.15}$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice identité, $\mathbf{R}_{x,y,z}$ sont les trois générateurs de l'algèbre de Lie correspondants aux rotations autour des axes x, y et z. Par conséquent, les coordonnées et la vitesse de la Terre

se transforment de la manière suivante sous cette rotation infinitésimale

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& x+\theta_y z-\theta_z y \\ y' &=& y-\theta_x z+\theta_z x \\ z' &=& z+\theta_x y-\theta_y x \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} v'_x &=& v_x+\theta_y v_z-\theta_z v_y \\ v'_y &=& v_y-\theta_x v_z+\theta_z v_x \\ v'_z &=& v_z+\theta_x v_y-\theta_y v_x \end{array}\right. . \tag{3.16}$$

Les trois quantités que nous déciderons de ne pas ajuster seront caractérisées par le fait que la quantité primée est égale à la quantité non primée. Par conséquent, les trois conditions initiales fixées seront bien choisies uniquement si le jeu d'équations constitué de l'égalité de ces trois conditions avant et après rotation permettent de déterminer de façon univoque les trois paramètres $\theta_x, \theta_y, \theta_z$. Si un de ces trois paramètres n'est pas déterminé de façon unique, alors l'invariance sous rotations n'est pas brisée. Dans le cas qui nous intéresse, le plan orbital de la Terre reste constant et est caractérisé par le fait que $z \sim v_z \sim 0$. Par conséquent, les conditions initiales restent invariantes sous une rotation infinitésimale uniquement si

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 &=& -\theta_z y \\ 0 &=& \theta_z x \\ 0 &=& \theta_x y-\theta_y x \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} 0 &=& -\theta_z v_y \\ 0 &=& \theta_z v_x \\ 0 &=& \theta_x v_y-\theta_y v_x \end{array}\right. . \tag{3.17}$$

Il nous faut maintenant choisir parmi ces 6 conditions, 3 conditions qui permettent de déterminer les 3 paramètres. Clairement, il faut prendre les deux équations relatives à la composante z et une des quatre autres (on obtient alors que tous les paramètres sont nuls et il n'existe donc plus de rotation qui laisse le système invariant). Ainsi, dans l'exemple considéré, pour lever la dégénérescence liée à l'invariance sous rotation, il suffit de fixer trois conditions initiales de la Terre : la position et la vitesse selon l'axe z et une autre condition initiale quelconque. Ceci est vérifié numériquement : si on tente d'ajuster la position ou la vitesse selon l'axe z, le fit devient dégénéré et l'inversion de la matrice normale est impossible.

En résumé, dans cette section, nous avons montré qu'il est impossible d'ajuster tous les paramètres en raison des symétries présentes qui rendent le fit dégénéré et l'inversion de la matrice normale impossible. Une solution à cette problématique consiste à ne pas ajuster un certain nombre de paramètres choisis de telle façon à ce que les invariances soient brisées. En particulier, l'invariance sous translations et sous boosts globaux est brisée si on n'ajuste pas les conditions initiales d'un corps (ce qui correspond à fixer l'origine du repère). De même, l'invariance sous rotation globale requiert de fixer trois autres conditions initiales bien choisies (ce qui correspond à fixer l'orientation du repère).

3.6 Précision numérique du processus complet

Un test de consistance des deux logiciels (le software de simulations présenté au chapitre précédent et le software d'ajustement présenté dans ce chapitre) peut être effectué pour vérifier l'exactitude des codes et pour estimer les erreurs numériques du processus complet (simulation et ajustement). Ce test consiste à utiliser le logiciel de simulation en entrant la métrique RG pour simuler des observables en RG. Ensuite, nous utiliserons le logiciel d'ajustement (qui travaille en RG par définition) pour ajuster les conditions initiales sur ces observables simulées. Etant donné que dans ce cas, la théorie de la gravitation est la même dans la simulation et l'ajustement,

nous devrions obtenir des résidus nuls. Le signal résiduel correspondra alors à l'erreur numérique et donnera une bonne estimation des précisions atteignables avec les logiciels. La figure 3.2 représente les résidus obtenus pour une simulation de signaux two-way entre la Terre et Cassini à partir de mai 2001 pendant trois ans. Les précisions obtenues sont de l'ordre de quelques centimètres pour le Range (pour un signal de l'ordre de 10^9 km comme indiqué à la figure 2.6), de 10^{-17} (ce qui correspond à quelques nm/s) pour le Doppler (dont le signal est de l'ordre de $1 + 10^{-4}$ comme indiqué à la figure 2.6) et de 10^{-2} μas pour les mesures angulaires (dont les signaux sont de l'ordre du rad comme indiqué à la figure 2.6). Ceci indique que la précision relative de tout le processus (simulation suivi de l'ajustement) est de l'ordre de $10^{-13} - 10^{-14}$ en `double précision`. Cette précision correspond à la précision attendue des intégrateurs numériques en `double précision` (voir section 2.4.1). De plus, l'allure des courbes d'erreurs du Range et du Doppler confirme qu'il s'agit bien d'erreurs numériques. Par contre, dans le cas des variables angulaires, l'allure des courbes d'erreur est plus régulière. Ceci s'explique car dans le logiciel d'ajustement, les variables angulaires sont calculées à l'ordre $1/c^2$ (alors qu'elles sont calculées à l'ordre $1/c^3$ dans le logiciel de simulation), il y a donc des contributions des termes d'ordre supérieur qui commencent à se voir (mais cela reste largement inférieur à la précision de mesure). En conclusion, la figure 3.2 montre qu'il y a un excellent accord entre les deux logiciels, ce qui en valide l'implémentation.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la procédure pour comparer des signaux générés dans des théories différentes et pour obtenir le signal résiduel incompressible généré par une théorie alternative. Cette procédure correspond a la seconde étape du processus complet décrit à la section 1.3. La comparaison de signaux dans des théories différentes se fait au moyen d'un ajustement par moindres carrés des conditions initiales et des masses des corps considérés. Ce fit aux moindres carrés est présenté en détails et les équations utilisées dans le software sont décrites complètement dans l'annexe D. Finalement, nous avons discuté le problème de dégénérescence de l'ajustement qui est intimement lié à la présence de symétries et d'invariances dans le problème physique considéré. Pour terminer, une estimation de l'erreur numérique a été fournie en réalisant une simulation et un ajustement en RG. L'erreur numérique relative est de l'ordre de $10^{-13}-10^{-14}$ ce qui est très bon. Avec les deux logiciels (celui de simulation présenté au chapitre précédent et celui d'ajustement présenté dans ce chapitre), nous sommes maintenant à même de produire des signatures incompressibles de Range, Doppler et de mesures angulaires qui seraient observées dans une théorie alternative de la gravitation.

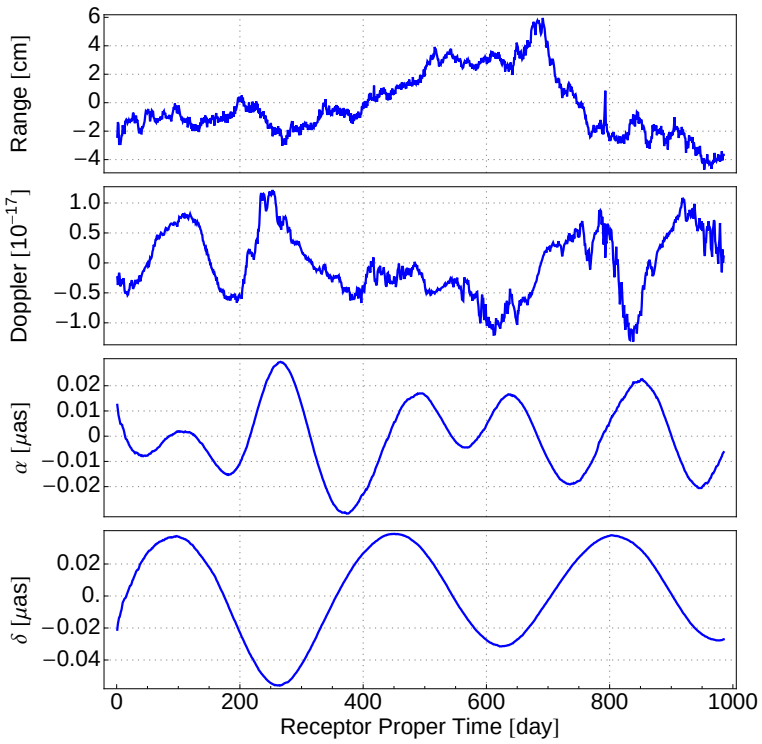

FIGURE 3.2 – Représentation des résidus du Range, Doppler, ascension droite et déclinaison pour une simulation en RG suivi par un ajustement des conditions initiales en RG (nous avons utilisé l'expression qui donne le Range en terme d'une longueur (voir la note de bas de page 1 à la page 35)). Les résidus sont dus aux erreurs numériques (pour le Range et le Doppler) et à des termes d'ordre supérieur (pour les angles) présents dans l'estimation basée sur une intégration numérique par rapport à celle basée sur une estimation analytique. La simulation correspond à un signal two-way simulé pendant 3 ans entre la Terre et Cassini à partir de Mai 2001. Les signaux correspondant à ces résidus se trouvent sur la Figure 2.6.

Chapitre 4

Signature d'observables dans le Système Solaire

"We can imagine that this complicated array of moving things which constitutes "the world" is something like a great chess game being played by the gods, and we are observers of the game. We do not know what the rules of the game are ; all we are allowed to do is to watch the playing. Of course, if we watch long enough, we may eventually catch on to a few of the rules. The rules of the game are what we mean by fundamental physics..."

R.P. Feynman

Sommaire

4.1 Introduction 76
4.2 Situations Considérées 77
4.2.1 Analyse des précessions des périhélies planétaires 77
4.2.2 Observations radioscience la sonde Cassini 78
4.2.3 Observations VLBI du système de Saturne 79
4.3 Théorie Post-Einsteinienne 80
4.3.1 Présentation théorique 80
4.3.2 Précession du périhélie 83
4.3.3 Simulations des observables radioscience de Cassini 84
4.3.4 Simulations d'observables VLBI du système de Saturne 88
4.4 Effet de champ Externe apparaissant dans les théories MOND . . . 90
4.4.1 Présentation théorique 90
4.4.2 Précession du périhélie 93
4.4.3 Simulations des observables radioscience de Cassini 94
4.4.4 Simulations d'observables VLBI du système de Saturne 94
4.5 Extension du Modèle Standard (SME) 95
4.5.1 Présentation théorique 95
4.5.2 Précession du périhélie 97
4.5.3 Simulations d'observables radioscience de Cassini 98
4.5.4 Simulations d'observables VLBI dans le système de Saturne 103
4.6 Théorie tenseur-scalaire de type "John + George" 104

4.6.1 Présentation théorique 104
4.6.2 Précession des périhélies 107
4.6.3 Simulations d'observables radioscience de Cassini 107
4.6.4 Simulations d'observables VLBI du système de Saturne 110
4.7 Ajout de Jupiter dans la simulation de Cassini 111
4.8 Variation des paramètres lors de l'ajustement 113
4.9 Conclusion 114

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les principaux résultats obtenus concernant les simulations d'observations dans le Système Solaire en théories alternatives de la gravitation.

Commençons par rappeler les objectifs poursuivis (qui sont expliqués en long et en large à la section 1.3) : il s'agit de dériver les signatures incompressibles produites par des théories alternatives de la gravitation dans les observations du Système Solaire. Ces signatures incompressibles pourront alors être utilisées comme templates et être recherchées dans les résidus des analyses des vraies données. L'ordre de grandeur de ces signatures incompressibles donne également une idée de l'ordre de grandeur des contraintes qu'il est possible d'atteindre lors de l'analyse des vraies données. De plus, si on suppose qu'aucun signal anormal n'a été détecté dans les données, cela nous permet de donner un ordre de grandeur des contraintes sur les paramètres qui caractérisent les théories alternatives. Cela suppose qu'aucun signal anormal n'a été détecté dans l'analyse des vraies données, que les simulations effectuées couvrent la même période que les données analysées et que dans l'analyse des vraies données, on n'a pas ajusté de paramètres en plus par rapport à ceux ajustés ici.

La dérivation de la signature incompressible se fait en deux étapes comme indiqué à la section 1.3. La première étape consiste à simuler les observations dans la théorie alternative en considérant une situation simplifiée où seuls les éléments qui sont susceptibles de produire une déviation importante due à la théorie alternative sont considérés. Ainsi, seuls les éléments qui influencent les observations au premier ordre doivent être considérés : il est inutile de simuler toutes les planètes ; nous pouvons négliger le champ gravitationnel des planètes ; nous pouvons négliger les effets thermiques, de radiation solaire, etc... Nous justifierons cette simplification à la section 4.7. Les simulations réalisées pour cette première étape se font à partir de la métrique de l'espace-temps en utilisant les méthodes présentées dans le chapitre 2. La seconde étape consiste à utiliser les observables simulées et à en faire une analyse standard en RG. Cette analyse consiste essentiellement en un fit des conditions initiales des corps présents dans le système et à une estimation de divers paramètres de gravité (essentiellement les champs gravitationnels des corps) et de paramètres liés aux forces non-gravitationnelles (voir la section 1.3). Ce fit va ainsi absorber une partie du signal lié à la théorie alternative et le signal restant dans le résidu est appelé signature incompressible provoquée par la théorie alternative. D'autre part, le fit des conditions initiales permet de résoudre la problématique de la non invariance sous difféomorphismes des conditions initiales et donc du signal produit (voir section 3.1). Dans le

cadre de ce travail, nous avons ajusté les conditions initiales des différents corps et les masses des planètes. La description complète de cette étape est présentée au chapitre 3.

Les simulations ont été réalisées pour deux situations distinctes : des observations radioscience de la sonde Cassini durant son voyage interplanétaire entre Jupiter et Saturne et des observations VLBI du système de Saturne. Les théories alternatives considérées sont celles présentées au chapitre 1.5 : la théorie Post-Einsteinienne, l'effet du champ externe dans des théories de type MOND, l'extension du modèle standard et une sous-classe de théories dérivant des "Fab-Four". Finalement, nous avons également dérivé les contraintes provenant de l'analyse des précessions des périhélies.

Nous allons tout d'abord présenter les situations considérées en détails : l'analyse des précessions des périhélies, les observations radioscience de Cassini et les observations VLBI du système de Saturne. Ensuite, pour chaque théorie considérée, nous suivrons la même démarche : une présentation de la théorie en question, une analyse des contraintes provenant de l'analyse des périhélies planétaires, une analyse des observations radioscience de Cassini et une analyse des données VLBI des observations de Saturne.

4.2 Situations Considérées

4.2.1 Analyse des précessions des périhélies planétaires

Dans le cadre de cette thèse, nous avons dérivé des contraintes sur les théories alternatives en utilisant les dernières données disponibles à partir des éphémérides INPOP [Fienga et al., 2011]. La table 5 de Fienga et al. [2011] donne des intervalles de confiance sur les avances supplémentaires de l'argument du périhélie tels que les résidus de INPOP ne varient pas de plus de 5 %. Cela veut dire que tant que les avances supplémentaires des périhélies (par rapport à la RG) sont compris dans les intervalles fournis par Fienga et al. [2011], les résidus des éphémérides INPOP ne varient pas de plus de 5 %. Pour toutes les théories présentées dans ce chapitre, nous avons calculé théoriquement les précessions supplémentaires des périhélies induites par les théories alternatives et nous avons comparé les valeurs trouvées avec les contraintes provenant de la table 5 de Fienga et al. [2011]. Cette comparaison nous donne donc un ordre de grandeur de contraintes sur les paramètres caractérisant les théories alternatives. Ces contraintes ne sont pas équivalentes à un ajustement direct des paramètres dans les éphémérides. En effet, pour pouvoir estimer précisément les paramètres, il faudrait ajouter l'accélération supplémentaire résultant de la théorie alternative dans les équations du mouvement des éphémérides et réaliser un fit global de tous les paramètres. La procédure utilisée par INPOP néglige certains effets des théories considérées sur la dynamique et de plus, les corrélations entre les paramètres peuvent détériorer légèrement la précision obtenue ici. D'autre part, notons que les éphémérides INPOP sont construites en utilisant des observations traitées en RG. Ceci signifie que les modifications de la propagation de la lumière provoquées par les théories alternatives que nous considérons ne sont pas traitées dans cette procédure. Par conséquent, il ne faut pas faire confiance aux contraintes obtenues par l'analyse des périhélies pour les paramètres qui influencent considérablement la propagation des signaux électromagnétiques.

Pour calculer théoriquement la précession supplémentaire du périhélie causée par les théories alternatives, nous avons utilisé une approche perturbative basée sur les équations de Gauss. L'idée est d'écrire les équations du mouvement (les équations géodésiques) sous la forme d'une somme d'une accélération correspondant à la RG et d'une accélération perturbatrice provenant de la théorie alternative

$$\vec{a} = \vec{a}_{RG} + \vec{a}_{\rm pert}. \tag{4.1}$$

Ensuite, l'idée est d'utiliser la théorie des perturbations au premier ordre pour dériver l'avance additionnelle du périhélie. Concrètement, il faut écrire la force perturbatrice en terme des éléments orbitaux (éléments osculateurs : le demi grand axe a, l'excentricité e, l'inclinaison i, longitude du noeud ascendant Ω, argument du périhélie ω et l'anomalie moyenne M). Ensuite, il suffit d'utiliser les équations de Gauss [voir par exemple Beutler, G. and Mervart, L. and Verdun A., 2005; Brumberg, 1991; Zarrouati, 1987] qui donnent l'évolution des éléments orbitaux avec le temps en fonction de la force perturbatrice (il s'agit en fait d'une réécriture des équations du mouvement en utilisant les paramètres orbitaux comme variables). Les équations de Gauss s'écrivent sous la forme

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left(Se\sin f + T\frac{p}{r}\right) \tag{4.2a}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left(S\sin f + T(\cos f + \cos E)\right) \tag{4.2b}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}W \tag{4.2c}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}W \tag{4.2d}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\cos i\frac{d\Omega}{dt} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-S\cos f + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\right] \tag{4.2e}$$

$$\frac{dM_0}{dt} = -\sqrt{1-e^2}\left(\frac{d\omega}{dt} + \cos i\frac{d\Omega}{dt}\right) - S\frac{2r}{na^2} \tag{4.2f}$$

où M_0 est l'anomalie moyenne à l'origine temporelle, $n = \frac{2\pi}{P}$ avec P la période orbitale et S, T, W sont les projections de la force perturbatrice sur le vecteur radial et transverse à la trajectoire et sur le vecteur perpendiculaire au plan orbital.

Finalement, il est possible de résoudre analytiquement ces équations au premier ordre et de les moyenner sur une période orbitale pour mettre en évidence les effets séculaires. Nous trouvons l'expression de l'avance du périhélie suivante

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = \frac{1}{P}\int_0^P \frac{d\omega}{dt}dt. \tag{4.3}$$

4.2.2 Observations radioscience la sonde Cassini

La première situation considérée pour les simulations réalisées dans le cadre de cette thèse concerne la sonde Cassini de la mission Cassini-Huygens. La mission Cassini-Huygens est une mission réalisée par la NASA en collaboration avec l'ESA. Son objectif est l'étude de la planète

Saturne et de certains de ses satellites dont Titan sur lequel le module Huygens s'est posé en 2005 [ESA, 2005]. La raison pour laquelle nous nous sommes intéressés à Cassini est liée au fait que la sonde ait été suivie très précisément durant sa phase de croisière entre Jupiter et Saturne (en plus du suivi de navigation habituel). La sonde fut traquée pour deux raisons. Tout d'abord, elle fut suivie pendant 30 jours lors d'une conjonction solaire pour réaliser un test de la gravitation (qui donne aujourd'hui la meilleure estimation du paramètre Post-Newtonien γ) [Bertotti et al., 2003]. Ensuite, elle fut suivie trois fois lors d'oppositions solaires pour des durées d'environ 40 jours dans le cadre de la recherche d'ondes gravitationnelles [Armstrong et al., 2003]. Lors de cette phase de croisière entre Jupiter et Saturne, la sonde subit très peu de perturbations gravitationnelles et la précision obtenue est excellente (de l'ordre de 10^{-14} pour le Doppler [Bertotti et al., 2003]).

Nous avons donc simulé des signaux two-way Range et Doppler pour un arc qui commence début mai 2001 pour une période de 3 années. Pour fixer les idées, la situation simulée est représentée à la figure 4.1. Les conditions initiales des planètes proviennent des éphémérides INPOP08 [Fienga et al., 2009] et les conditions initiales de Cassini proviennent de la base de donnée SPICE [Acton, 1996].

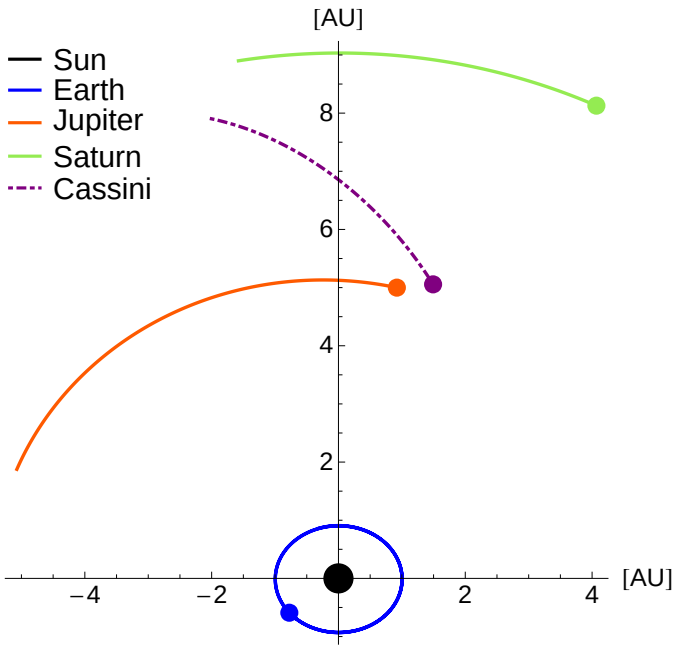

FIGURE 4.1 – Représentation de la situation simulée dans le cadre de la mission Cassini.

4.2.3 Observations VLBI du système de Saturne

Dans le cadre de ce travail, nous avons également considéré des données VLBI entre la Terre et le système Saturnien. Plusieurs raisons nous ont poussé à considérer cette situation. Tout d'abord, la sonde Cassini est actuellement en orbite dans le système Saturnien et il existe des données d'observations VLBI de cette sonde [Jones et al., 2011]. Ces données VLBI provenant de Cassini contraignent fortement les éphémérides de Saturne [Fienga et al., 2011]. La précision

sur les mesures de Cassini (qui se répercute sur la précision des éphémérides de Saturne) est très bonne : la précision est de l'ordre de 0.5 mas pour les variables angulaires [Jones et al., 2011; Fienga et al., 2011; Folkner, 2010a]. Il est donc intéressant de considérer cette situation. Cependant, la simulation de la sonde Cassini dans le système Saturnien n'est pas envisageable. En effet, la sonde a une orbite extrêmement compliquée dans le système visitant à tour de rôle différents satellites de Saturne. De plus, l'orbite de la sonde n'est pas disponible. C'est pourquoi, nous avons simulé un lien électromagnétique directement entre Saturne et la Terre. Ceci revient à supposer que les modifications de la gravité induites sur la trajectoire de la sonde dans le système de Saturne sont petites par rapport aux modifications sur les orbites de la Terre et de Saturne. C'est une hypothèse de travail qui semble raisonnable mais qui est adoptée faute de pouvoir faire mieux. Dans le futur, il serait peut-être intéressant de vérifier à postériori cette hypothèse en considérant un modèle où Cassini serait dans une orbite relativement simplifiée autour de Saturne [1]. Seules les variables angulaires seront présentées dans cette section car ce sont celles qui ont le plus grand poids dans les éphémérides. Nous ne nous attarderons donc pas sur le Range et le Doppler.

La situation considérée consiste en une simulation de 6 ans à partir du 1 janvier 2004 (soit environ la date pour laquelle Cassini est entrée dans le système de Saturne) des ascensions droites et déclinaisons de Saturne observées depuis la Terre. Nous avons donc simulé la trajectoire du Soleil, de la Terre et de Saturne dont les conditions initiales furent obtenues par les éphémérides INPOP.

4.3 Théorie Post-Einsteinienne

4.3.1 Présentation théorique

La théorie PEG (*Post-Einsteinian Gravity*) est une phénoménologie développée par M.-T. Jaekel et S. Reynaud dans une série de papiers [Jaekel et Reynaud, 2005b, 2006a, 2005a, 2006b; Reynaud et Jaekel, 2007; Jaekel et Reynaud, 2008; Reynaud et Jaekel, 2009].

Tout d'abord, dans la théorie PEG, la nature géométrique de la gravitation n'est pas modifiée par rapport à la RG. Ainsi, la gravitation est identifiée au tenseur métrique tout comme dans la théorie d'Einstein et le principe d'équivalence d'Einstein n'est pas modifié. En particulier, cela implique l'universalité de la chute libre et le fait que les masses tests suivent les trajectoires géodésiques de cette métrique. Cela implique également que différentes horloges idéales fournissent le même temps qui est le temps propre $\int ds$. Comme nous l'avons mentionné dans la section 1.2.2, ces propriétés sont actuellement extrêmement bien testées et donc non remises en cause dans les théories PEG. Cependant, comme indiqué par Jaekel et Reynaud [2006a], cela ne signifie pas que le principe d'équivalence d'Einstein est une propriété exacte de la nature mais bien que les potentielles déviations attendues sont plus petites que les déviations produites par

1. Notons que ceci demande de connaitre la métrique pour un ensemble de masses alors que la majorité des métriques considérées dans ce travail sont des métriques dérivées dans le cadre de la symétrie sphérique, c'est-à-dire pour une seule masse ponctuelle. Il y a donc un travail théorique (pas évident) pour dériver les métriques qui pourraient être utilisées pour simuler des satellites en orbite autour de planètes.

une théorie PEG.

La phénoménologie PEG propose donc d'étendre le formalisme PPN dans le cadre où on considère que le champ gravitationnel est engendré par une masse ponctuelle et sphérique. La métrique en symétrie sphérique en coordonnées isotropes s'écrit sous la forme

$$ds^2 = g_{00}(r)c^2dt^2 + g_{rr}(r)(dr^2 + r^2d\Omega^2). \tag{4.4}$$

La phénoménologie PEG paramétrise la déviation par rapport à la RG par deux fonctions arbitraires de la coordonnée radiale : $\delta\phi_N$ et $\delta\phi_P$.

$$g_{00} = -1 - 2\phi_N = -1 - 2\phi - 2\phi^2 - 2\delta\phi_N = [g_{00}]_{RG} - 2\delta\phi_N \tag{4.5a}$$
$$g_{rr} = 1 - 2\phi_N + 2\phi_P = 1 - 2\phi - 2\delta\phi_N + 2\delta\phi_P = [g_{rr}]_{RG} - 2\delta\phi_N + 2\delta\phi_P \tag{4.5b}$$

avec $\phi = -\frac{GM}{c^2r}$ le potentiel Newtonien. Ce type de métrique étend clairement le formalisme PPN qui peut être retrouvé dans le cas où

$$\delta\phi_N(r) = (\beta - 1)\phi(r)^2 \tag{4.6a}$$
$$\delta\phi_P(r) = -(\gamma - 1)\phi(r) + (\beta - 1)\phi(r)^2. \tag{4.6b}$$

Cette relation permet ainsi d'interpréter la phénoménologie PEG comme étant une généralisation du formalisme Post-Newtonien dans lequel les paramètres Post-Newtoniens (γ et β) sont promus au rang de fonctions dépendant de la coordonnée radiale ($\gamma(r)$ et $\beta(r)$).

Bien que très générale, cette phénoménologie a été développée par Jaekel et Reynaud [2005b] en considérant une extension des équations d'Einstein sous forme non-locale qui s'écrit dans l'espace des impulsions sous la forme

$$G_{\mu\nu}[k] = \chi_{\mu\nu}^{\lambda\rho}[k]T_{\lambda\rho}[k] \tag{4.7}$$

où $\chi_{\mu\nu}^{\lambda\rho}$ est la fonction de réponse effective de la métrique au tenseur énergie-impulsion. La théorie de la RG est évidemment retrouvée dans le cas particulier où

$$\left[\chi_{\mu\nu}^{\lambda\rho}[k]\right]_{RG} = \frac{8\pi G}{c^4}\delta_\mu^\lambda\delta_\nu^\rho. \tag{4.8}$$

Dans les théories PEG, cela signifie que le tenseur d'Einstein dans le vide n'est plus nécessairement nul. Il est possible de montrer que la résolution de ces équations de champs dans le cas où la source est une masse ponctuelle conduit à remplacer la constante de gravitation par deux constantes dépendantes de la position dont les fonctions $\delta\phi_{N/P}$ sont la conséquence [Jaekel et Reynaud, 2005b, 2006a].

Mentionnons que la considération d'une équation de champ non-locale est justifiée par Jaekel et Reynaud [2005b, 2006a] comme provenant de considérations quantiques de la gravitation (qui sont par essence non-locales). Cette interprétation pose certaines difficultés et dans le cadre de cette thèse, nous nous contenterons d'utiliser le formalisme PEG comme une phénoménologie très générale sans référence particulière à une théorie fondamentale sous-jacente. Ceci laisse les deux potentiels complètement libres car dépendant d'une éventuelle théorie sous-jacente. D'un

point de vue phénoménologique, nous avons considéré que les deux fonctions $\delta\phi_{N/P}$ sont libres et dans le cadre de cette thèse, nous avons considéré une expansion en série

$$\delta\phi_N(r) = \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \frac{GM}{c^2\lambda}\log\frac{r}{\lambda} + \delta\beta\left(\frac{GM}{c^2 r}\right)^2 \tag{4.9a}$$

$$\delta\phi_P(r) = \chi_1 r + \chi_2 r^2 - \delta\gamma\frac{GM}{c^2 r} + \delta\beta\left(\frac{GM}{c^2 r}\right)^2. \tag{4.9b}$$

Dans ces expressions, $\delta\gamma = \gamma - 1$ et $\delta\beta = \beta - 1$ sont liés aux paramètres Post-Newtoniens traditionnels. Les coefficients $\alpha_{1,2}$, $\chi_{1,2}$ et λ sont des paramètres PEG additionnels. Ces paramètres sont liés à la relation non-locale entre le tenseur d'Einstein et le tenseur énergie-impulsion (4.7) [Jaekel et Reynaud, 2005b].

Il est aussi intéressant de voir ce formalisme comme une paramétrisation de la courbure. En effet, le tenseur de Ricci associé à la métrique (4.5) est donné au premier ordre dans la déviation par rapport à la RG par

$$R_{00} = 2\frac{\delta\phi_N'}{r} + \delta\phi_N'' \tag{4.10a}$$

$$R_{rr} = 2\frac{\delta\phi_N' - \delta\phi_P'}{r} + \delta\phi_N'' - 2\delta\phi_P'' \tag{4.10b}$$

$$R_{\theta\theta} = r\left(2\delta\phi_N' - 3\delta\phi_P'\right) + r^2\left(\delta\phi_N'' - \delta\phi_P''\right) \tag{4.10c}$$

où le prime dénote la dérivation par rapport à la coordonnée radiale r et le scalaire de courbure est donné par

$$R = 4\frac{\delta\phi_N' - 2\delta\phi_P'}{r} + 2\delta\phi_N'' - 4\delta\phi_P'' = 4\frac{\delta\phi_1'}{r} + 2\delta\phi_1''. \tag{4.11}$$

Le résultat ci-dessus montre bien comment la combinaison $\delta\phi_N - 2\delta\phi_P$ influencent la trace de la courbure alors que la combinaison $\delta\phi_N - \frac{1}{2}\delta\phi_P$ influence les composantes sans trace (caractérisées dans le tenseur de Weyl).

Le développement en série (4.9) des deux potentiels utilisé dans le cadre de ce travail revient à considérer des termes non nuls dans l'expression de la courbure dans le vide. Ces termes additionnels sont du type : constants (proportionnels à χ_2 et α_2), en $1/r$ (proportionnels à χ_1 et α_1), en $1/r^2$ (proportionnels à λ), en $1/r^3$ (proportionnels à $\delta\gamma$) et en $1/r^4$ (proportionnels à $\delta\beta$).

Il est intéressant de remarquer que des termes linéaires et quadratiques dans la métrique apparaissent naturellement dans une théorie conforme de la gravité (théorie où l'action est définie par l'intégrale de l'invariant conforme) [Mannheim et Kazanas, 1989]. Dans ce contexte, ces termes sont parfois invoqués pour expliquer des observations galactiques qui requièrent l'introduction de matière noire telles que les courbes de rotation des galaxies [Mannheim et Kazanas, 1989; Mannheim, 2006] et des observations cosmologiques [Mannheim, 1990, 2006]. Ces termes (linéaires et quadratiques) furent aussi obtenus par Grumiller [2010] qui dériva un modèle effectif de gravité renormalisable à large distance et en symétrie sphérique.

D'autre part, un terme logarithmique dans la métrique produit une modification en $1/r$ de la loi de Newton qui est parfois utilisée pour expliquer des observations qui requièrent l'introduction de matière noire [Tohline, 1983; Kuhn et Kruglyak, 1987; Hehl et Mashhoon, 2009].

En résumé, dans le cadre de ce travail, nous allons considérer que la théorie PEG est caractérisée par une métrique du type (4.5) dont les potentiels sont paramétrés par (4.9). Nous supposerons que cette expansion n'est valide que dans le Système Solaire.

4.3.2 Précession du périhélie

Il est intéressant d'étudier la précession des périhélies supplémentaire qui découlent d'une théorie PEG. La précession du périhélie d'une masse test suivant les géodésiques de la métrique (4.5) peut aisément se calculer et être utilisée pour contraindre les paramètres PEG qui entrent dans l'expression de la métrique (4.9). Pour ce faire, il faut calculer l'accélération résultant de l'équation géodésique de la métrique (4.5). Cette accélération se dérive du lagrangien

$$L = \frac{GM}{r} + \frac{v^2}{2} - \frac{(GM)^2}{2c^2r^2} + \frac{v^4}{8c^2} + \frac{3}{2}\frac{GM}{r}\frac{v^2}{c^2} - \delta\phi_N c^2 - \frac{3}{2}\delta\phi_N v^2 - \frac{GM}{r}\delta\phi_N + \delta\phi_P v^2 \quad (4.12)$$

et est donnée par

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_{RG} + \vec{a}_{pert} \quad (4.13)\\ &= \vec{a}_{RG} + -c^2\delta\phi'_N\vec{n} + \left[v^2(\delta\phi'_P - \delta\phi'_N) + \frac{2GM}{r^2}(\delta\phi_P - \delta\phi_N)\right]\vec{n} \\ &\quad +2(\vec{v}\cdot\vec{n})(2\delta\phi'_N - \delta\phi'_P)\vec{v} + 2\frac{GM}{r}\delta\phi'_N\vec{n} \end{aligned}$$

où $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ et $\vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$ sont les vitesses et accélérations coordonnées de la masse test, $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{r}$ avec r la coordonnée radiale de la masse test et $\vec{a}_{pert}$ représente l'accélération perturbatrice additionelle correspondant à la théorie PEG.

Ensuite, il faut utiliser la méthode présentée à la section 4.2.1 pour trouver l'expression de l'avance du périhélie suivante pour la métrique (4.5) paramétrisée par l'expansion (4.9)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\left\langle\frac{d\omega}{dt}\right\rangle &= (2\delta\gamma - \delta\beta)\frac{m}{a(1-e^2)} - a\sqrt{1-e^2}(\chi_1 + a\chi_2) \quad (4.14)\\ &\quad -\frac{a^2}{m}\sqrt{1-e^2}(\alpha_1 + 3a\alpha_2) + \frac{a}{\lambda e^2}(1 - e^2 - \sqrt{1-e^2}). \end{aligned}$$

où $m = \frac{GM}{c^2}$.

Il est possible d'estimer un ordre de grandeur de contraintes sur les paramètres PEG en utilisant les contraintes d'avance des périhélies provenant des éphémérides planétaires. En particulier, la table 5 de Fienga et al. [2011] donne les contraintes des avances des périhélies obtenues par INPOP10a pour six planètes du Système Solaire. La table 4.1 reprend les contraintes des périhélies obtenues par INPOP10a : il s'agit de l'intervalle pour lequel les différences des résidus post-fit de INPOP ne varient pas plus que 5%. Dans ce même tableau, nous avons dérivé les contraintes sur les paramètres PEG obtenus à partir de la relation (4.14). Ainsi, les intervalles de confiance sur les paramètres PEG présentés à la table 4.1 sont les intervalles de confiance pour lesquelles les résidus post-fit de INPOP ne varient pas de plus de 5 %. Ces intervalles de confiance sont un apport original de ce travail. Il faut préciser que ces contraintes sont dérivées en supposant qu'un seul paramètre varie à la fois (pour chaque contrainte, on suppose que les autres

paramètres PEG sont nuls). D'autre part, ces contraintes ne sont pas équivalentes à un ajustement direct des paramètres dans les éphémérides. En effet, pour pouvoir estimer précisément les paramètres PEG, il faudrait ajouter l'accélération supplémentaire (4.13) dans les équations du mouvement des éphémérides et réaliser un fit global de tous les paramètres. La procédure utilisée par INPOP néglige certains effets des théories PEG sur la dynamique et de plus, les corrélations entre les paramètres peuvent détériorer légèrement la précision obtenue ici. Ceci explique le fait que l'estimation du β dans la table 4.1 est deux fois meilleure que celle réalisée par un fit global de β dans les éphémérides (cette contrainte est donnée par l'équation (1.10)). Ce tableau donne donc une idée de l'ordre de grandeur permis pour les paramètres PEG mais ne doit pas être interprété comme des contraintes strictes.

	$\langle d\omega/dt \rangle$ (mas/cy)	$\delta\gamma$ $[\times 10^{-4}]$	χ_1 $[\times 10^{-23} m^{-1}]$	χ_2 $[\times 10^{-34} m^{-2}]$
Mercury	0.4 ± 0.6	0.14 ± 0.21	-1.3 ± 2.0	-2.3 ± 3.4
Venus	0.2 ± 1.5	0.35 ± 2.6	-0.88 ± 6.6	-0.81 ± 6.1
Earth	-0.2 ± 0.9	-0.78 ± 3.5	1.0 ± 4.6	0.69 ± 3.1
Mars	-0.04 ± 0.15	-0.44 ± 1.7	0.26 ± 0.96	0.11 ± 0.42
Jupiter	-41 ± 42	-9864 ± 10105	482 ± 494	62 ± 63
Saturn	0.15 ± 0.65	164 ± 714	-2.4 ± 10.3	-0.17 ± 0.72
Combiné	-	0.14 ± 0.21	-0.024 ± 0.68	0.11 ± 0.42

	$\delta\beta$ $[\times 10^{-4}]$	α_1 $[\times 10^{-31} m^{-1}]$	α_2 $[\times 10^{-43} m^{-2}]$	λ^{-1} $[\times 10^{-23} m^{-1}]$
Mercury	-0.28 ± 0.42	-3.3 ± 5.0	-19 ± 29	-2.6 ± 3.9
Venus	-0.7 ± 5.2	-1.2 ± 9.0	-3.7 ± 27.7	-1.8 ± 13.2
Earth	1.6 ± 7.0	1.0 ± 4.6	2.3 ± 10.2	2.1 ± 9.3
Mars	0.89 ± 3.3	0.17 ± 0.62	0.24 ± 0.91	0.51 ± 1.91
Jupiter	19000 ± 20000	91 ± 94	39 ± 40	964 ± 988
Saturn	-330 ± 1430	-0.24 ± 1.1	-0.057 ± 0.25	-4.7 ± 20.6
Combiné	-0.28 ± 0.42	0.17 ± 0.62	-0.057 ± 0.25	-0.053 ± 1.4

TABLE 4.1 – Tableau reprenant les contraintes de INPOP10a sur les avances supplémentaires des périhélies [voir table 5 de Fienga et al., 2011]) et les intervalles de confiance que ces contraintes impliquent sur les paramètres PEG pour les différentes planètes. La dernière ligne correspond à l'intervalle commun autorisé par toutes les planètes. Toutes les valeurs des paramètres PEG dans ces intervalles ne modifient pas les résidus d'INPOP de plus de 5 %. Les valeurs dérivées dans ce tableau sont dérivées en supposant que seul un paramètre est non nul.

4.3.3 Simulations des observables radioscience de Cassini

Nous avons utilisé la métrique (4.5-4.9) pour déterminer les effets de PEG sur les signaux de Cassini. Différentes simulations furent effectuées avec différentes valeurs des paramètres PEG. Ensuite, nous avons ajusté les conditions initiales de la Terre, de Cassini et de la masse du Soleil (conformément à ce qui est établi à la section 3.5) pour dériver le signal incompressible produit par une théorie PEG. Par exemple, la figure 4.2 représente les différences de Range, de Doppler, d'ascension droite et de déclinaison entre une simulation effectuée dans une théorie avec

un paramètre Post-Newtonien $\delta\gamma = \gamma - 1 = 10^{-5}$ (Cassini n'était suivi que par radioscience lors de la phase simulée. Par conséquent seuls les signaux Range et Doppler sont relevants ici. Les signaux d'astrométrie sont représentés pour illustration). Les trois pics observables se produisent lors de conjonctions solaires. Les courbes rouges pointillées représentent les différences directes entre les signaux générés en théorie PPN avec le même signal produit en RG. Ces courbes dépendent donc des conditions initiales et par conséquent du jeu de coordonnées choisi. Ces courbes ne sont donc pas interprétables physiquement mais elles illustrent l'erreur commise si l'ajustement des conditions initiales n'est pas effectué. Par contre, les courbes vertes continues représentent les résidus obtenus après le fit des conditions initiales et la masse du Soleil. Ces signaux sont les signaux attendus si la théorie de la gravité est une théorie PPN (avec $\delta\gamma = 10^{-5}$) mais que l'analyse des données se fait en RG. Ces résidus sont indépendants du système de coordonnées utilisé et ils représentent la signature incompressible provoquée par la théorie alternative considérée (ici PPN avec $\delta\gamma = 10^{-5}$). Sur la figure 4.2, nous pouvons voir que le signal apparaissant dans les données radioscience lors des conjonctions n'est absolument pas absorbé par le fit des conditions initiales tandis que les modulations entre les conjonctions sont significativement absorbées et ne seront pas observables.

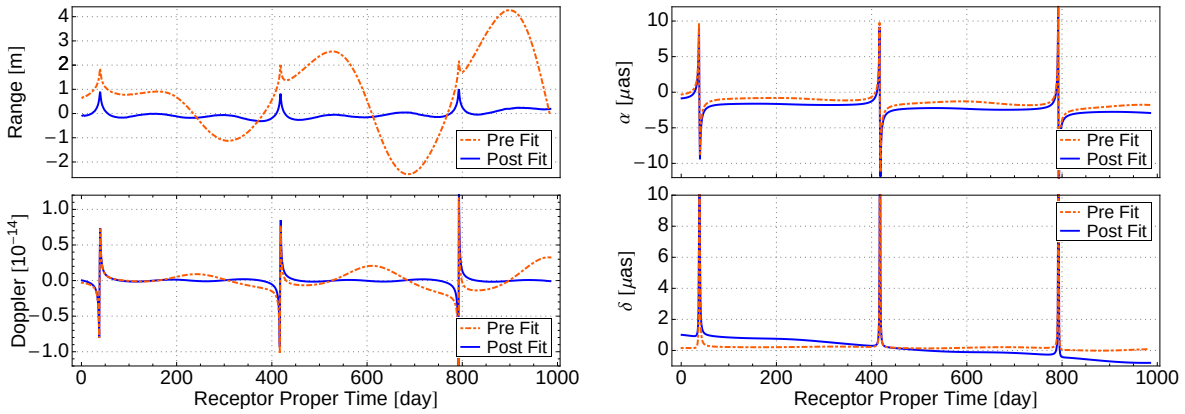

FIGURE 4.2 – Représentation du Range, Doppler, ascension de doite (α) et déclinaison (δ) dus à une théorie alternative de la gravitation paramétrisée par $\delta\gamma = \gamma - 1 = 5 \times 10^{-5}$. Les courbes rouges pointillées représentent les différences entre les simulations en théorie alternative et en RG (avec les mêmes conditions initiales) tandis que les courbes bleues continues représentent les résidus obtenus après une analyse standard en RG des données simulées en théorie alternative (c'est-à-dire après le fit des conditions initiales). Ce sont ces résidus (en bleu) qui représentent la signature incompressible provoquée par la théorie alternative.

Un autre exemple est représenté à la figure 4.3 où l'influence d'un terme linéaire dans la partie spatiale de la métrique est représenté (un terme paramétrisé par χ_1 dans l'expansion (4.9)). Dans ce cas, nous pouvons remarquer que l'ajustement des conditions initiales absorbe une grande partie du signal (environ un facteur 100).

La figure 4.4 représente les résidus obtenus pour chacun des paramètres PEG considérés (chaque courbe est obtenue en faisant varier un seul paramètre à la fois). Ces courbes sont les signatures incompressibles qui doivent être recherchées dans les résidus d'une analyse standard des données réelles. Ces templates nous donnent une idée de l'évolution temporelle de la signature mais également une idée sur son ordre de grandeur, ce qui nous permet de déduire les précisions

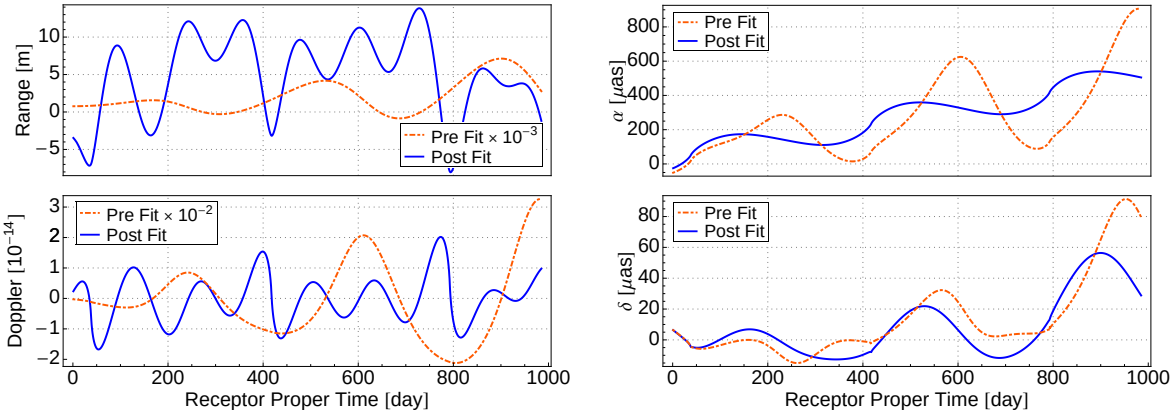

FIGURE 4.3 – Représentation du Range, Doppler, ascension de doite (α) et déclinaison (δ) dus à une théorie PEG paramétrisée par $\chi_1 = 10^{-21}\ m^{-1}$ dans l'expansion (4.9). Les courbes rouges pointillées représentent les différences entre les simulations en théorie alternative et en RG (avec les mêmes conditions initiales) tandis que les courbes bleues continues représentent les résidus obtenus après une analyse standard en RG des données simulées en théorie alternative (c'est-à-dire après le fit des conditions initiales). Les courbes rouges pointillées ont été mises à l'échelle comme indiqué dans la légende.

que nous pourrions obtenir lors de l'analyse complète des données réelles.

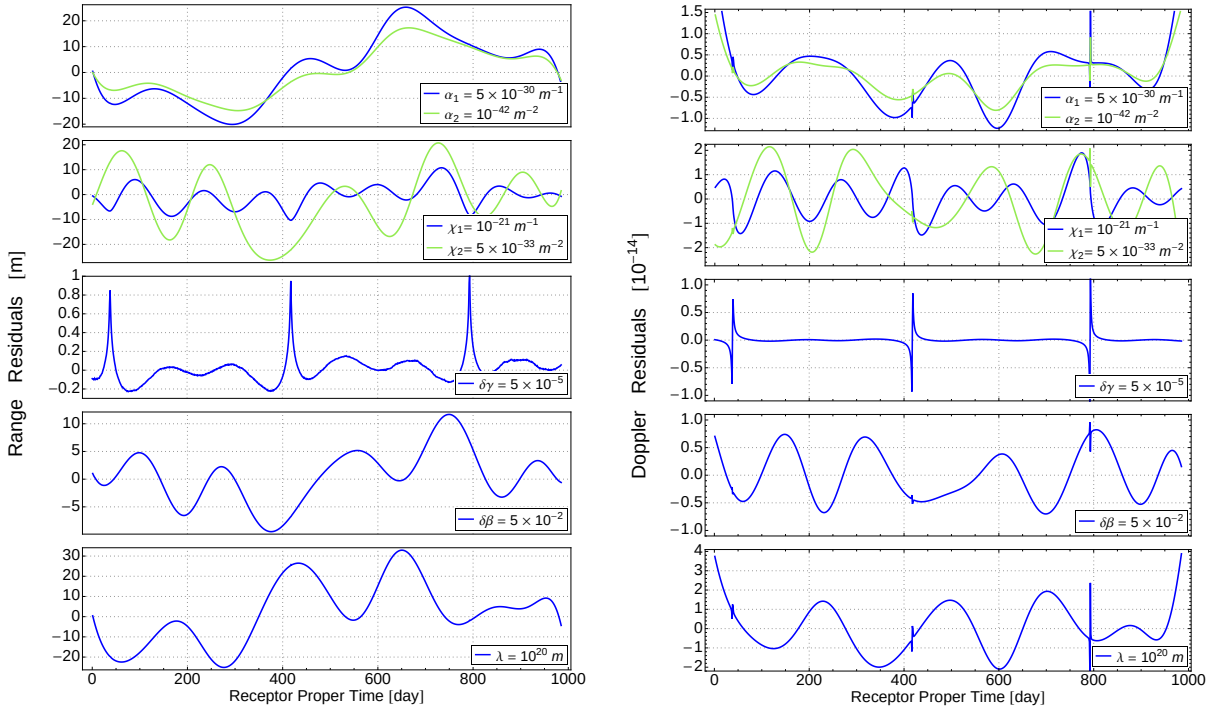

FIGURE 4.4 – Représentation des résidus (signatures incompressibles) Range (à gauche) et Doppler (à droite) obtenus dans le cadre de la mission Cassini en considérant une théorie alternative de la gravitation de type PEG avec un seul paramètre PEG non-nul. Ces courbes sont des templates de signaux qui doivent être cherchés dans les résidus d'une analyse standard en RG de données réelles.

Finalement, la figure 4.5 résume l'ensemble des simulations effectuées. Cette figure représente les différences maximales entre le Doppler généré en différentes théorie PEG et le Doppler généré en RG. Les théories PEG sont caractérisées par les 7 paramètres qui entrent dans l'expansion (4.9) : α_1, α_2, λ, χ_1, χ_2, $\delta\gamma$ et $\delta\beta$. Les lignes bleues pointillées représentent les différences maximales entre des simulations en théorie PEG et des simulations en RG avec les mêmes conditions initiales. Les courbes vertes continues représentent les résidus Doppler maximaux obtenus après analyse en RG des observables simulées en théorie PEG (c'est-à-dire après le fit des conditions initiales). Plus précisément, les lignes vertes continues représentent les maxima des signaux Doppler attendus dans les résidus de l'analyse des données de Cassini si la nature de la gravitation est bien décrite par une théorie PEG. La comparaison de l'ordre de grandeur des signaux Doppler par rapport à la précision de Cassini nous donne alors l'incertitude qui pourrait être atteinte sur les estimations des paramètres lors d'une analyse des données réelles. Ici, nous avons considéré que la précision de Cassini est constante et est de 10^{-14} en Doppler [Bertotti et al., 2003; Armstrong et al., 2003]. Une analyse plus fine pourrait être effectuée en comparant la densité spectrale de puissance du signal cherché par rapport à la densité spectrale de puissance du bruit de Cassini. Les incertitudes atteignables sur les paramètres PEG avec une analyse des données relatives à l'arc de Cassini considéré se trouvent dans la table 4.2. De plus, ces incertitudes peuvent également être interprétées comme un ordre de grandeur sur les contraintes des paramètres PEG. En effet, si un de ces paramètres était plus grand que les valeurs indiquées dans la table 4.2, un signal anormal plus grand que 10^{-14} aurait été détecté dans les résidus de Cassini. Remarquons par ailleurs que la contrainte ainsi obtenue sur le paramètre PPN γ est du même ordre de grandeur que la contrainte obtenue par Bertotti et al. [2003] dans une analyse des vraies données lors de la conjonction de juin 2002 ($\gamma - 1 = (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$). Par contre, il s'avère que la contrainte obtenue sur le paramètre Post-Newtonien β est nettement inférieure aux contraintes actuelles (de l'ordre de 10^{-4} [Will, 2006]). Ceci n'est pas surprenant car Cassini se trouve loin du Soleil alors que β agit principalement sur les orbites proches du Soleil (et peu sur la propagation de la lumière). Les autres valeurs de la table 4.2 sont originales (et ont fait l'objet d'une publication [Hees et al., 2012b]) et sont à comparer avec les valeurs que nous avons dérivées à partir de la précession des périhélies à la section 4.3.2. La comparaison des ordres de grandeur du tableau 4.2 avec le tableau 4.1 indique que les éphémérides planétaires sont plus performantes que l'analyse des données radioscience de l'arc de Cassini considéré pour tous les paramètres qui entrent dans le secteur ϕ_N de la métrique (4.5-4.9), c'est-à-dire pour les paramètres α_1, α_2, λ et $\delta\beta$. Par contre, l'analyse de données de radioscience est sensiblement plus performante que les analyses des périhélies pour les paramètres qui entrent dans le potentiel ϕ_P de la métrique (4.5-4.9), c'est-à-dire pour les paramètres χ_1, χ_2 et $\delta\gamma$.

	smaller than
α_1	$1.9\ 10^{-30}\ m^{-1} = 5.9 \times 10^{-11}\ kpc^{-1}$
α_2	$6.2\ 10^{-43}\ m^{-2} = 5.9 \times 10^{-4}\ \ kpc^{-2}$
λ^{-1}	$2.6\ 10^{-21}\ m^{-1} = 0.08\ kpc^{-1}$
$\delta\beta$	2.9×10^{-2}
χ_1	$5.3\ 10^{-22}\ m^{-1} = 0.02\ kpc^{-1}$
χ_2	$1.9\ 10^{-33}\ m^{-2} = 1.8 \times 10^{6}\ kpc^{-2}$
$\delta\gamma$	3.7×10^{-5}

TABLE 4.2 – Estimation de l'incertitude atteignable par une analyse des données Cassini sur les 7 paramètres PEG considérés dans l'expansion de la métrique (4.9). Ces valeurs sont obtenues en comparant la valeur maximale du résidu Doppler généré par la théorie alternative avec la précision de Cassini (voir à la figure 4.5). Pour estimer ces valeurs, un seul paramètre est varié à la fois.

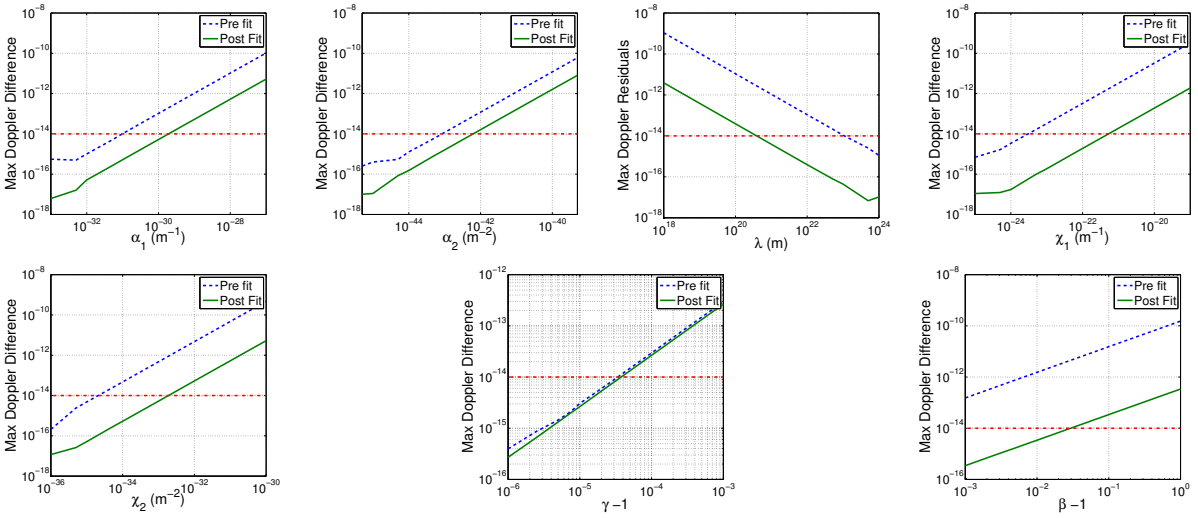

FIGURE 4.5 – Représentation du signal Doppler maximal dû à une théorie PEG (paramétrisée par les 7 paramètres qui entrent dans l'expansion de la métrique (4.9)) pour la mission Cassini entre Jupiter et Saturne. Les courbes bleues discontinues représentent la différence maximale entre le Doppler simulé en PEG et le Doppler simulé en RG avec les mêmes conditions initiales. Les courbes vertes continues représentent les résidus maximaux obtenus après une analyse standard en RG des données simulées en théorie PEG (c'est-à-dire après le fit des conditions initiales) qui sont donc les maxima des signatures incompressibles. Les courbes discontinues rouges représentent la précision de Cassini. Chaque sous-figure représente l'évolution du Doppler maximal en fonction d'un paramètre PEG (les autres paramètres étant nuls).

4.3.4 Simulations d'observables VLBI du système de Saturne

Pour étudier l'effet de PEG sur des mesures VLBI dans le système de Saturne, nous avons considéré un jeu de paramètres PEG dont l'ordre de grandeur correspond avec les valeurs obtenues par l'analyse Doppler de Cassini dans sa phase de croisière (voir la table 4.2). La figure 4.6 représente les résidus des ascensions droites et des déclinaisons obtenus si la théorie de la gravitation est une théorie PEG mais si l'analyse est réalisée en RG. Les signaux correspondent aux signatures incompressibles engendrées par la théorie PEG sur des observables de type VLBI. Tout

d'abord, nous pouvons remarquer que les signaux relatifs à α_1, α_2 et λ de même que ceux relatifs à χ_1 et χ_2 sont dégénérés. Ensuite, les seuls paramètres qui peuvent produire des déviations observables par des mesures VLBI dans le système de Saturne sont χ_1 et χ_2.

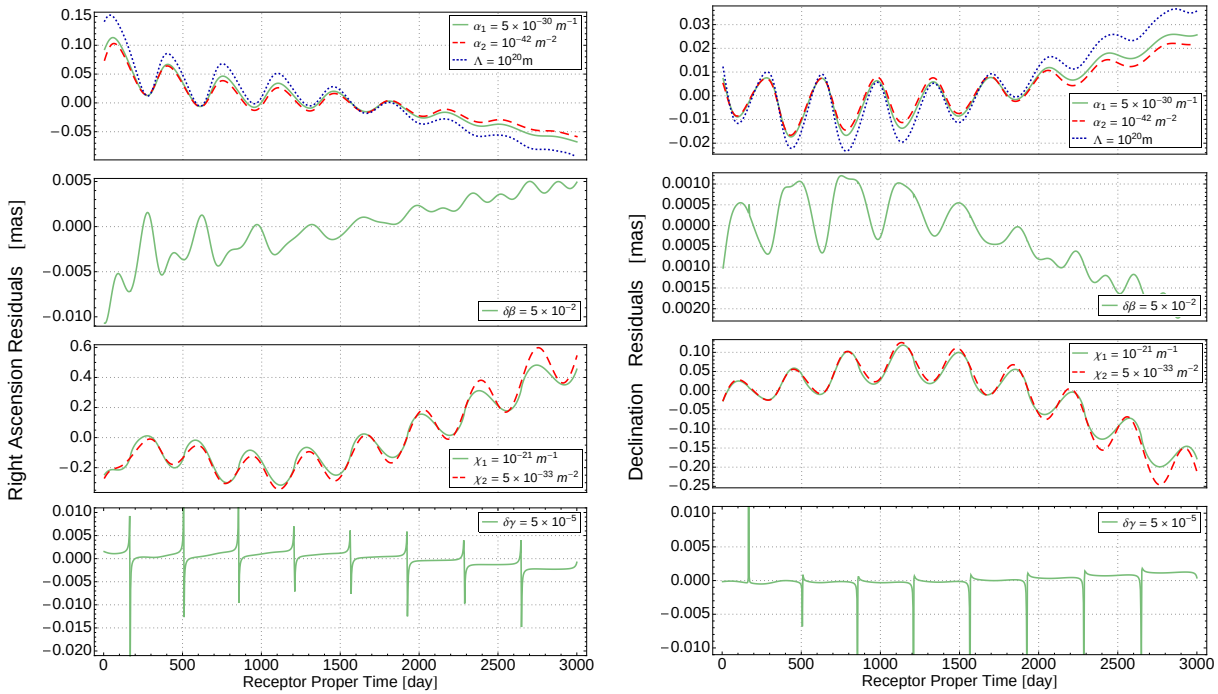

FIGURE 4.6 – Représentation des résidus en ascension droite (à gauche) et en déclinaison (à droite) obtenus dans le cadre d'une observation VLBI entre le système de Saturne et la Terre en considérant une théorie alternative de la gravitation de type PEG avec un seul paramètre non-nul. La métrique considérée est donnée par les équations (4.4-4.9). Ces courbes sont des templates de signaux qui doivent être cherchés dans les résidus d'une analyse standard en RG de données réelles.

Finalement, nous profitons de ces simulations pour répondre à une question concernant les hypothèses implicitement faites pour dériver les contraintes provenant de la précession des périhélies que nous avons calculées ci-dessus. Les contraintes sont obtenues à partir des éphémérides INPOP dans lesquelles les précessions supplémentaires des périhélies sont ajoutées uniquement sur l'orbite des planètes. Ceci veut dire que nulle part (jusqu'à présent) on ne tient compte d'une éventuelle modification de la gravité dans la propagation de la lumière. Par conséquent, les contraintes que nous avons dérivées à la section 4.3.2 ne peuvent être considérées que dans la limite où les modifications de la gravité sur la propagation de la lumière sont négligeables. Nous allons donc analyser l'influence de la propagation de la lumière sur les résidus PEG obtenus. Pour ce faire, la procédure consiste à simuler des résidus en tenant compte des modifications de la gravité dans la dynamique orbitale et dans la propagation de la lumière. Ensuite, nous avons dérivé les mêmes résidus en ne tenant compte de la modification de la gravité que dans la partie orbitale (tout comme dans les éphémérides). Finalement, la figure 4.7 représente la différence entre ces deux résidus. Cette figure nous donne donc une idée de la signature qui est provoquée par la modification de la propagation de la lumière due à une théorie alternative de la gravitation. Nous remarquons que les paramètres liés au potentiel ϕ_N de l'expansion (4.9) (c'est-à-dire α_i, λ

et $\delta\beta$) ont une influence négligeable sur la propagation de la lumière tandis que les paramètres liés à ϕ_P ont une influence qui est non-négligeable. Ceci veut dire que les contraintes obtenues en considérant les précessions des périhélies à la table 4.1 sont relevantes pour α_i, λ et $\delta\beta$ mais pas pour χ_i et $\delta\gamma$ car la modification de la gravitation dans la propagation de la lumière n'est pas prise en compte.

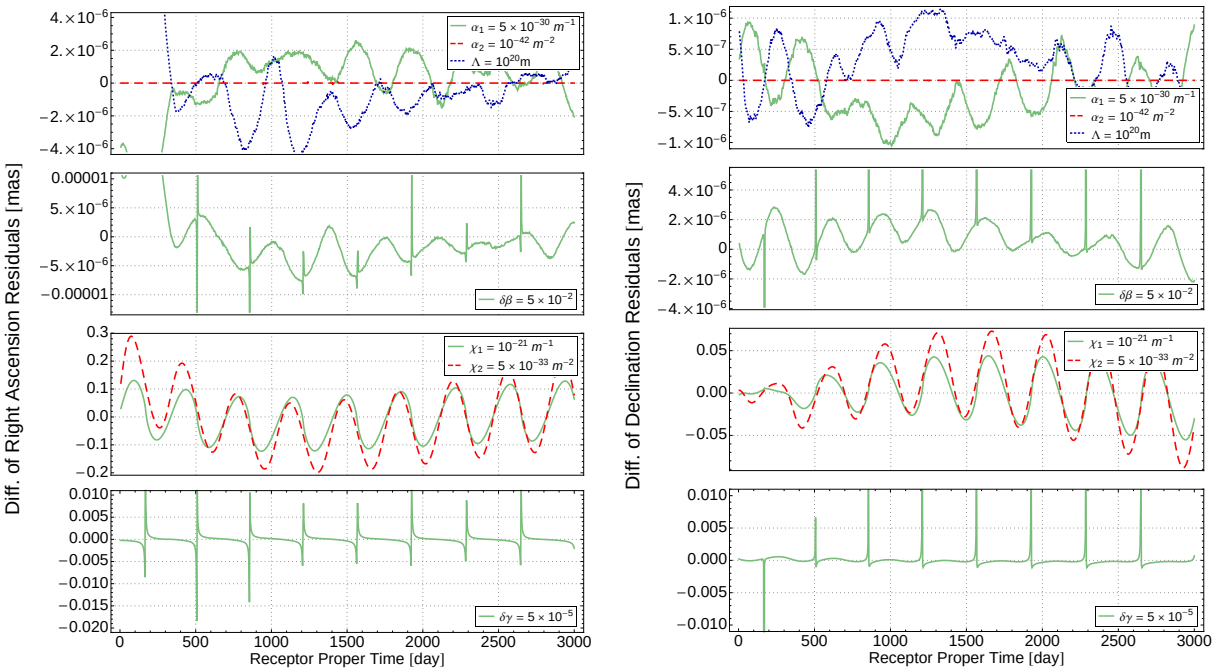

FIGURE 4.7 – Représentation de la différence des résidus en ascension droite (à gauche) et en déclinaison (à droite) obtenus avec et sans modification de la gravitation sur la propagation de la lumière. Cette différence de résidus est obtenue dans le cadre d'une observation VLBI entre le système de Saturne et la Terre en considérant une théorie alternative de la gravitation de type PEG avec un seul paramètre non-nul. La métrique considérée est donnée par les équations (4.4-4.9). Les valeurs des paramètres PEG considérés sont du même ordre de grandeur que les valeurs considérées pour l'analyse des données radioscience de Cassini dans la phase de croisière.

4.4 Effet de champ Externe apparaissant dans les théories MOND

4.4.1 Présentation théorique

La seconde théorie considérée dans ce travail est reliée à la phénoménologie MOND (*Modified Newtonian Dynamics*). La phénoménologie MOND a été introduite par Milgrom [1983a,b,c] pour expliquer la courbe de rotation des galaxies spirales sans introduire de matière noire. Une première idée de MOND est de dire que la loi de Newton telle que nous la connaissons ($\vec{F} = m\vec{a}$) n'est valide que pour des situations où l'accélération est grande et qu'elle est modifiée dans le régime des faibles accélérations sous la forme de $\vec{F} = m\mu_M\left(\frac{|a|}{a_0}\right)\vec{a}$. Cette modification de l'inertie n'est pas sans poser de sérieux problèmes [Felten, 1984].

De façon alternative, la théorie MOND peu s'exprimer comme une modification de la gravité. Dans le régime non-relativiste, elle peut se formuler sous la forme d'une modification de l'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel [Bekenstein et Milgrom, 1984]

$$\nabla \cdot \left[\mu_M \left(\frac{g}{a_0} \right) \nabla U \right] = -4\pi G\rho \tag{4.15}$$

où ρ est la densité de matière, U est le champ gravitationnel, $\vec{g} = \vec{\nabla} U$ est l'accélération gravitationnelle (et $g = \|\vec{g}\|$ sa norme) et a_0 est une constante additionnelle appelée accélération MOND qui vaudrait $a_0 \approx 1.2 \times 10^{-10} m/s^2$. Le régime classique correspond au cas où $g >> a_0$ pour lequel on souhaite retrouver l'équation de Poisson traditionnelle, c'est-à-dire que $\mu_M \approx 1$. Le régime en champs faibles doit tendre vers $\mu_M(y) \approx y$ pour pouvoir expliquer la courbe de rotation des galaxies. La fonction $\mu_M(y)$ est donc la fonction d'interpolation de MOND qui doit avoir pour limite $\mu_M(y) \to y$ quand $y << 1$ et $\mu_M(y) \to 1$ quand $y >> 1$.

Telle que présentée ci-dessus, MOND est une phénoménologie construite pour rendre compte de certaines observations. Des extensions relativistes (beaucoup plus satisfaisantes d'un point de vue théorique) furent développés par la suite [voir par exemple Bekenstein, 2004; Sanders, 2005; Bruneton et Esposito-Farèse, 2007; Zlosnik et al., 2007; Skordis et Zlosnik, 2012; Famaey et McGaugh, 2012]. Ces extensions sont des théories bien définies dont les équations de champs se dérivent à partir d'une action. Parmi les extensions relativistes, citons la théorie Tenseur-Vecteur-Scalaire (TeVeS) développée par Bekenstein [2004] dont l'action est donnée par la somme des quatre actions suivantes

$$S_g = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g^*} R^*, \tag{4.16a}$$

$$S_A = -\frac{1}{4\kappa} \int d^4x \sqrt{-g^*} \left[K F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - 2\lambda (A_\alpha A^\alpha + 1) \right], \tag{4.16b}$$

$$S_\phi = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g^*} \left[\mu (g_*^{\alpha\beta} - A^\alpha A^\beta) \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi + V(\mu) \right], \tag{4.16c}$$

$$S_{\text{mat}} = \int d^4x \sqrt{-g} L(g_{\alpha\beta}, \Psi_m), \tag{4.16d}$$

où $g^*_{\alpha\beta}$ est la métrique Einstein frame (qui apparait dans les équations dynamiques), $F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha$ est le tenseur de Faraday lié au champ vectoriel A_μ, K est une constante de couplage, λ un multiplicateur de Lagrange, μ est un champ scalaire non-dynamique et $V(\mu)$ est une fonction semi-arbitraire. Les champs de matières Ψ_m sont couplés universellement à la métrique $g_{\alpha\beta}$ qui est définie à partir de la métrique dynamique $g^*_{\alpha\beta}$ par la relation

$$g_{\alpha\beta} = e^{-2\phi} g^*_{\alpha\beta} - 2\sinh(2\phi) A_\alpha A_\beta. \tag{4.17}$$

Il est possible de montrer que la limite non-relativiste de cette théorie Bekenstein [2004]; Skordis [2008] peut s'écrire sous la forme d'une métrique du type

$$ds^2 = -(1 + 2U)c^2 dt^2 + (1 - 2U) d\vec{x}^2 \tag{4.18}$$

où U est solution de l'équation de Poisson modifiée (4.15) avec la fonction μ_M qui dépend de μ, de K et de $V(\mu)$. La théorie de Bekenstein est donc un exemple de théorie relativiste au sens strict du terme qui permet de reproduire la phénoménologie de MOND.

Une autre classe de théorie relativiste permet de reproduire la phénoménologie MOND. Il s'agit des *théories d'Einstein-Ether généralisées (GEA)* [voir par exemple Zlosnik et al., 2006, 2007] qui sont des théories tenseur-vecteur de la gravitation dont l'action s'écrit sous la forme

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{2\kappa} + \mathcal{L}(g^{\mu\nu}, A^\mu)\right] + S_{\rm mat}[g_{\mu\nu}, \Psi_m]. \tag{4.19}$$

avec λ un multiplicateur de Lagrange, M une constante de couplage et

$$\mathcal{L}(g^{\mu\nu}, A^\mu) = M^2\mathcal{F}(\mathcal{K}) + \lambda(A_\alpha A^\alpha + 1) \tag{4.20}$$

avec

$$\mathcal{K} = M^{-2}\left(c_1 g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + c_2\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta + c_3\delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha - c_4 A^\mu A^\nu g_{\alpha\beta}\right)\nabla_\mu A^\alpha \nabla_\nu A^\beta \tag{4.21}$$

où les c_i sont des constantes sans dimension. Il est possible de montrer qu'un choix judicieux de la fonction $\mathcal{F}$ et des coefficients c_i peut conduire à retrouver la phénoménologie MOND caractérisée par la métrique (4.18) où le potentiel U est solution de l'équation de Poisson modifiée (4.15) dont la fonction d'interpolation μ_M dépend des coefficients c_i et M et de la fonction $\mathcal{F}$. La phénoménologie considérée ici peut donc être dérivée de théories relativistes bien définies.

Finalement, précisons que MOND fut récemment réinterprété comme une modification de la matière plutôt que comme une modification des lois de la gravitation. En effet, Blanchet [2007]; Blanchet et Le Tiec [2008a, 2009] ont montré que la loi MOND peut être obtenue en considérant que la matière peut être polarisée gravitationnellement. La modification de l'équation de Poisson (4.15) résulte alors de la polarisation de la matière. Le modèle de polarisation dipolaire de la matière est un modèle relativiste cohérent qui reproduit la phénoménologie MOND et qui est également en accord avec certaines observations cosmologiques [Blanchet et Le Tiec, 2008a,b].

Dans le Système Solaire, nous nous trouvons dans la situation où $g >> a_0$ (sauf aux points selles [Bekenstein et Magueijo, 2006]) et l'effet de MOND devrait être négligeable. Cependant, Milgrom [2009] et plus récemment Blanchet et Novak [2011a] ont montré qu'un effet de MOND était présent dans le Système Solaire même si la fonction d'interpolation est proche de 1 (c'est-à-dire en champs forts où on s'attend à retrouver la dynamique Newtonienne). Cet effet est lié à l'accélération galactique du Système Solaire et est appelé l'effet du champ externe (*External Field Effect (EFE)*). Cet effet provient du fait que l'équation de MOND (4.15) est non-linéaire e sorte que la dynamique du Système Solaire dépend du champ externe (en plus de la force de marée produite si le champs externe est non-constant). Cet effet n'est pas présent dans la théorie Newtonienne (qui est linéaire). Le fait que le champ externe influence la dynamique interne du système signifie une violation du principe d'équivalence fort [Blanchet et Novak, 2011a].

Milgrom [2009] et Blanchet et Novak [2011a] ont montré que l'effet principal (dans le Système Solaire) lié au EFE consiste en une correction quadrupolaire du potentiel gravitationnel qui s'écrit alors

$$\phi_N = -\frac{GM}{c^2 r} - \frac{Q_2}{2c^2}x^i x^j\left(e_i e_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right). \tag{4.22}$$

Le vecteur $\vec{e}$ est un vecteur unitaire qui pointe vers le centre de la galaxie et Q_2 est un paramètre qui dépend de l'accélération galactique, de la valeur de l'accélération MOND a_0 et de la fonction d'interpolation MOND $\mu(x)$. Ce paramètre a été calculé numériquement par Blanchet et Novak

[2011a] pour différentes fonctions d'interpolation MOND. Les différentes fonctions d'interpolation considérées produisent des valeurs du quadrupôle qui se trouvent dans l'intervalle

$$2.0 \times 10^{-27} s^{-2} \leq Q_2 \leq 4.1 \times 10^{-26} s^{-2}. \tag{4.23}$$

En résumé, un effet du champ externe apparaît dans les théories MOND. Cet effet modifie le potentiel gravitationnel et par conséquent la métrique de l'espace-temps qui devient

$$g_{00} = -1 + 2\frac{GM}{c^2 r} - 2\left(\frac{GM}{c^2 r}\right)^2 + \frac{Q_2}{c^2} x^k x^l \left(e_k e_l - \frac{1}{3}\delta_{kl}\right) \tag{4.24a}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij}\left[1 + 2\frac{GM}{c^2 r} + \frac{Q_2}{c^2} x^k x^l \left(e_k e_l - \frac{1}{3}\delta_{kl}\right)\right] \tag{4.24b}$$

où Q_2 dépend de la fonction d'interpolation MOND et peut prendre des valeurs dans l'intervalle (4.23) (du moins pour les fonctions d'interpolation considérée par Blanchet et Novak [2011a]).

4.4.2 Précession du périhélie

La précession du périhélie liée au quadrupôle a été calculé par Milgrom [2009]; Blanchet et Novak [2011a,b] en utilisant une approche perturbative similaire à celle utilisée dans la Section 4.3.2. Le résultat trouvé est

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = \frac{Q_2 \sqrt{1-e^2}}{4n} \left(1 + 5\cos(2\tilde{\omega})\right) \tag{4.25}$$

où $\tilde{\omega}$ est l'angle azimuthal entre la direction du périhélie de la planète et celui du centre galactique. Dans Blanchet et Novak [2011b], les différentes prédictions de Q_2 provenant de différentes fonctions d'interpolations MOND sont utilisées pour dériver les précessions des périhélies qui sont comparées aux contraintes provenant des éphémérides planétaires. Il s'avère que les éphémérides contraignent fortement MOND (la plupart des modèles doivent être rejetés). En particulier le modèle correspondant à une théorie Tenseur-Vecteur-Scalaire (TeVeS) est rejeté. Concrètement, les contraintes les plus fortes proviennent de Saturne (ce qui est logique vu que le terme quadripolaire grandit avec la distance par rapport au Soleil). En utilisant les contraintes INPOP10a [Fienga et al., 2011] sur la précession de Saturne (rappelée dans le tableau 4.1), on trouve la contrainte suivante sur Q_2

$$-3.54 \times 10^{-27} s^{-2} \leq Q_2 \leq 5.66 \times 10^{-27} s^{-2}. \tag{4.26}$$

Cependant, comme souligné par Blanchet et Novak [2011b] et comme nous l'avons mentionné dans le cadre des théories PEG à la section 4.3.2, il faut prendre les contraintes provenant des éphémérides avec prudence. En effet, dans les éphémérides INPOP, les excès de précession des périhélies sont ajoutés à la main pour voir comment se comporte les résidus post-fit par rapport à des précessions supplémentaires. Cependant, pour tester correctement une dynamique MOND, il faudrait travailler dans le formalisme de MOND directement dans les éphémérides (par exemple en modifiant les équations du mouvement en conséquence). Cela ferait apparaître également d'autres effets comme la précession des noeuds, une variation de l'inclinaison et de l'excentricité (prédit dans Blanchet et Novak [2011a]) qui peuvent changer quantitativement les contraintes.

4.4.3 Simulations des observables radioscience de Cassini

Pour analyser l'influence du EFE, nous avons utilisé la métrique (4.5) avec la modification du potentiel Newtonien donnée par (4.22). La figure 4.8 représente la différence dans les signaux radioscience entre une simulation qui inclut l'effet de champ externe de MOND (avec la valeur maximale du quadrupôle permise par (4.23) $Q_2 = 4.1 \times 10^{-26} s^{-2}$) et une simulation en RG. Sur cette figure nous pouvons remarquer que le fit des conditions initiales absorbe une grande partie de l'effet produit par l'EFE. Il en résulte que les résidus Doppler sont un ordre de grandeur plus petits que la précision de Cassini. L'EFE de MOND produit un effet trop petit pour être détecté dans les observations radioscience de Cassini. Cette mission n'est donc pas adaptée à la détection de l'EFE. Les contraintes provenant des précessions des périhélies (4.26) sont nettement plus performantes [Blanchet et Novak, 2011b].

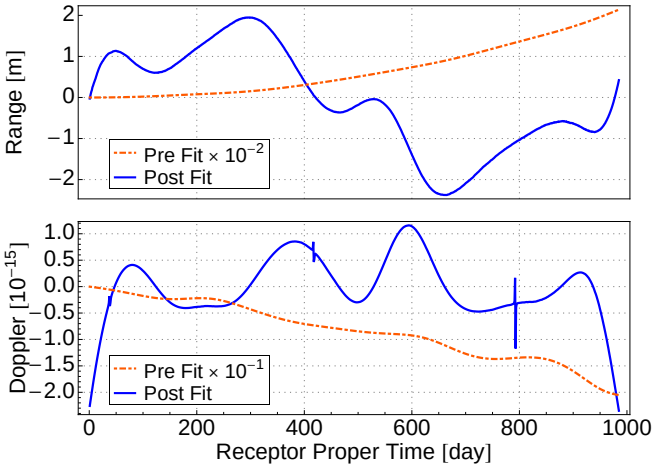

FIGURE 4.8 – Représentation du Range et du Doppler dus à l'effet de champ externe de MOND avec un paramètre $Q_2 = 4.1 \times 10^{-26} s^{-2}$. Les courbes rouges pointillées représentent les différences entre les simulations en théorie alternative et en RG (avec les mêmes conditions initiales) tandis que les courbes bleues continues représentent les signatures incompressibles produites par l'EFE, c'est-à-dire les résidus obtenus après une analyse standard en RG des données simulées en théorie alternative (c'est-à-dire après le fit des conditions initiales).

4.4.4 Simulations d'observables VLBI du système de Saturne

La figure 4.9 représente l'effet de champ externe lié à MOND sur les résidus d'observations VLBI du système de Saturne à partir de la Terre. Ces résidus sont trop petits que pour être détectés et donc ici encore, l'effet est trop petit pour être observable. D'autre part, une estimation de l'importance de la théorie alternative sur la propagation de la lumière peut être effectuée de la même façon que pour la théorie PEG (cfr la figure 4.7). Le résultat est que l'effet de MOND sur la lumière est complètement négligeable. Par conséquent, les contraintes obtenues en considérant les précessions des périhélies sont significatives et sont de loin les plus fortes.

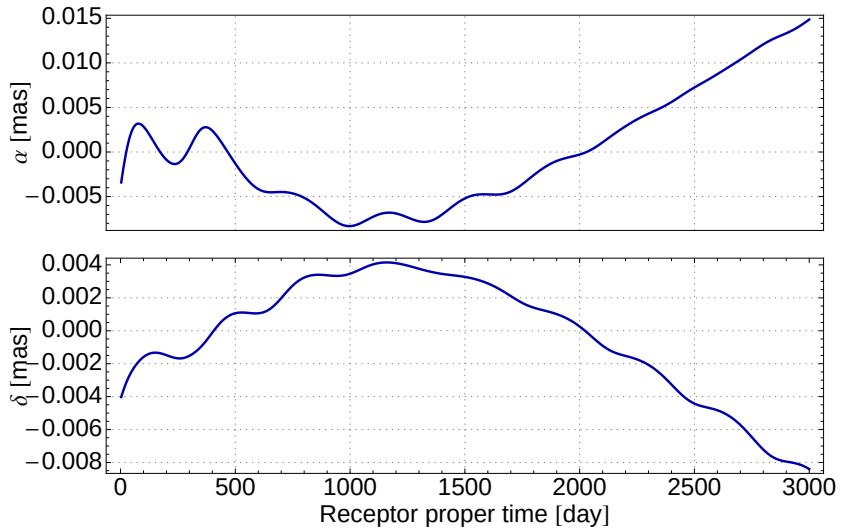

FIGURE 4.9 – Représentation des résidus en ascension droite et en déclinaison obtenus dans le cadre d'une observation VLBI entre le système de Saturne et la Terre en considérant l'effet de champ externe de MOND. La métrique considérée est donnée par les équations (4.22) avec $Q_2 = 4.1 \times 10^{-26}\mathrm{s}^{-2}$. Ces courbes sont des templates de signaux qui doivent être cherchés dans les résidus d'une analyse standard en RG de données réelles.

4.5 Extension du Modèle Standard (SME)

4.5.1 Présentation théorique

Dans ce travail, nous avons également considéré une théorie qui considère des possibles violations de l'invariance de Lorentz. Cette théorie effective est connue sous le nom d'extension du Modèle standard (*Standard Model Extension (SME)*). Cette approche est motivée par le fait que des violations de l'invariance de Lorentz apparaissent dans des modèles de gravité quantique (théories des cordes, des branes, des multivers, loop quantum gravity, ...) ou dans des modèles de théories des champs non-commutatifs [ces exemples proviennent de Mattingly, 2005]. La théorie SME est donc une théorie des champs effective qui permet de prendre en compte une brisure de l'invariance de Lorentz qui proviendrait de théories plus fondamentales.

Dans la théorie SME, l'invariance sous difféomorphismes est conservée et les actions à partir desquelles découlent les lois de la physique sont donc des scalaires. Les scalaires sont invariants sous transformations de coordonnées et donc sous des transformations de Lorentz dites passives (qui sont des transformations dans lesquelles tous les champs sont transformés). L'invariance de Lorentz considérée dans SME n'est pas liée à l'invariance sous difféomorphismes et donc à l'invariance sous transformations de Lorentz passives. L'idée derrière l'invariance de Lorentz est de dire que la physique ne dépend pas du lieu (ou de la vitesse) à laquelle une expérience est menée. En terme de théorie des champs, elle s'exprime donc en terme d'une invariance sous transformations de Lorentz actives (dans lesquelles seuls les champs dynamiques sont transformés) [Kostelecky, 2001].

La seule façon de briser l'invariance de Lorentz est d'introduire de nouveaux tenseurs dans

l'action du modèle standard et de la RG [Mattingly, 2005]. Par conséquent, le lagrangien SME contient le lagrangien du modèle standard, le lagrangien de la RG et de nouveaux termes qui font apparaître de nouveaux tenseurs qui brisent l'invariance de Lorentz tout en conservant l'invariance sous difféomorphismes. La théorie SME considère toutes les violations possibles de l'invariance de Lorentz dans tous les secteurs de la physique (et pas seulement dans le secteur gravitationnel). Cette extension du modèle standard comporte donc un nombre très élevé de paramètres qui décrivent des brisures de l'invariance de Lorentz. Historiquement, SME fut développé comme extension du modèle standard (sans la gravitation) et un grand nombre de paramètres furent introduits pour tenir compte d'une possible violation de l'invariance de Lorentz dans les théories électro-faible et forte [voir par exemple Colladay et Kostelecký, 1997, 1998; Bluhm, 2005]. Plus récemment, ce formalisme fut étendu de façon systématique au secteur gravitationnel [Kostelecký, 2004]. En particulier, il a été montré qu'une violation explicite de l'invariance de Lorentz est impossible (dans le cadre de la géométrie des espaces-temps de Riemann-Cartan) et qu'il faut donc considérer une brisure spontanée de l'invariance de Lorentz dans laquelle les tenseurs additionnels doivent être considérés comme des champs dynamiques. Si on se contente de la limite Riemanienne de SME, il est possible de montrer que l'action de la partie gravitationnelle peut s'écrire sous la forme (avec $\kappa = 8\pi G/c^4$)

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}\left[R - 2\Lambda - uR + s^{\mu\nu}R^T_{\mu\nu} + t^{\kappa\lambda\mu\nu}W_{\kappa\lambda\mu\nu}\right] + S_{\rm mat} \tag{4.27}$$

où on reconnait l'action d'Einstein-Hilbert comme cas limite où les nouveaux tenseurs u, $s^{\mu\nu}$ et $t^{\kappa\lambda\mu\nu}$ s'annulent ($R^T_{\mu\nu}$ étant le tenseur de Ricci sans trace et $W_{\kappa\lambda\mu\nu}$ le tenseur de Weyl). Etant donné que ces nouveaux tenseurs sont des champs dynamiques, il doit y avoir des termes supplémentaires dans l'action liés à ces tenseurs (ces termes cinétiques et de self-interactions ne sont pas explicitement écrits ci-dessus). Bailey et Kostelecký [2006] ont dérivé les équations de champs à partir de cette action et ont montré que sous quelques hypothèses, il est possible de les résoudre sans connaître explicitement l'expression de l'action pour les nouveaux champs. L'idée est de décomposer les nouveaux champs en une partie constante et une partie qui fluctue : $s^{\mu\nu} = \bar{s}^{\mu\nu} + \tilde{s}^{\mu\nu}$ où $\bar{s}^{\mu\nu}$ est la valeur attendue dans le vide (Vacuum Expectation Value - VEV) et $\tilde{s}^{\mu\nu}$ correspond à des fluctuations. Ensuite, sous quelques hypothèses (essentiellement que le couplage entre les nouveaux champs et la matière est négligeable et que nous pouvons travailler au premier ordre en $\bar{s}^{\mu\nu}$), il est possible de faire disparaitre les fluctuations des champs et de résoudre les équations de champs dans la limite Post-Newtonienne dans le cas d'un système de N masses. La métrique correspondante qui tient donc compte de la violation de l'invariance de Lorentz dans le secteur gravitationnel pur est donnée par Bailey et Kostelecký [2006]; Bailey [2009].

Si en plus, on tient compte d'une éventuelle violation de l'invariance de Lorentz dans le couplage entre la gravité et la matière [Kostelecký et Tasson, 2011], il est possible d'écrire la métrique post-Newtonienne d'un corps sphérique sous la forme [Tso et Bailey, 2011]

$$g_{00} = -1 + \left[2 + 3\bar{s}_{00} + 2c_{00} + 4\frac{\alpha}{M}(a_{\rm eff})_0\right]U + \bar{s}_{jk}U^{jk} - 2U^2, \tag{4.28a}$$

$$g_{0j} = \left[\bar{s}_{0j} + \frac{\alpha}{M}(a_{\rm eff})_j\right]U + \left[\bar{s}_{0k} + \frac{\alpha}{M}(a_{\rm eff})_k\right]U^{jk}, \tag{4.28b}$$

$$g_{jk} = \delta_{jk} + \left[2 - \bar{s}_{00} + 2c_{00} - 2\frac{\alpha}{M}(a_{\rm eff})_0\right]\delta^{jk}U \tag{4.28c}$$
$$+\bar{s}_{lm}U^{lm}\delta_{jk} - \bar{s}_{jl}U^{kl} - \bar{s}_{kl}U^{lj} + \left[2\bar{s}_{00} + 2\frac{\alpha}{M}(a_{\rm eff})_0\right]U^{jk}$$

avec $U = \frac{GM}{c^2 r}$ et $U^{jk} = \frac{GMr^j r^k}{r^3}$. Dans cette métrique les coefficients $\bar{s}_{\mu\nu}$ sont liés à une brisure de l'invariance de Lorentz dans le secteur gravitationnel tandis que les coefficients $(a_{\text{eff}})_\mu$ et c_{00} proviennent d'une brisure de l'invariance dans le secteur matière (ces coefficients dépendent de la structure du corps source).

4.5.2 Précession du périhélie

Les possibilités de détection expérimentale d'une brisure de l'invariance de Lorentz dans le secteur gravitationnel sont étudiées en détails dans Bailey et Kostelecký [2006]. Parmi les possibilités de tests, citons entre autre le Lunar Laser Ranging, les gravimètres, les balances à torsion, les tests avec des gyroscopes en orbite, les pulsars binaires, la déflexion de la lumière,... La table VI de Bailey et Kostelecký [2006] reprend les différentes expériences envisageables avec les ordres de grandeurs attendus pour les contraintes sur les coefficients SME. Précisons également que le retard Shapiro et son équivalent Doppler sont traités en détails dans Bailey [2009] et que la déflexion de la lumière est traitée dans Tso et Bailey [2011].

Plusieurs expériences et analyses de données ont déjà été effectuées pour obtenir des contraintes sur les coefficients SME. Les contraintes actuelles sont répertoriées dans Kostelecký et Russell [2011]. En particulier, dans le secteur gravitationnel, des contraintes ont été établies en utilisant des interféromètres atomiques [Hohensee et al., 2011; Chung et al., 2009; Müller et al., 2008], en cherchant des violations de la loi de Newton à des petites distances [Bennett et al., 2011] et en analysant les données du LLR [Battat et al., 2007].

Finalement, les analyses des périhélies fournissent également des contraintes sur les paramètres SME [Bailey et Kostelecký, 2006; Iorio, 2012]. La précession des périhélies est calculée à partir des équations de Gauss dans [Bailey et Kostelecký, 2006]. Le résultat est donné par

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = -n \left[\frac{e^2 - 2\epsilon}{2e^4} (\bar{s}_{PP} - \bar{s}_{QQ}) + 2 \frac{na(e^2 - \epsilon)}{ce^3 \sqrt{1 - e^2}} \bar{s}_Q \right] \tag{4.29}$$

où $\epsilon = 1 - \sqrt{1 - e^2}$. Le coefficient $\bar{s}_Q$ est la projection du vecteur $\bar{s}^{0j}$ sur le vecteur $\vec{Q}$ et les coefficients $\bar{s}_{PP}$ et $\bar{s}_{QQ}$ sont les projections des coefficients $\bar{s}^{ij}$ sur les vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ (le vecteur $\vec{P}$ pointe dans la direction du périhélie et le vecteur $\vec{Q}$ est orthogonal à celui-ci tout en restant dans le plan orbital). Les coefficients $\bar{s}_Q$, $\bar{s}_{QQ}$ et $\bar{s}_{PP}$ dépendent donc des coefficients SME à travers des relations qui dépendent des paramètres orbitaux de l'orbite considérée (ces relations sont données dans Bailey et Kostelecký [2006]). Les analyses des précessions des périhélies permettent de contraindre des coefficients du type

$$\bar{s}_{\text{plan}} = (\bar{s}_{PP,\text{plan}} - \bar{s}_{QQ,\text{plan}}) - \alpha_{\text{plan}} \bar{s}_{Q,\text{plan}}, \tag{4.30}$$

où l'indice "plan" est mis pour bien spécifier que les coefficients dépendent des paramètres orbitaux de chaque planète. La table 4.3 reprend les différentes valeurs de α_{plan} (en particulier, les valeurs pour Mercure et la Terre sont en accord avec Bailey et Kostelecký [2006]) et les contraintes qu'il est possible d'obtenir pour chacune des combinaisons linéaires (4.30) en considérant les éphémérides INPOP. Tout comme pour les théories PEG ou pour l'EFE de MOND, il faut prendre ces contraintes comme des ordres de grandeur car elles ne correspondent pas à des

contraintes obtenues avec une implémentation directe de la théorie SME dans INPOP. Notons que les ordres de grandeur obtenus à la table 4.3 (qui sont un apport original de ce travail) sont nettement meilleurs (environ deux ordres de grandeur) que ceux présentés par Bailey et Kostelecký [2006]. Cela provient tout simplement du fait que les contraintes sur les précessions des périhélies de INPOP [Fienga et al., 2011] sont deux ordres de grandeur meilleures que celles utilisées par Bailey et Kostelecký [2006] (qui ont utilisé les valeurs qui se trouvent dans Will [2006]).

	$\langle d\omega/dt \rangle$ (mas/cy)	α_{plan}	$\bar{s}_{\text{plan}}$
Mercury	0.4 ± 0.6	6.2×10^{-3}	$(5.8 \pm 8.7) \times 10^{-12}$
Venus	0.2 ± 1.5	1.3×10^{-1}	$(0.76 \pm 5.7) \times 10^{-11}$
Earth	-0.2 ± 0.9	4.7×10^{-2}	$(-1.2 \pm 5.6) \times 10^{-11}$
Mars	-0.04 ± 0.15	6.9×10^{-3}	$(-0.46 \pm 1.7) \times 10^{-11}$
Jupiter	-41 ± 42	7.1×10^{-3}	$(-3.0 \pm 3.1) \times 10^{-8}$
Saturn	0.15 ± 0.65	4.6×10^{-3}	$(0.27 \pm 1.2) \times 10^{-9}$

TABLE 4.3 – Tableau reprenant les contraintes de INPOP10a sur les avances supplémentaires des périhélies [voir table 5 de Fienga et al., 2011]) : c'est-à-dire les intervalles dans lesquels une avance supplémentaire du périhélie ne modifie pas les résidus INPOP de plus de 5 %. La seconde colonne reprend les valeurs des coefficients α_{plan} qui apparaissent dans l'expression des combinaisons linéaires (4.30) qu'il est possible de contraindre en considérant les précessions des périhélies. La dernière colonne représente la contrainte sur les paramètres $\bar{s}_{\text{plan}}$ dont l'expression est donné par la relation (4.30) obtenue en considérant l'intervalle autorisé de la précession supplémentaire du périhélie (dont l'expression en théorie SME est donnée par la relation (4.29)).

Pour terminer, mentionnons une étude très récente de Iorio [2012] qui établit la précession des périhélies en théorie SME mais en ne considérant que les termes gravito-magnétiques (c'est-à-dire essentiellement les termes qui apparaissent à cause des modifications de g_{0i} ou encore uniquement les termes proportionnels à $\bar{s}_{0i}$). Les contraintes obtenues dans ce cadre sont de l'ordre de grandeur de $\bar{s}_{0i} \lesssim 10^{-9}$. Cet ordre de grandeur est cohérent avec nos résultats de la table 4.3. En effet, l'étude effectuée par Iorio [2012] revient à tenir uniquement compte du terme proportionnel en $\bar{s}_{Q,\text{plan}}$ dans la relation (4.30). La contrainte sur ce terme peut alors être obtenue en divisant la troisième colonne de la table 4.3 par la seconde colonne et on trouve aussi une contrainte de l'ordre de 10^{-9} sur les paramètres $\bar{s}_{0i}$.

En résumé, la théorie SME est une théorie effective qui permet de prendre en compte des potentielles violations de l'invariance de Lorentz. Dans le Système Solaire, la métrique est donnée par la relation (4.28) qui fait apparaître un certain nombre de paramètres dont certaines combinaisons linéaires sont déjà contraintes par les précessions des périhélies, par une analyse des données du LLR ou par des expériences d'interféromètres atomiques.

4.5.3 Simulations d'observables radioscience de Cassini

La métrique SME (4.28) dépend à priori de 14 paramètres : 9 paramètres pour $\bar{s}_{\mu\nu}$ (qui est symétrique et sans trace), 4 paramètres pour les coefficients $\alpha(a_{\text{eff}})_\nu/M$ et c_{TT}. La première

chose à remarquer est que les coefficients $\bar{s}_{TJ}$ et $\alpha(a_{\text{eff}})_J/M$ sont complètement dégénérés. Par conséquent, la métrique ne dépend effectivement que de 11 paramètres : 6 paramètres $\bar{s}_{IJ}$, 3 paramètres $\bar{s}_{TJ} + \alpha(a_{\text{eff}})_J/M$, c_{TT} et $\alpha(a_{\text{eff}})_T/M$. D'autre part, le paramètre c_{TT} peut être absorbé dans une redéfinition du GM du Soleil. En effet, la substitution $G\bar{M} = GM(1 + c_{TT})$ dans la métrique (4.28) fait disparaître le paramètre c_{TT}. Nous nous attendons donc à ce que ce paramètre soit indétectable car complètement absorbé dans le fit de la masse du Soleil.

La procédure suivie est la même que celle suivie pour la théorie PEG : nous avons réalisé des simulations du Range et du Doppler de Cassini en faisant varier les 11 paramètres SME un à un (en annulant les 10 autres). Ensuite, nous avons représenté les différences maximales entre le Doppler simulé en SME et le Doppler simulé en RG (avant et après le fit des conditions initiales) sur la figure 4.10. Tout d'abord, une simple analyse de la figure concernant le paramètre c_{TT} confirme ce que nous avions établi : le fit de la masse du Soleil absorbe tout le signal lié à c_{TT} qui n'est donc pas observable. La comparaison des courbes post-fit avec la précision de Cassini (10^{-14}) permet d'obtenir une estimation de la précision attendue sur les estimations des coefficients SME dans le cadre d'une analyse des données réelles. Ces précisions sont données à la table 4.4 et peuvent également être interprétées comme une estimation de l'ordre de grandeur de contraintes sur les paramètres SME.

Paramètre	$Max(Residus) < 10^{-14}$
$\bar{s}_{XX}$	2.22×10^{-10}
$\bar{s}_{YY}$	2.63×10^{-10}
$\bar{s}_{ZZ}$	1.41×10^{-9}
$\bar{s}_{TX} + \alpha(a_{\text{eff}})_1/M$	8.96×10^{-8}
$\bar{s}_{TY} + \alpha(a_{\text{eff}})_2/M$	7.02×10^{-8}
$\bar{s}_{TZ} + \alpha(a_{\text{eff}})_3/M$	1.62×10^{-7}
$\bar{s}_{XY}$	1.27×10^{-10}
$\bar{s}_{XZ}$	2.93×10^{-10}
$\bar{s}_{YZ}$	3.05×10^{-10}
$\alpha(a_{\text{eff}})_T/M$	1.93×10^{-5}
c_{TT}	-

TABLE 4.4 – Estimation de l'incertitude atteignable par une analyse des données Cassini sur les paramètres SME considérés dans l'expansion de la métrique (4.28). Ces valeurs sont obtenues en comparant la valeur maximale du résidu Doppler généré par la théorie alternative avec la précision de Cassini (voir à la figure 4.10). Pour estimer ces valeurs, un seul paramètre est varié à la fois.

Corrélations entre les paramètres SME

Les figures 4.10 et la table 4.4 sont obtenues en faisant varier un seul paramètre SME à la fois. Cependant, des études analytiques [Bailey et Kostelecký, 2006; Bailey, 2009] suggèrent que les signaux Range et Doppler ne vont dépendre que d'un nombre réduit de paramètres indépendants constitués de combinaisons linéaires des paramètres SME. Ces combinaisons linéaires dépendent fortement de la géométrie de la mission considérée et elles sont relativement compliquées à dériver

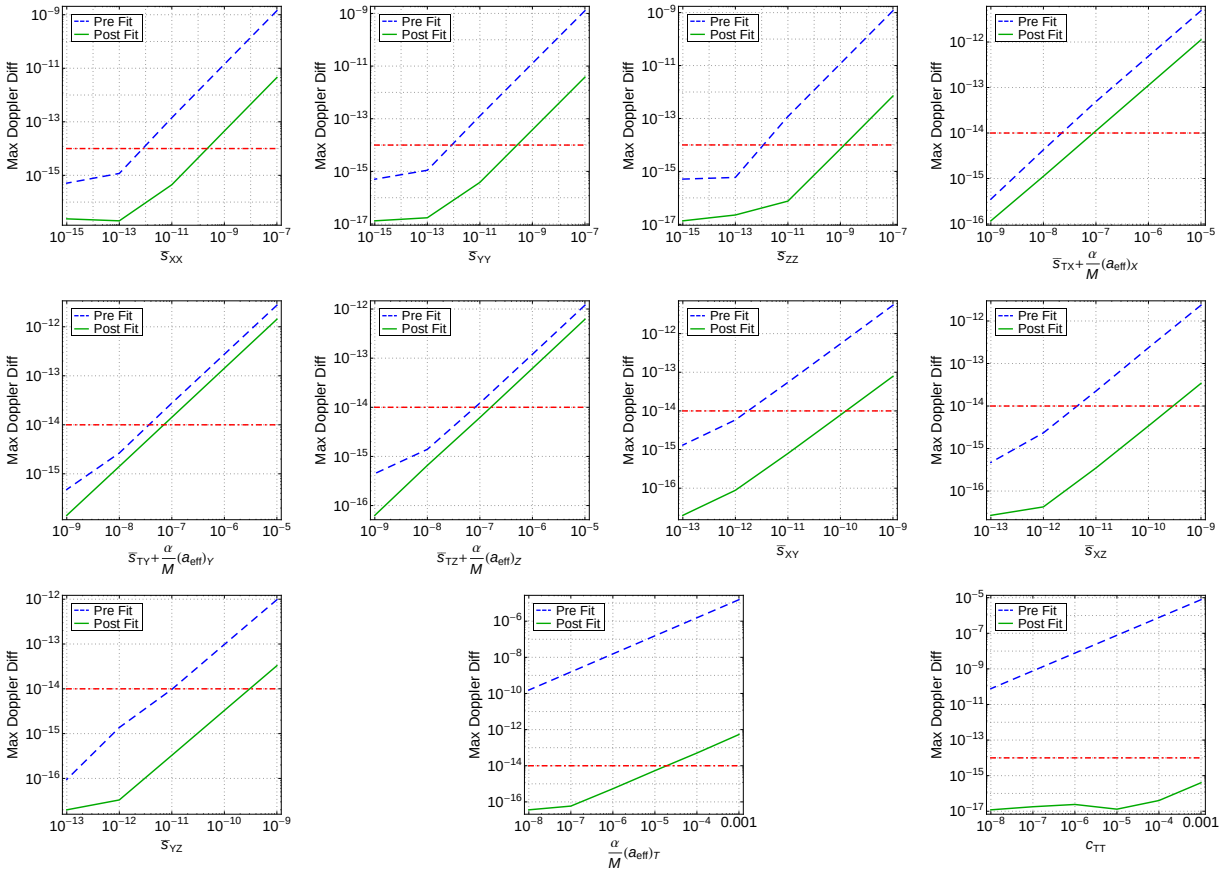

FIGURE 4.10 – Représentation du signal Doppler maximal dû à une théorie SME (paramétrisée par les 11 paramètres qui entrent dans l'expansion de la métrique (4.28)) pour la mission Cassini entre Jupiter et Saturne. Les courbes bleues discontinues représentent la différence maximale entre le Doppler simulé en SME et le Doppler simulé en RG avec les mêmes conditions initiales. Les courbes vertes continues représentent les résidus maximaux obtenus après une analyse standard en RG des données simulées en théorie SME (c'est-à-dire après le fit des conditions initiales). Les courbes discontinues rouges représentent la précision de Cassini.

analytiquement. Dans cette section, nous allons déterminer numériquement les combinaisons linéaires dont dépendent effectivement les signaux Cassini.

Pour déterminer les combinaisons linéaires dont dépendent les signaux, il faut commencer par trouver quels sont les coefficients qui sont corrélés. Pour ce faire, nous avons calculé numériquement les dérivées partielles des signaux S_i par rapport aux paramètres de SME (noté p_k)

$$P_{ik} = \frac{\partial S_i}{\partial p_k} \approx \frac{S_i(p_k + \delta p_k) - S_i(p_k)}{\delta p_k}. \tag{4.31}$$

Ensuite, à partir de cette matrice des dérivées partielles, nous pouvons construire la matrice normale $\mathbf{N} = \mathbf{P}^T\mathbf{P}$ dont l'inverse $\mathbf{C} = \mathbf{N}^{-1}$ est la matrice de variance-covariance des paramètres. Les termes $C_{ij}/\sqrt{C_{ii}C_{jj}}$ sont les coefficients de corrélation entre les paramètre p_i et p_k. Cette matrice nous permet d'identifier les groupes de paramètres qui sont hautement corrélés.

Ensuite, nous avons considéré des paires de paramètres hautement corrélés pour estimer les coefficients apparaissant dans la combinaison linéaire. Ces coefficients sont estimés en comparant les dérivées partielles des signaux par rapport aux paramètres considérés. Pour illustrer, prenons par exemple les paramètres $\bar{s}_{XY}$ et $\bar{s}_{XZ}$ qui sont fortement corrélés (ceci se voit de l'analyse des coefficients de corrélation). Par conséquent, nous savons que les signaux radioscience ne dépendent en fait que de $\bar{s}_C = \sigma_1 \bar{s}_{XY} + \sigma_2 \bar{s}_{XZ}$ où σ_1 et σ_2 sont des coefficients à déterminer. Or, si les signaux ne dépendent de $\bar{s}_{XY}$ et de $\bar{s}_{XZ}$ que à travers $\bar{s}_C$, nous avons la relation

$$\frac{\partial S_i}{\partial \bar{s}_{XY}} = \frac{\partial S_i}{\partial \bar{s}_C}\sigma_1 \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial \bar{s}_{XZ}} = \frac{\partial S_i}{\partial \bar{s}_C}\sigma_2. \tag{4.33}$$

Par conséquent, la comparaison des dérivées partielles permet d'estimer le ratio des coefficients σ_2 et σ_1

$$\frac{\frac{\partial S_i}{\partial \bar{s}_{XZ}}}{\frac{\partial S_i}{\partial \bar{s}_{XY}}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \tag{4.34}$$

En pratique, dans les simulations, ces ratios ne sont pas constants. C'est pourquoi nous avons estimé ce rapport par un fit par moindres carrés et nous avons calculé les intervalles de confiance à 95 % sur ce ratio. Si l'intervalle de confiance exclut la valeur 0, alors nous avons considéré les coefficients corrélés et nous les avons groupés dans une combinaison. Pour l'exemple considéré ici avec les paramètres $\bar{s}_{XY}$ et $\bar{s}_{XZ}$, le ratio σ_1/σ_2 est estimé à 0.0433 avec un intervalle de confiance à 95 % donné par $[0.0428, 0.0438]$.

L'application de cette procédure à tous les paramètres SME permet de déterminer les paramètres indépendants dont dépendent le Range et le Doppler de Cassini

$$\bar{s}_A = \bar{s}_{TX} + \frac{\alpha}{M}(a_{\text{eff}})_X \tag{4.35a}$$

$$\bar{s}_B = \bar{s}_{TZ} + \frac{\alpha}{M}(a_{\text{eff}})_Z + 2.24\left(\bar{s}_{TY} + \frac{\alpha}{M}(a_{\text{eff}})_Y\right) \tag{4.35b}$$

$$\bar{s}_C = \bar{s}_{XZ} + 2.31\bar{s}_{XY} \tag{4.35c}$$

$$\bar{s}_D = \bar{s}_{YZ} + 0.22\bar{s}_{ZZ} + 1.16\bar{s}_{YY} - 1.37\bar{s}_{XX} \tag{4.35d}$$

$$\bar{s}_E = \frac{\alpha}{M}(a_{\text{eff}})_T. \tag{4.35e}$$

La matrice de corrélation pour les cinq paramètres restant est donnée par

$$corr = \begin{pmatrix} 1 & 0.15 & 0.11 & -0.11 & 0.34 \\ 0.15 & 1 & -0.02 & 0.16 & -0.37 \\ 0.11 & -0.02 & 1 & 0.02 & -0.22 \\ -0.11 & 0.16 & 0.02 & 1 & -0.1 \\ 0.34 & -0.37 & -0.22 & -0.1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.36}$$

Les valeurs absolues des coefficients apparaissant dans cette matrice sont relativement petites ce qui indique qu'il n'y a pas de corrélations supplémentaires. Les précisions attendues sur ces cinq coefficients lors d'une analyse des données réelles de Cassini peuvent être dérivées à partir de la table 4.4 et elles sont données dans la table 4.5. A nouveau, ces estimations peuvent également être interprétées comme une estimation de l'ordre de grandeur des contraintes sur les paramètres

SME : si un de ces paramètres est plus grand que la valeur indiquée dans la table 4.5, cela produirait un signal anormal plus grand que la précision de Cassini or un tel signal n'a pas été détecté.

Paramètre	$Max(Residus) < 10^{-14}$
$\bar{s}_A$	8.96×10^{-8}
$\bar{s}_B$	1.62×10^{-7}
$\bar{s}_C$	2.93×10^{-10}
$\bar{s}_D$	3.05×10^{-10}
$\bar{s}_E$	1.93×10^{-5}

TABLE 4.5 – Estimation de l'incertitude atteignable par une analyse des données Cassini sur les combinaisons indépendantes des paramètres SME (4.35). Ces valeurs sont obtenues en comparant la valeur maximale du résidu Doppler généré par la théorie alternative avec la précision de Cassini (voir à la figure 4.10).

La figure 4.11 représente les résidus obtenus pour chacun des paramètres SME indépendants (4.35). Ces courbes sont les signatures incompressibles qui doivent être recherchées dans les résidus d'une analyse standard des données réelles. Ces templates nous donnent une idée de l'évolution temporelle et de l'ordre de grandeur de la signature.

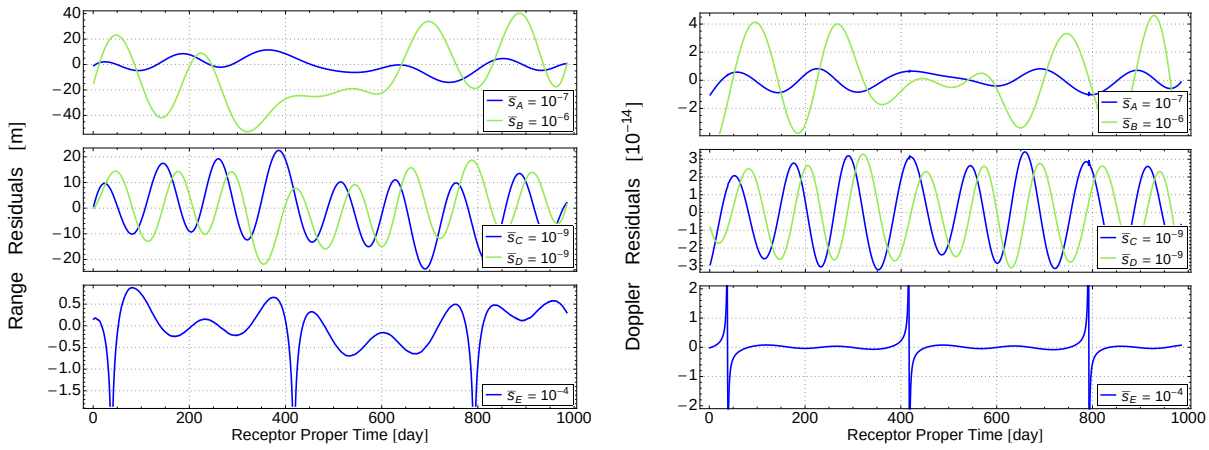

FIGURE 4.11 – Représentation des résidus Range (à gauche) et Doppler (à droite) obtenus dans le cadre de la mission Cassini en considérant une théorie alternative de la gravitation de type SME avec un seul paramètre SME non-nul. Les cinq paramètres considérés sont les paramètres indépendants donnés par les relations (4.35). Ces courbes sont des templates de signaux qui doivent être cherchés dans les résidus d'une analyse standard en RG de données réelles.

La comparaison des ordres de grandeur obtenus dans ce travail avec les contraintes existantes sur les coefficients SME [répertoriées dans Kostelecký et Russell, 2011] montre que nos résultats sont du même ordre de grandeur que les contraintes existantes. Plus précisément, la sensibilité aux coefficients $\bar{s}_{TJ}$ est plus intéressante avec la radioscience de Cassini par rapport aux analyses du LLR [Battat et al., 2007] et des interféromètres atomiques [Chung et al., 2009]. Par contre, en ce qui concerne les coefficients $\bar{s}_{JK}$, l'analyse de Cassini fournit une estimation dont l'ordre de grandeur est semblable à celle obtenue par le LLR. Cependant, les combinaisons linéaires

testées ne sont pas les mêmes. Finalement, la comparaison entre les ordres de grandeur obtenus à la table 4.5 avec la table 4.3 qui reprend les analyses des précessions des périhélies indiquent que les précessions des périhélies sont légèrement plus performantes que l'analyse des données radioscience effectuées ici. Cependant, l'analyse des précessions des périhélies fait apparaître des combinaisons linéaires encore différentes. Dans ce cadre, il est évidemment très intéressant de considérer un maximum d'expériences différentes pour permettre de lever au maximum les dégénérescences entre les paramètres SME.

4.5.4 Simulations d'observables VLBI dans le système de Saturne

Tout comme nous l'avons fait dans la section 4.5.3, nous allons commencer par déterminer les combinaisons linéaires des coefficients SME dont dépendent les signaux VLBI entre Saturne et la Terre. La procédure pour déterminer ces combinaisons linéaires est décrite à la section 4.5.3. Après application de cette procédure, les combinaisons trouvées sont données par

$$\bar{s}_A = \bar{s}_{TX} + \frac{\alpha}{M}(a_{\text{eff}})_X \tag{4.37a}$$

$$\bar{s}_F = \bar{s}_{TY} + \frac{\alpha}{M}(a_{\text{eff}})_Y \tag{4.37b}$$

$$\bar{s}_G = \bar{s}_{TZ} + \frac{\alpha}{M}(a_{\text{eff}})_Z \tag{4.37c}$$

$$\bar{s}_H = \bar{s}_{XZ} - 0.43\bar{s}_{XY} \tag{4.37d}$$

$$\bar{s}_I = \bar{s}_{YZ} + 0.53(\bar{s}_{ZZ} - \bar{s}_{YY}) \tag{4.37e}$$

$$\bar{s}_J = \bar{s}_{XX} \tag{4.37f}$$

$$\bar{s}_E = \frac{\alpha}{M}(a_{\text{eff}})_T. \tag{4.37g}$$

Nous remarquons immédiatement que ces combinaisons ne sont pas les mêmes que celles obtenues dans l'analyse de la phase de croisière de Cassini (cfr les relations (4.35)). En combinant une analyse des données VLBI de Saturne avec une analyse des données radioscience de Cassini dans sa phase de croisière, il devrait être possible de lever une partie des dégénérescences entre les paramètres SME. La figure 4.12 représente l'influence de SME sur les observations VLBI de Saturne à partir de la Terre (l'ordre de grandeur utilisé pour les paramètres SME correspond à l'ordre de grandeur obtenu par l'analyse des données radioscience de Cassini dans la phase de croisière). Une simple comparaison de l'ordre de grandeur des signaux produits avec la précision des mesures (de l'ordre de 0.5 mas) permet de nous rendre compte que les mesures VLBI dans le système de Saturne sont susceptibles de fournir des estimations des paramètres SME moins précises que la considération des mesures radioscience (voir la table 4.5). Cependant, les combinaisons linéaires apparaissant dans les deux situations sont différentes (voir les relations (4.35) et (4.37)) ce qui peut permettre de lever une partie des dégénérescences.

Finalement, tout comme pour les autres théories, on peut se demander quelle partie du signal est liée à la propagation de la lumière. Pour répondre à cette question, nous avons réalisé la même étude que pour le cas de la théorie PEG (cfr la figure 4.7). Le résultat est que seul le paramètre $\bar{s}_E$ a un effet conséquent sur la propagation de la lumière. L'effet des autres paramètres sur la propagation de la lumière est complètement négligeable pour les mesures VLBI de Saturne.

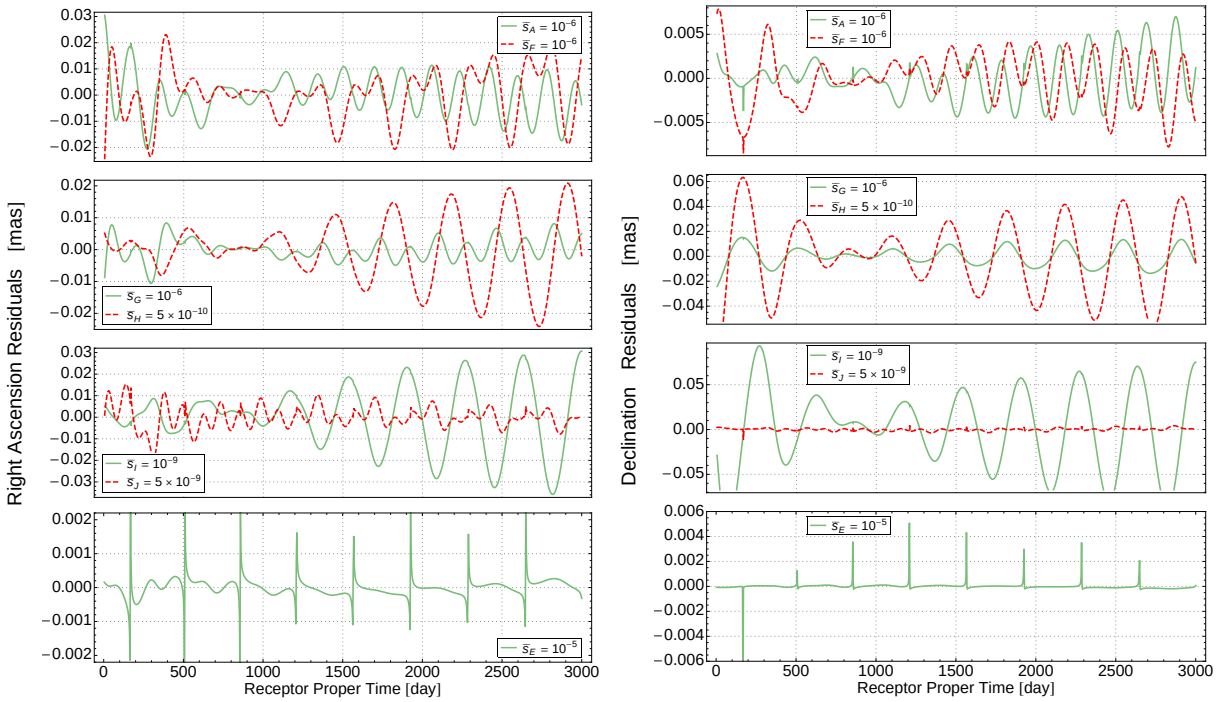

FIGURE 4.12 – Représentation des résidus en ascension droite (à gauche) et en déclinaison (à droite) obtenus dans le cadre d'une observation VLBI entre le système de Saturne et la Terre en considérant une théorie alternative de la gravitation de type SME avec un seul paramètre non-nul. Les paramètres indépendants pour la situation considérée sont données par les relations (4.37.) Ces courbes sont des templates de signaux qui doivent être cherchés dans les résidus d'une analyse standard en RG de données réelles. L'ordre de grandeur utilisé pour les paramètres SME correspond à l'ordre de grandeur obtenu par l'analyse des données radioscience de Cassini dans la phase de croisière.

4.6 Théorie tenseur-scalaire de type "John + George"

4.6.1 Présentation théorique

La théorie tenseur-scalaire de type "John+George" considérée dans ce travail est une théorie très générale dérivant du formalisme des "Fab Four". En fait, Horndeski [1974] a dérivé le lagrangien le plus général qui inclut un champ scalaire et un champ tensoriel (de rang 2) de telle façon que les équations de champs restent d'ordre 2. Ce lagrangien est extrêmement complexe et fait apparaître de nombreux termes. Récemment, la théorie de Horndeski fut revisitée par Charmousis et al. [2012a,b] pour des considérations liées au problème de l'ajustement fin de la constante cosmologique (rappelé à la section 1.4.1). En particulier, Charmousis et al. [2012a,b] dérivèrent la théorie tenseur scalaire la plus générale qui permet un mécanisme de self-tuning et dont les équations de champs sont du second ordre. Le self-tuning est un mécanisme d'écrantage de l'énergie du vide qui se produit au niveau cosmologique. Ainsi, quel que soit la valeur de l'énergie du vide, celle-ci n'influence pas (ou très peu) la géométrie de l'espace-temps lorsqu'on considère des espace-temps de FLRW. Ceci permet donc d'introduire dans la théorie une énergie du vide beaucoup plus conséquente que la valeur de la constante cosmologique obtenue en RG

(par exemple en intégrant les modes 0 de l'énergie du vide jusqu'à un cut-off ultraviolet) qui n'influence que très peu le comportement du facteur d'échelle a. Très récemment, Charmousis et al. [2012a,b] ont montré que la théorie tenseur-scalaire la plus générale (dont les équations de champs restent du second ordre) admettant un mécanisme de self-tuning est décrite par quatre fonctions dépendant du champ scalaire. Le lagrangien général est donc divisé en 4 parties qui portent les noms des 4 Beatles : John, George, Paul et Ringo et la théorie générale est connue sous le nom des *Fab Four*.

Dans cette thèse, nous avons considéré une théorie alternative qui contient deux des quatre Fab Four : John et George. Les lagrangiens correspondant sont donnés par

$$\mathcal{L}_{John} = \sqrt{-g} V_{John}(\phi) G^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \tag{4.38a}$$

$$\mathcal{L}_{George} = \sqrt{-g} V_{George}(\phi) R. \tag{4.38b}$$

Plus précisément, le modèle considéré est décrit par l'action suivante [2] (ce n'est pas le modèle le plus général basé sur les lagrangiens ci-dessus)

$$S = \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \left[R\left(1 + \epsilon\phi\right) - \left(g^{\mu\nu} + \kappa\ \gamma_J\ G^{\mu\nu}\right) \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \right] + S_{\rm mat}[g_{\mu\nu}, \Psi_m] \tag{4.39}$$

où ϵ et γ_J sont des paramètres libres sans dimension, le champ scalaire ϕ est sans dimension [3] et rappelons que $\kappa = 1/M_p^2$ (M_p étant la masse de Planck réduite) conformément à la relation (9) [4].

La raison pour laquelle le modèle précédent est considéré est liée à des considérations sur l'inflation. En effet, le terme "John" (paramétré par γ_J) de l'action précédente (sans le terme "George" qui est paramétré par ϵ) fut introduit car il permet de réaliser une phase inflationnaire [Sushkov, 2009] avec une sortie de la phase inflationnaire qui se fait naturellement sans aucun ajustement fin d'un quelconque potentiel. Cependant, ce modèle présente deux difficultés [Bruneton et al., 2012] : tout d'abord, il requiert des valeurs transplanckiennes pour la vitesse initiale du champ scalaire, ce qui n'est pas naturel [5] ; ensuite, sans couplage entre le champ scalaire et le scalaire de Ricci, il n'y a à priori aucune raison pour que le champ scalaire soit généré (en d'autres mots, $\phi = 0$ est une solution de ce modèle dans une configuration statique à symétrie sphérique quel que soit le contenu en matière). C'est pourquoi un modèle plus réaliste comportant en plus un couplage entre le champ scalaire et le scalaire de Ricci fut considéré (soit un terme de type "George").

2. Dans cette action, nous avons utilisé un système d'unités géométriques dans lequel $\hbar = c = 1$.

3. Le champ scalaire utilisé ici diffère donc de celui utilisé par Bruneton et al. [2012] qui est donné par $\varphi = \phi/\sqrt{\kappa} = M_p\phi$.

4. Pour clarifier les choses, il est bon de se convaincre que cette expression est correcte au point de vue dimensionnel : R a les dimensions de l'inverse d'une longueur au carré, c'est-à-dire des GeV^2, κ a une dimension de GeV^{-2} (voir la relation 9), ϕ est sans dimension, $g^{\mu\nu}$ est sans dimension mais $G^{\mu\nu}$ a une dimension de l'inverse d'une longueur au carré ou encore une dimension de GeV^2 si bien que $\kappa G^{\mu\nu}$ est sans dimension. Finalement, l'opérateur de dérivation a pour dimension l'inverse d'une longueur ou encore de GeV, ce qui fait que le terme $\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ est en GeV^2 tout comme le premier terme de l'action. La densité lagrangienne est donc en GeV^4 et l'action est alors sans dimension (ce qui est logique vu que $\hbar$ a les dimensions d'une action et est sans dimension dans ces unités).

5. Ceci veut dire que $\dot{\phi}$ initial est énorme devant l'inverse du temps de Planck. Plus précisément, Bruneton et al. [2012] ont montré que $\dot{\phi}_i \sim 10^{78}/t_P$ (t_P est le temps de Planck) ce qui veut dire que le temps caractéristique d'évolution du champ scalaire est $10^{-78} \times t_P$ ce qui ne semble pas naturel.

Une étude préliminaire du régime inflationnaire est présentée par Bruneton et al. [2012]. En particulier, le régime inflationnaire n'apparaît que dans le cas $\gamma_J > 0$ et le cas $\epsilon < 0$ présente des pathologies (en particulier, cela viole les conditions pour éviter les *ghosts* et les instabilités de type Laplacienne [De Felice et Tsujikawa, 2012]).

Dans le Système Solaire, les équations de champs correspondant à une symétrie sphérique ont été dérivées en utilisant une métrique en jauge isotrope du type

$$ds^2 = -A^2(r)c^2dt^2 + B(r)^2(dr^2 + r^2d\Omega^2) \tag{4.40}$$

dans l'Annexe C de Bruneton et al. [2012]. Cette solution peut s'écrire sous la forme d'une expansion asymptotiquement Minkowskienne dans le vide :

$$A^2(r) = 1 + \sum_i \frac{a_i}{r^i} \tag{4.41a}$$

$$B^2(r) = 1 + \sum_i \frac{b_i}{r^i} \tag{4.41b}$$

$$\phi(r) = p_0 + \sum_i \frac{p_i}{r^i} \tag{4.41c}$$

avec les coefficients a_i, b_i et p_i qui ont une dimension de longueur à la puissance i. En insérant les expansions (4.41) dans les équations de champs dérivant de l'action (4.39) et en résolvant les équations ordre par ordre en puissance de r, on trouve finalement

$$A(r)^2 = 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_s^2}{2r^2} + \frac{\epsilon^2 p_1^2}{4z^2r^2} + \frac{p_1\epsilon r_s^2}{24zr^3} - \frac{p_1^2 r_s}{24zr^3} + \frac{3}{4}\frac{\bar{\gamma}\epsilon^2}{z^2r^4} - \frac{r_s\bar{\gamma}}{8zr^5}, \tag{4.42a}$$

$$B(r)^2 = 1 + \frac{r_s}{r} - 2\frac{\epsilon p_1}{zr} - \frac{p_1^2}{4zr^2} - \frac{\bar{\gamma}}{4zr^4}. \tag{4.42b}$$

avec $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ le rayon de Schwarzschild de la masse centrale, $z = 1 + \epsilon p_0$, et $\bar{\gamma} = \gamma_J p_1^2/M_p^2$ (qui a la dimension de l'inverse d'une longueur à la puissance 4). Dans l'expansion ci-dessus, nous avons négligé des termes d'ordres supérieurs en r_s/r, en ϵ, en p_1/r et en $\bar{\gamma}M_p^3/r$. La valeur asymptotique du champ scalaire $p_0 = \phi(r \to \infty)$ est un paramètre libre qui peut éventuellement être connecté à l'évolution cosmologique du champ scalaire. Finalement, le paramètre p_1 est lié à la charge scalaire du corps central. Cette charge scalaire doit être déterminée numériquement en calculant la solution interne du corps (similairement à ce qui a été effectué en théorie tenseur-scalaire classique par Damour et Esposito-Farese [1993]; Damour et Esposito-Farèse [1996]). Pour ce faire, il faut dériver les équations de champs en symétrie sphérique avec de la matière et les résoudre numériquement de façon non-perturbative dans une situation correspondant au Système Solaire. La solution numérique obtenue permettrait alors de relier le paramètre p_1 aux propriétés du corps central et aux paramètres de la théorie ϵ et γ_J.

La métrique (4.42) ressemble à une expansion PPN et il est possible d'assimiler $-2\frac{\epsilon p_1}{zr_s}$ à $\delta\gamma$ et $\frac{\epsilon^2 p_1^2}{2z^2r_s^2}$ à $\delta\beta$ (les deux paramètres PPN sont alors liés entre eux par $8\delta\beta = \delta\gamma^2$). Cependant, les termes en $1/r^3$, en $1/r^4$ et en $1/r^5$ peuvent devenir plus importants que les termes en $1/r^2$ et en $1/r$ (cela dépend fortement de la valeur des paramètres). Par conséquent, l'utilisation des contraintes PPN n'est pas suffisante et il est nécessaire de tenir compte explicitement des autres termes présents dans l'expression de la métrique (4.42). Par contre, il est évident que la métrique

obtenue ici entre dans le cadre de la phénoménologie couverte par les théories PEG (la métrique s'écrit aisément sous la forme donnée par les relations (4.4) et (4.5)).

Dans le cadre de ce travail, les 4 paramètres ϵ, γ_J, p_0 et p_1 sont supposés libres et nous allons analyser les contraintes obtenues par les observations du Système Solaire.

4.6.2 Précession des périhélies

Tout comme à la section 4.3.2, il est possible de calculer perturbativement les précessions des périhélies. Pour ce faire, il faut calculer l'accélération additionnelle induite par les termes supplémentaires dans la métrique et ensuite utiliser les équations de Gauss comme présenté à la section 4.2.1. Au final, nous trouvons une précession séculaire du périhélie qui est donnée par

$$\left\langle \frac{d\omega}{dt} \right\rangle = -\alpha_1 \frac{\bar{\gamma}}{z} - \alpha_2 \frac{\bar{\gamma}\epsilon^2}{z^2} - \alpha_3 \frac{p_1^2}{z} - \alpha_4 \frac{p_1 \epsilon}{z} - \alpha_5 \frac{p_1^2 \epsilon^2}{z^2} \tag{4.43}$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{n}{16a^4} \frac{8 + 24e^2 + 3e^4}{(1-e^2)^4}, \tag{4.44a}$$

$$\alpha_2 = \frac{9n}{8a^3 r_s} \frac{4 - 3e^2 - e^4}{(1-e^2)^4}, \tag{4.44b}$$

$$\alpha_3 = \frac{n}{8a^2} \frac{4 + e^2}{(1-e^2)^2}, \tag{4.44c}$$

$$\alpha_4 = \frac{2n}{a(1-e^2)}, \tag{4.44d}$$

$$\alpha_5 = \frac{n}{4ar_s(1-e^2)}, \tag{4.44e}$$

où a est le demi grand axe de l'orbite, e son excentricité et n son moyen mouvement $n = \frac{2\pi}{T}$. La table 4.6 reprend les contraintes données par INPOP10a [Fienga et al., 2011] sur les précessions des périhélies des différentes planètes. Sur cette même table se trouvent les contraintes que nous pouvons en déduire sur les paramètres qui entrent dans la métrique (4.40-4.42) de la théorie John+Georges. Les contraintes les plus fortes proviennent des données de Mercure. A nouveau, comme nous l'avons mentionné pour les autres théories considérées dans ce chapitre, les valeurs données à la table 4.6 donnent un ordre de grandeur sur les contraintes des paramètres. Cependant, ces contraintes ne sont pas équivalentes aux contraintes qu'on obtiendrait en implémentant la dynamique qui résulte de la métrique (4.42) dans les éphémérides et après un fit global sur tous les paramètres.

4.6.3 Simulations d'observables radioscience de Cassini

La métrique caractéristique des théories "John+George" (4.40-4.42) dépend de 4 paramètres : $\frac{\bar{\gamma}}{z}$, $\frac{\bar{\gamma}\epsilon^2}{z^2}$, $\frac{p_1^2}{z}$, $\frac{p_1\epsilon}{z}$. Les paramètres $\bar{\gamma}$ et ϵ sont des paramètres libres de la théorie tandis que les paramètres p_1 et z sont déterminés par une solution numérique des équations d'Einstein comme

	$\langle d\omega/dt\rangle$ (mas/cy)	$\frac{\bar{\gamma}}{z}$ $[\times 10^{32} m^4]$	$\frac{\bar{\gamma}\epsilon^2}{z^2}$ $[\times 10^{23} m^4]$
Mercury	0.4 ± 0.6	-0.1 ± 0.2	-0.82 ± 1.23
Venus	0.2 ± 1.5	-2.6 ± 19.5	-7.9 ± 59
Earth	-0.2 ± 0.9	15.4 ± 69.4	33 ± 152
Mars	-0.04 ± 0.15	29.4 ± 110	43 ± 164
Jupiter	-41 ± 42	$(2.7 \pm 2.8) \times 10^7$	$(1.15 \pm 1.18) \times 10^7$
Saturn	0.15 ± 0.65	$(-2.8 \pm 12) \times 10^6$	$(-6.5 \pm 28.2) \times 10^5$
Combiné	-	-0.15 ± 0.18	-0.82 ± 1.23

	$\frac{p_1^2}{z}$ $[\times 10^{10} m^2]$	$\frac{p_1\epsilon}{z}$ $[m]$
Mercury	-0.45 ± 0.68	-0.021 ± 0.031
Venus	-2.2 ± 16.7	-0.051 ± 0.38
Earth	6.9 ± 31.1	0.11 ± 0.52
Mars	5.9 ± 31.1	0.066 ± 0.25
Jupiter	$(4.5 \pm 4.6) \times 10^5$	1308 ± 1343
Saturn	$(-1.4 \pm 6) \times 10^4$	-25 ± 106
Combiné	-0.45 ± 0.68	-0.021 ± 0.031

TABLE 4.6 – Tableau reprenant les contraintes de INPOP10a sur les avances supplémentaires des périhélies [voir table 5 de Fienga et al., 2011]) et les intervalles de confiance que ces contraintes impliquent sur les paramètres entrant dans la métrique en champs faibles (4.40-4.42) dérivée pour une théorie de type John+Georges. La dernière ligne correspond à l'intervalle commun autorisé par toutes les planètes. Toutes les valeurs des paramètres PEG dans ces intervalles ne modifient pas les résidus d'INPOP de plus de 5 %. Les valeurs dans ce tableau sont dérivées en supposant que seul un paramètre est non nul.

indiqué à la section 4.6.1. Nous avons adopté une approche phénoménologique en considérant que les quatre paramètres sont indépendants.

Les résidus obtenus pour les quatre paramètres sont représentés à la figure 4.13. Ces courbes donnent les signatures incompressibles observables dans les résidus de la mission Cassini si la bonne théorie de la gravitation est une théorie tenseur-scalaire de type "John+George" telle que présentée dans la section 4.6.1. Ces templates peuvent être utilisés pour une recherche systématique dans les résidus d'une analyse en RG des données réelles. Nous pouvons remarquer en comparant la figure 4.13 avec la figure 4.4 que les templates relatifs à $p_1\epsilon/z$ sont identiques à ceux produits par $\delta\gamma$ conformément à ce qui a été établi à la section 4.6.1. D'autre part, la signature incompressible relative à $\bar{\gamma}\epsilon/z^2$ est semblable à celle produite par $\delta\beta$ ce qui n'est pas trop surprenant car ces deux paramètres paramétrisent la partie temporelle de la métrique (mais cette similitude n'est que quantitative).

De plus, les figures 4.14 représentent l'évolution de la différence maximale entre le Doppler simulé en théorie alternative et le Doppler simulé en RG (pre et post-fit) en fonction des différents paramètres qui caractérisent la métrique correspondant à la théorie tenseur-scalaire "John+George". Il est particulièrement intéressant de remarquer que l'ajustement des conditions initiales n'absorbe pas les anomalies dans le signal Doppler pour 3 des paramètres. Ceci

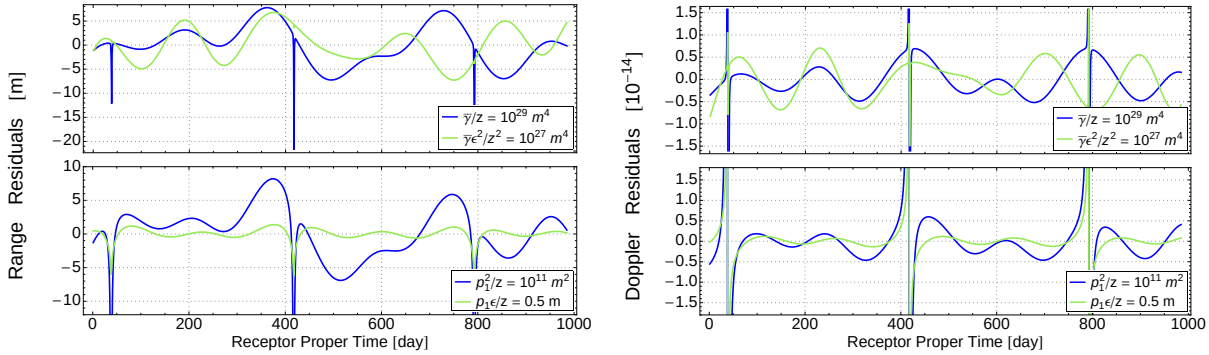

FIGURE 4.13 – Représentation des résidus Range (à gauche) et Doppler (à droite) obtenus dans le cadre de la mission Cassini en considérant une théorie alternative de la gravitation de type John+George avec un seul paramètre non-nul. La métrique considérée est donnée par les équations (4.40-4.42). Ces courbes sont des templates de signaux qui doivent être cherchés dans les résidus d'une analyse standard en RG de données réelles.

s'explique par le fait qu'un signal anormal particulièrement important apparaît lors des conjonctions. Ceci peut s'observer également sur les templates des résidus à la figure 4.13. Le fait que le signal soit si important lors des conjonctions provient du fait que la métrique considérée a une influence considérable sur la propagation de la lumière. Par conséquent, le jeu de données de Cassini qui couvre la période durant laquelle fut menée l'expérience de gravitation de Bertotti et al. [2003] est particulièrement bien adapté pour contraindre la théorie considérée malgré le court temps couvert par les données (30 jours).

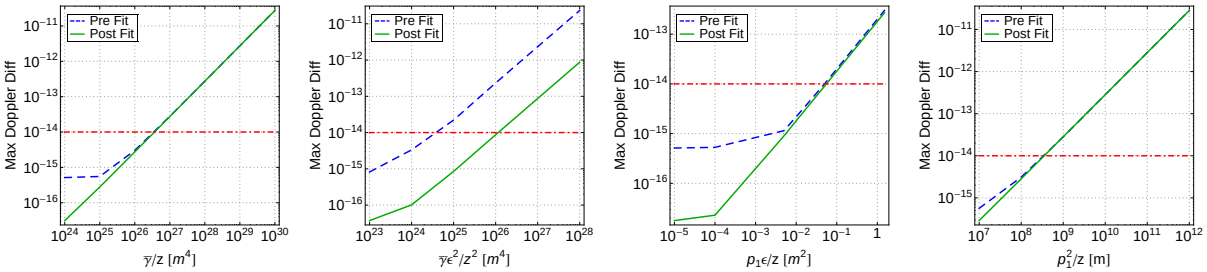

FIGURE 4.14 – Représentation du signal Doppler maximal dû à une théorie tenseur-scalaire de type John+George dont la métrique est donnée par les équations (4.40-4.42) pour la mission Cassini entre Jupiter et Saturne. Les courbes bleues discontinues représentent la différence maximale entre le Doppler simulé en théorie alternative et le Doppler simulé en RG avec les mêmes conditions initiales. Les courbes vertes continues représentent les résidus maximaux obtenus après une analyse standard en RG des données simulées en théorie alternative (c'est-à-dire après le fit des conditions initiales). Les courbes discontinues rouges représentent la précision de Cassini.

La comparaison du résidu Doppler maximal dû à la théorie alternative considérée avec la précision de Cassini donne une idée de la sensibilité attendue sur l'estimation des coefficients apparaissant dans la métrique (4.40-4.42). La table 4.7 donne les incertitudes attendues sur ces paramètres. Ces valeurs peuvent aussi être interprétées comme une estimation de l'ordre de grandeur des contraintes sur les paramètres. En effet, si un de ces paramètres est plus grand

que les valeurs indiquées dans la table 4.7, un signal anormal plus grand que la précision de Cassini serait observé. Il est intéressant de comparer ces valeurs avec les contraintes obtenues en considérant la précession des périhélies planétaires obtenues à la table 4.6. La combinaison $\bar{\gamma}\epsilon/z^2$ est beaucoup mieux contrainte par une analyse de la précession des périhélies (ce qui est la même conclusion que pour le paramètre $\delta\beta$). Par contre, les données radioscience de Cassini donnent des contraintes beaucoup plus fortes que les éphémérides planétaires sur les deux combinaisons $\bar{\gamma}/z$ et p_1^2/z tandis que le dernier paramètre $(p_1\epsilon/z)$ est légèrement plus sensible aux données de Cassini qu'aux éphémérides.

Paramètre	$Max(Residus) < 10^{-14}$
$\frac{\bar{\gamma}}{z}$	3.65×10^{26} m^4
$\frac{\bar{\gamma}\epsilon^2}{z^2}$	1.15×10^{26} m^4
$\frac{p_1^2}{z}$	3.53×10^{8} m^2
$\frac{p_1\epsilon}{z}$	5.56×10^{-2} m

TABLE 4.7 – Estimation de l'incertitude atteignable par une analyse des données Cassini sur les paramètres apparaissant dans la métrique (4.40-4.42) provenant de la théorie tenseur scalaire John+George. Ces valeurs sont obtenues en comparant la valeur maximale du résidu Doppler généré par la théorie alternative avec la précision de Cassini (voir à la figure 4.14).

4.6.4 Simulations d'observables VLBI du système de Saturne

Finalement, nous avons effectué la même analyse concernant les observations VLBI autour de Saturne dans les théories de type tenseur-scalaire "John+George". La figure 4.15 représente les signatures incompressibles de cette théorie sur les observations VLBI de Saturne (l'ordre de grandeur utilisé pour les paramètres est l'ordre de grandeur obtenu par l'analyse des données radioscience de Cassini dans la phase de croisière). Comme nous pouvons le remarquer, l'observation de Saturne est propice pour tester cette théorie de la gravitation. En effet, l'ordre de grandeur des signatures produites est clairement du même ordre de grandeur que la précision VLBI. Par conséquent, la situation considérée ici permet une détermination des paramètres entrant dans la théorie "John+George" qui est compétitive par rapport à l'analyse des données radioscience de Cassini dans la phase de croisière (voir la table 4.7) et qui est (à part pour le paramètre $\bar{\gamma}\epsilon^2/z^2$) meilleure que les analyses des précessions des périhélies (voir la section 4.6.2).

Finalement, tout comme pour les autres théories considérées, voyons quelle est l'influence de la propagation de la lumière sur les signatures produites par la théorie "John+George". La figure 4.16 représente la différence entre les résidus obtenus en tenant compte de la modification de la gravitation partout (c'est-à-dire les résidus présentés à la figure 4.15) et les résidus obtenus en ne tenant pas compte de la modification de la gravitation dans la propagation de la lumière. Les courbes représentées à la figure 4.16 donnent donc une idée de la partie du signal résiduel qui provient de la modification de la gravitation sur la propagation de la lumière. En comparant attentivement les figures 4.15 et 4.16, nous pouvons remarquer que la totalité du signal incompressible est expliqué par la modification de la lumière. Ceci n'est pas surprenant étant donné que les contraintes provenant de l'analyse du périhélie de Saturne (voir à la table 4.6) sont très

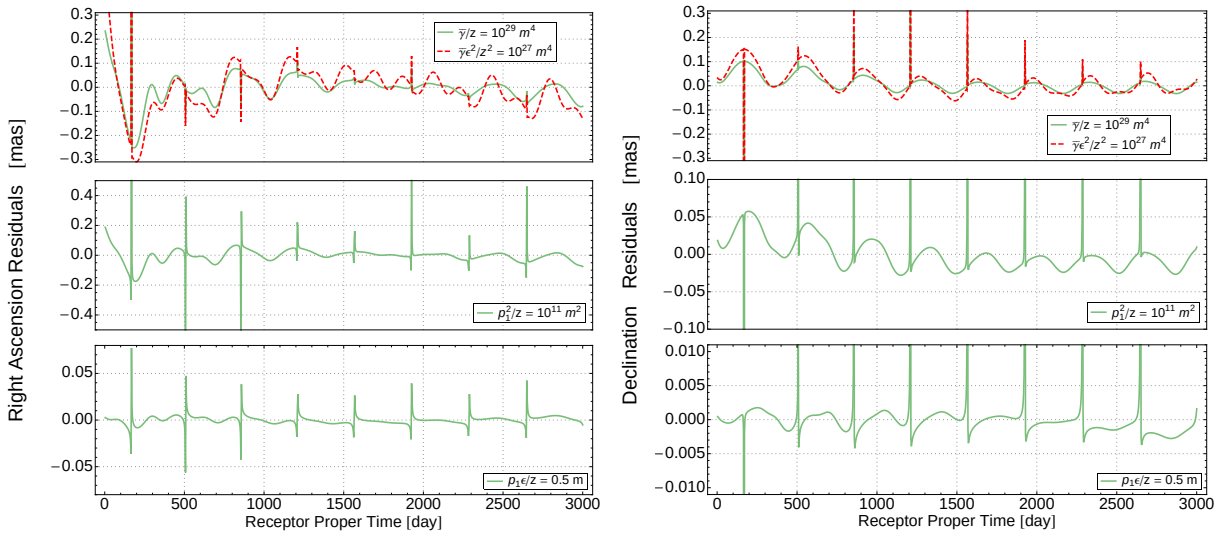

FIGURE 4.15 – Représentation des résidus en ascension droite (à gauche) et en déclinaison (à droite) obtenus dans le cadre d'une observation VLBI entre le système de Saturne et la Terre en considérant une théorie alternative de la gravitation de type tenseur-scalaire "John+George" avec un seul paramètre non-nul. La métrique relative à cette théorie est présentée aux relations (4.40-4.42). Ces courbes sont des templates de signaux qui doivent être cherchés dans les résidus d'une analyse standard en RG de données réelles. L'ordre de grandeur des paramètres considéré ici est semblable à l'ordre de grandeur obtenu par l'analyse des données radioscience de Cassini dans la phase de croisière.

mauvaises. Ceci nous donne donc une indication que la théorie "John+George" a une influence extrêmement faible sur la dynamique de Saturne (négligeable). Dès lors, le signal incompressible produit par cette théorie sur les analyses VLBI de Saturne provient de la propagation de la lumière comme cela est confirmé par la figure 4.16.

4.7 Ajout de Jupiter dans la simulation de Cassini

Comme nous l'avons mentionné dans la section 1.3 (et dans l'introduction de ce chapitre), la situation considérée dans la simulation en théorie alternative de la gravitation ne doit comporter que les éléments qui sont susceptibles de produire des déviations conséquentes. Autrement dit, dans la première étape du processus complet de l'analyse de données tel que proposé à la section 1.3, seuls les éléments qui produisent du signal au premier ordre doivent être considérés. De plus, il est clair que les situations considérées dans les simulations en théorie alternative et dans les dérivations du signal incompressible (soit dans les deux premières étapes du processus complet) doivent être identiques (dans le cas contraire, un signal parasite peut apparaître provoqué par la différence de situation considérée). Dans le cas de la simulation de Cassini dans sa période de croisière, nous avons donc considéré les éléments suivant : le Soleil, la Terre et Cassini. Il est légitime de se poser la question de savoir si cette modélisation est suffisante. Certes, dans une analyse réelle de données (telle que celle qui doit être effectuée à l'étape 3 du processus décrit à la section 1.3), il est impératif de tenir compte de toutes les perturbations présentes. Cependant, nous allons montrer que dans les étapes 1 et 2 ce n'est pas le cas. En particulier, nous allons

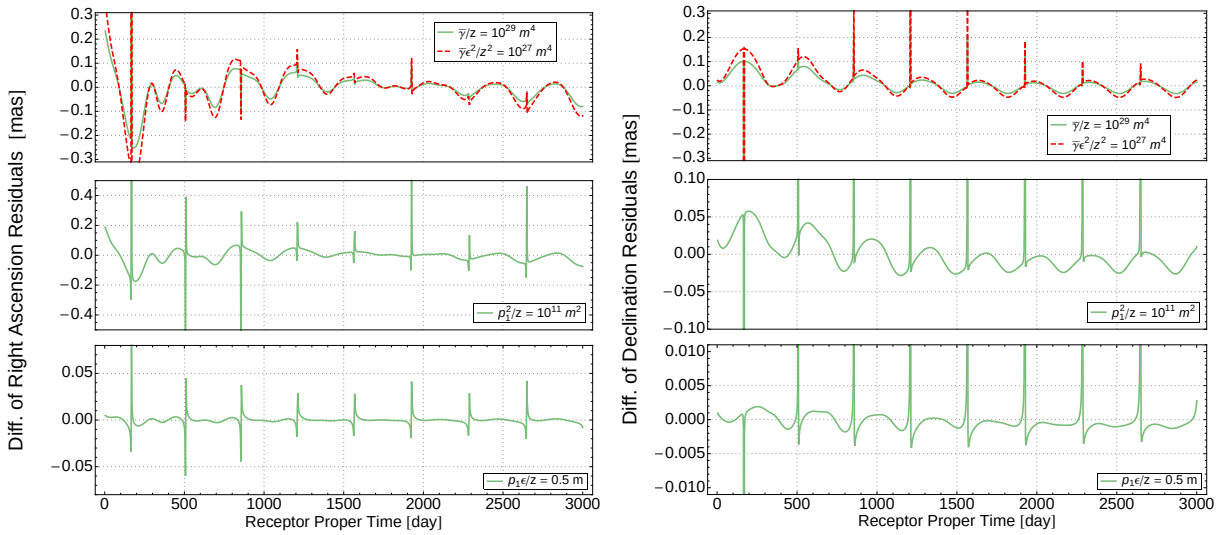

FIGURE 4.16 – Représentation de la différence des résidus en ascension droite (à gauche) et en déclinaison (à droite) obtenus avec et sans modification de la gravitation sur la propagation de la lumière. Cette différence de résidus est obtenue dans le cadre d'une observation VLBI entre le système de Saturne et la Terre en considérant une théorie alternative de la gravitation de type "John+George" dont la métrique est donnée par (4.40-4.42).

montrer ici que la plus grosse perturbation gravitationnelle attendue (la perturbation produite par la présence de Jupiter) ne modifie pas significativement la signature incompressible produite par des théories alternatives.

Nous avons donc ajouté la présence de Jupiter dans la simulation et dans l'ajustement qui permet de dériver la signature incompressible de la théorie alternative [6]. La figure 4.17 représente la différence entre les résidus obtenus en tenant compte de Jupiter dans le calcul et les résidus obtenus en ne tenant pas compte de la géante rouge dans le calcul (cette simulation est réalisée pour une théorie PEG caractérisée par une valeur de χ_1 non nulle). Si nous comparons les ordres de grandeur des courbes représentées sur les figures 4.3 et 4.17, nous pouvons conclure que l'ajout de Jupiter ne modifie pas la signature incompressible de plus de 5 %. Cette conclusion présentée ici uniquement pour le cas d'une théorie PEG caractérisée par un χ_1 non nul s'étend aux autres paramètres.

En conclusion, cette analyse rapide appuie le fait de considérer une situation simplifiée pour la dérivation des signatures incompressibles produites par des théories alternatives de la gravitation. En effet, une complexification des simulations ne modifie pas significativement les templates obtenus mais rend le problème plus compliqué à traiter (tant au niveau théorique qu'au niveau numérique).

6. Pour bien préciser les choses, il est clair que les conditions initiales de Jupiter ne sont pas ajustées. Les données Cassini sont de toute façon trop peu sensibles à ces conditions initiales pour espérer pouvoir ajuster quoi que ce soit.

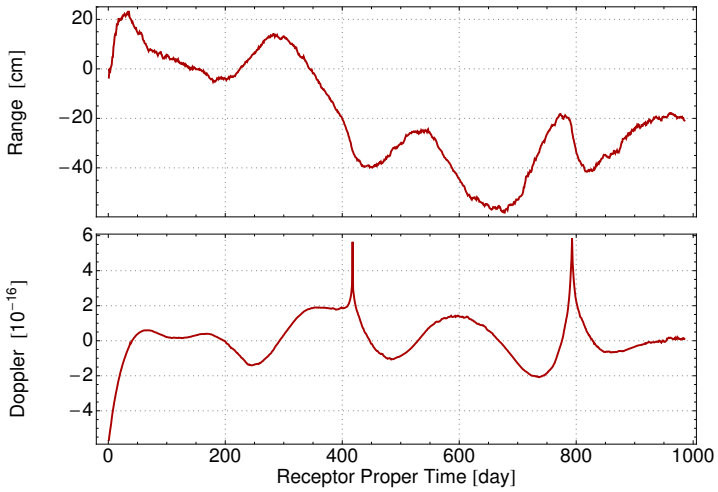

FIGURE 4.17 – Représentation de la différence des résidus Range (haut) et de Doppler (bas) entre des résidus calculés avec et sans la présence de Jupiter dans le cadre d'une théorie alternative PEG caractérisée par $\chi_1 = 10^{-21}\ m^{-1}$. L'ordre de grandeur de cette différence doit être comparé avec l'ordre de grandeur des résidus présentés à la figure 4.3 : la présence de Jupiter change les résidus de quelques % seulement.

4.8 Variation des paramètres lors de l'ajustement

Comme nous l'avons indiqué à la section 1.3, la procédure pour dériver les signatures incompressibles inclut un ajustement des conditions initiales des corps simulés et des masses des planètes. Dans cette section, nous allons brièvement présenter l'ordre de grandeur des variations de ces conditions initiales et des masses des planètes qui sont réalisées par l'ajustement.

Dans le cadre de la simulation des observables radioscience de Cassini, les conditions initiales de Cassini et de la Terre sont ajustées de même que la masse du Soleil. Pour illustration, nous allons donner l'ordre de grandeur des variations maximales de ces paramètres dans le cadre des ajustements réalisés dans PEG pour les valeurs des paramètres PEG présentés à la figure 4.4. La masse du Soleil varie de 10^{-9} en relatif, ce qui fait une variation maximale de l'ordre de 10^{21} kg. Les conditions initiales de la Terre varient au maximum de 10^{-9} en relatif, ce qui fait une variation de l'ordre de 100 m en position et de 10^{-5} m/s en vitesse. Finalement, les conditions initiales de Cassini varient de l'ordre de 10^{-8} en position, ce qui correspond à une variation maximale de 10 km et de 10^{-7} en vitesse, ce qui correspond à une variation maximale de l'ordre de 10^{-3} m/s.

Il ne faut pas interpréter ces variations en terme physique. Tout d'abord les coordonnées n'étant pas observables physiquement (c'est une conséquence de la covariance comme montré à la section 1.2.1), les différences de coordonnées ne représenteront rien d'interprétable. D'autre part, étant donné que la situation simulée est une situation simplifiée, il n'est pas évident que les conclusions que nous pouvons tirer ici en terme de variations de la masse du Soleil (par exemple) puissent être extrapolées à la situation réelle dans laquelle plus de corrélations pourraient apparaître. Les variations des paramètres ci-dessus ne sont donc données qu'à titre illustratif uniquement, dans un souci de complétude et à toutes fins utiles pour reproduire nos résultats.

4.9 Conclusion

Remarques générale sur la méthode et ses résultats : Dans ce chapitre, nous avons simulé des observations réalisées dans le Système Solaire dans des théories alternatives de la gravitation. Ces simulations sont effectuées en utilisant deux logiciels développés dans le cadre de cette thèse : le premier permet de simuler les observations à partir de la métrique de l'espace-temps (ce logiciel est présenté au chapitre 2) et le second permet de dériver à partir de ces simulations, la signature incompressible provoquée par une modification de la gravitation (ce logiciel est présenté au chapitre 3). Les théories alternatives de la gravitation considérées dans le cadre de cette thèse sont au nombre de quatre et sont présentées en détails au cours de ce chapitre.

Dans ce chapitre, nous avons considéré trois situations expérimentales différentes : des observations de type radioscience (Range et Doppler) entre la Terre et la sonde Cassini lorsque celle-ci était dans sa période de croisière entre Jupiter et Saturne et des observations de type VLBI de Saturne durant la période où Cassini orbitait autour de cette planète. D'autre part, nous avons également considéré une analyse des précessions des périhélies planétaires en dérivant théoriquement l'expression des précessions supplémentaires produites par les théories alternatives et en comparant ces expressions avec les contraintes fournies par Fienga et al. [2011].

L'ensemble des résultats présentés dans ce chapitre [7] sont nouveaux et sont le produit de cette thèse. Les résultats concernant l'analyse de la radioscience de Cassini pour les théories PEG et pour l'effet de champ externe sont publiés dans Hees et al. [2012b] tandis que les résultats concernant l'analyse de la radioscience de Cassini dans le cadre de la théorie "John+George" sont publiés dans Bruneton et al. [2012].

Avant de résumer les résultats obtenus, il faut préciser que les valeurs obtenues dans ce chapitre ne peuvent être interprétées comme des contraintes strictes sur les paramètres des différentes théories considérées. En effet, nous n'avons effectué que les deux premières étapes du processus complet qui permettrait de dériver de telles contraintes (le processus complet a été décrit à la section 1.3). Nous avons dérivé la signature incompressible provoquée par des théories alternatives et il faudrait maintenant rechercher cette signature dans les résidus de l'analyse des données réelles effectuée en RG. Ceci met notamment en avant une nécessité que les données de navigation des sondes spatiales (ou au moins les résidus des analyses effectuées) soient du domaine public pour pouvoir être utilisées à des fins scientifiques (ce qui n'est actuellement pas le cas.
Néanmoins, si les valeurs obtenues ne peuvent être interprétées strictement comme des contraintes sur les paramètres, elles donnent une idée réaliste de l'ordre de grandeur de ces contraintes. En effet, si les valeurs des paramètres sont un ordre de grandeur plus grand que les valeurs présentées dans les différentes tables de ce chapitre, cela signifie qu'une signature conséquente serait visible dans les résidus des données réelles. Si tel était le cas, cette signature aurait certainement été observée. En résumé, dans ce chapitre, nous avons fourni un certain nombre de templates de signatures de théories alternatives qui peuvent être recherchés dans les résidus des analyses de

7. A l'exception des contraintes de l'Effet de Champ Externe provenant de l'analyse des précessions des périhélies qui furent dérivées par Blanchet et Novak [2011b].

données réelles.
D'autre part, nous fournissons également un ordre de grandeur sur la valeur maximale que peuvent prendre les différents paramètres qui caractérisent les différentes théories considérées.

Nous allons maintenant résumer les résultats originaux obtenus pour les quatre théories considérées. Pour commencer, les figures 4.4, 4.11, 4.8, 4.13, 4.6, 4.9, 4.12 et 4.15 fournissent les templates des signatures incompressibles qui peuvent être recherchées dans les résidus des analyses de données réelles en RG pour les observations radioscience de Cassini dans sa phase de croisière et pour les observations VLBI effectuées autour de Saturne.

Cas de la théorie PEG : En ce qui concerne les théories PEG (présentées à la section 4.3.1), la précision atteignable sur les estimations des paramètres PEG par une analyse des données radioscience de Cassini sur la période de croisière est donnée à la table 4.2 (en supposant que la précision du Doppler de Cassini est de 10^{-14}). La comparaison de cette table avec la table donnant les contraintes atteignables par une analyse des précessions des périhélies planétaires (donnée à la table 4.1) permet de conclure que les observations radioscience sont prometteuses pour les paramètres qui entrent dans le potentiel ϕ_P (4.9b) du formalisme PEG (c'est-à-dire les paramètres $\delta\gamma$ et $\chi_{1,2}$). La valeur obtenue pour la contrainte sur γ est semblable à celle obtenue par l'analyse des données réelles par Bertotti et al. [2003]. Les autres valeurs donnent donc une idée de l'ordre de grandeur maximal que peuvent prendre les autres paramètres PEG. D'autre part, dans le cadre de PEG, nous avons montré que les observations VLBI autour de Saturne sont nettement moins prometteuses que les observations de radioscience. En effet, nous avons vu que pour tous les paramètres exceptés $\chi_{1,2}$, les signatures produites par PEG sont trop petites que être détectées. En ce qui concerne les paramètres $\chi_{1,2}$, il s'avère que les contraintes qu'on pourrait obtenir sur ces paramètres sont légèrement moins bonnes qu'en considérant la radioscience pendant la période de croisière de Cassini. Cependant, il est intéressant d'avoir plusieurs contraintes provenant de différentes situations sur les mêmes paramètres pour conforter la confiance que nous avons dans les résultats et dans cette optique, il peut être relativement intéressant de considérer une analyse des données VLBI autour de Saturne pour contraindre les paramètres χ_1 et χ_2. Finalement, dans le cadre des simulations de Saturne, nous avons montré à la figure 4.7 que les paramètres qui interviennent dans le potentiel ϕ_N (4.9a) de la théorie PEG ont une influence négligeable sur la propagation de la lumière. Ceci vient notamment conforter les résultats obtenus par les analyses des précessions des périhélies pour ces paramètres-là (car les éphémérides INPOP utilisées pour les analyses de précession des périhélies ne modélisent pas la contribution post-relativiste supplémentaire sur la propagation de la lumière).

Cas du MOND EFE : Dans les analyses réalisées concernant l'effet de champ externe provoqué par une théorie de type MOND (présenté à la section 4.4.1), nous avons montré que ni les observations radioscience de Cassini ni les observations VLBI autour de Saturne ne permettent de contraindre le paramètre Q_2 qui intervient dans la théorie. En effet, le domaine autorisé pour ce paramètre au vue de considérations théoriques est donné par la relation (4.23) et ne peut être amélioré par les observations considérées ici. D'autre part, les analyses de la précession des planètes réalisées par Blanchet et Novak [2011b] sont beaucoup plus performantes que les analyses des observations considérées ici. Finalement, nous avons montré dans le cadre de Saturne

que la modification de la théorie impliquée par l'EFE sur la propagation de la lumière n'influence pas du tout les observations réalisées. Ceci vient conforter les analyses des précessions planétaires qui ne considèrent implicitement pas les effets sur la lumière.

Cas de la théorie SME : Concernant l'Extension du Modèle Standard (présentée à la section 4.5.1), nous avons montré que l'analyse des données radioscience de Cassini fournirait des contraintes compétitives par rapport aux contraintes actuelles répertoriées par Kostelecký et Russell [2011]. Nous avons notamment montré comment il est possible de déterminer numériquement les combinaisons linéaires qu'il est possible de contraindre par les analyses considérées. En particulier, l'analyse des observations de radioscience de Cassini permet de contraindre les combinaisons linéaires données par les relations (4.35) à un niveau dont l'ordre de grandeur est donné par la table 4.5. L'analyse des données VLBI autour de Saturne fournit une détermination légèrement moins performante mais elle permet de mettre en évidence d'autres combinaisons linéaires données par les relations (4.37). Le fait d'avoir des combinaisons linéaires différentes des paramètres pour les observations radioscience et VLBI permet en pratique de lever une partie des dégénérescences des paramètres de la théorie. Ainsi, la diversification des contraintes sur les paramètres SME est relativement importante car elle permettra de lever les dégénérescences.
Nous avons également montré que la théorie SME produit des déviations qui se détectent essentiellement dans la dynamique orbitale et relativement peu sur la propagation des signaux électromagnétiques (à l'exception du paramètre $\bar{s}_E = \frac{\alpha}{M}(a_{\text{eff}})_T$).

Cas de la théorie "'John+George" : La dernière théorie considérée est une théorie tenseur-scalaire de type "John + George" (présentée à la section 4.6.1). Dans ce contexte, nous avons montré que les contraintes provenant de l'analyse des données radioscience de Cassini (dont l'ordre de grandeur est donné par la table 4.7) sont extrêmement compétitives par rapport aux contraintes provenant de l'analyse de la précession des périhélies (données par la table 4.6). La figure 4.13 représente le signal incompressible provoqué par cette théorie et il est intéressant de noter qu'il est particulièrement important lors des conjonctions. D'autre part, l'analyse des données VLBI fournit une précision légèrement moins bonne que dans le cadre des données radioscience sur la période de croisière mais du même ordre de grandeur. Il est donc intéressant de combiner les deux analyses pour ces théories. Enfin, la figure 4.16 montre que la signature produite par la théorie "John+George" provient essentiellement de la propagation de la lumière et très peu de la dynamique orbitale. Il faut donc prendre avec beaucoup de recul les contraintes obtenues par analyse de la précession des périhélies (mais, et ce n'est pas un hasard, elles sont ici moins bonnes que les observations des signaux lumineux).

Finalement, outre les conclusions détaillées ci-dessus, ce chapitre montre le type d'analyse qu'il est possible d'effectuer avec les logiciels développés dans le cadre de cette thèse. Il est évident que ce type d'analyse peut être répété pour d'autres situations physiques et d'autres théories alternatives de la gravitation ouvrant ainsi la porte à une grande diversité d'analyses possibles...

Chapitre 5

Etude des champs Caméléons

"Le caméléon croira toujours qu'il suffit de changer de forme pour échapper à tout."
F. Herbert

Sommaire

5.1 Introduction 117
5.2 Equations de champs 122
5.3 Contraintes cosmologiques 123
5.3.1 Equations d'évolution cosmologique 123
5.3.2 Distance Luminosité 126
5.3.3 Analyse de vraisemblance des donnés Supernovae 127
5.3.4 Evolution du champ scalaire 130
5.3.5 Evolution de l'expansion cosmique 134
5.3.6 Equation d'état du fluide effectif d'énergie noire 137
5.4 Contraintes du Système Solaire 140
5.4.1 Configuration sphérique et statique 141
5.4.2 Le mécanisme Caméléon 143
5.4.3 Profil du champ scalaire 145
5.4.4 Paramètres Post-Newtoniens 148
5.5 Conclusion 154

5.1 Introduction

Les champs caméléons font partie des théories qui présentent un mécanisme d'écrantage (*screening mechanism*). Un mécanisme d'écrantage signifie que la théorie alternative de la gravitation produit des modifications indétectables dans certaines conditions. Typiquement, ce type de mécanisme est invoqué pour expliquer les observations cosmologiques qui requièrent l'introduction d'énergie noire par une théorie alternative de la gravité. Ainsi, l'énergie noire est expliquée

par une modification de la théorie de la gravitation qui reste cachée à des échelles de l'ordre du Système Solaire. En effet, comme nous l'avons mentionné au chapitre 1, la théorie de la RG satisfait extrêmement bien les contraintes du Système Solaire et les contraintes des pulsars binaires. Ceci veut dire qu'une modification trop importante de la théorie de la gravité aurait déjà été détectée. Les mécanismes d'écrantage permettent de considérer des théories alternatives qui produisent des déviations relativement importantes dans un certain domaine d'application (la cosmologie par exemple) tandis que ces modifications sont pudiquement cachées dans un autre domaine d'application de la théorie (dans le Système Solaire). L'étude de ces mécanismes d'écrantage est relativement récent (depuis 2004). Dans la littérature, trois mécanismes d'écrantage sont généralement présentés [Khoury, 2010]

- le mécanisme caméléon [Khoury et Weltman, 2004a,b] : ce mécanisme apparaît dans des théories tenseur-scalaire de la gravité pour lesquelles le champ scalaire mime la densité locale de matière. L'évolution spatiale du champ scalaire dépend de la densité locale de matière. Plus précisément, le champ scalaire est massif dans des régions de haute densité tandis que le champ devient presque libre (c'est-à-dire de faible masse) dans des régions de faible densité. Le fait que le champ scalaire soit très massif dans les régions de haute densité implique notamment que celui-ci se retrouve gelé dans son potentiel de self-interaction et son influence devient donc négligeable, ce qui signifie que le champ scalaire est écranté dans les régions de haute densité (par exemple dans le Système Solaire).
- le mécanisme symétron [Hinterbichler et Khoury, 2010; Hinterbichler et al., 2011] : ce mécanisme apparaît dans des théories tenseur-scalaire de la gravité dans lesquelles apparaît une brisure spontanée de symétrie pour le champ scalaire. Plus précisément, ce mécanisme apparaît en considérant un potentiel de self-interaction quartique de type $V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4$. La théorie est donc invariante sous une symétrie $\mathcal{Z}_2$. L'évolution du champ scalaire dépend d'un potentiel effectif dont l'expression dépend de la densité locale de matière ρ. Une brisure spontanée de symétrie se produit alors à faible densité. En effet, la VEV (*vacuum expectation value*) du champ scalaire est 0 dans des régions de haute densité et est différent de 0 dans des régions de faible densité. Or, on peut montrer que si on considère une fonction de couplage qui soit également invariante sous $\mathcal{Z}_2$, le couplage du champ scalaire à la matière est (au premier ordre) proportionnel à la VEV du champ scalaire. Le champ scalaire est donc découplé dans les situations où la symétrie n'est pas brisée (ce qui se produit dans les régions de haute densité) tandis que le couplage apparaît lorsque la symétrie est brisée. Le champ scalaire ne s'observe donc pas dans les régions de haute densité de matière (car il est découplé).
- le mécanisme de Vainshtein [Vainshtein, 1972] : ce mécanisme fut étudié pour la première fois dans le contexte de théories massives de la gravitation (le graviton possède alors une masse m_g). Dans ces théories, il a été montré que dans le cadre de l'approximation linéaire de la théorie de la gravitation, la limite $m_g \to 0$ présente une discontinuité (connue sous le nom de discontinuité de van Dam-Veltman-Zakharov (vDVZ) [van Dam et Veltman, 1970; Zakharov, 1970]). Cette discontinuité est liée au fait qu'un graviton massif possède 5 degrés de liberté (aussi petite que soit sa masse) alors qu'un graviton strictement sans masse ne possède que deux degrés de liberté. Cette différence produit donc des prédictions sensiblement différentes pour les deux théories même si la masse du graviton tend vers 0. En particulier, il a été montré que si on se contente de cette analyse au niveau linéaire de la théorie, les théories massives présentent une déviation trop importante par rapport à

la RG que pour satisfaire les contraintes du Système Solaire [Zakharov, 1970]. Cependant, Vainshtein [1972] a montré que l'approximation linéaire de la théorie n'est plus valide dans un certain domaine lorsque la masse du graviton m_g devient petite. Plus précisément, si on considère une masse sphérique et statique de masse M, l'approximation linéaire de la théorie de la gravitation massive n'est plus valide pour des rayons plus petits que $r_V = \frac{(r_s m_g)^{1/5}}{m_g}$ où r_s est le rayon de Schwarszchild du corps central [1]. Cela signifie qu'à des distances plus grande que r_V, la théorie linéaire est valide et on peut noter une déviation significative par rapport à la théorie de la RG (à cause de la discontinuité vDVZ). Par contre, Vainshtein [1972] a montré que pour des distances inférieures, l'approximation linéaire n'est plus valide et qui plus est, la théorie peut tendre vers la RG [voir aussi Deffayet et al., 2002]. Nous avons donc ici un mécanisme d'écrantage étant donné que la théorie tend vers la RG à "courtes" distances mais présente des déviations à larges distances. Si on prend la limite expérimentale sur la masse du graviton [Beringer et al., 2012] $m_g < 7 \times 10^{-32} eV$, on trouve un rayon de Vainshtein $r_V \sim 10^{20}$m. Ceci veut dire que sous cette distance (le Système Solaire a une taille bien plus petite), la théorie massive de la gravitation se comporte comme la RG.

Dans le cadre de cette thèse, le premier des mécanismes ci-dessus (le mécanisme caméléon) a été étudié en détails. En particulier, nous avons étudié deux régimes distincts des théories caméléons : le régime dans le cadre du Système Solaire et le régime cosmologique. Dans ces deux cas, nous avons comparé les prédictions théoriques avec les données expérimentales pour dériver les régions de confiance des paramètres qui sont en adéquation avec les observations. Nous allons maintenant développer les bases théoriques nécessaires dans la suite du travail.

Avant de nous pencher sur les champs caméléons, rappelons comment furent historiquement introduits les théories tenseur-scalaire. Les premières théories tenseur-scalaires furent introduites par Jordan [1949]; Brans et Dicke [1961] et Thiry dans le but de rétablir le principe de Mach. Une façon relativement simple de construire ces théories est de partir de l'action d'Einstein-Hilbert (sans constante cosmologique car le champ scalaire que nous allons ajouter jouera le rôle de constante cosmologique)

$$S_{RG} = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_{\rm mat}[g_{\mu\nu}, \Psi_m] \tag{5.1}$$

où Ψ_m représente les champs de matière et d'élever la constante gravitationnelle G au rang de variable dynamique. Globalement, cela revient à poser $\Phi = \frac{1}{G}$. Il faut alors ajouter un terme cinétique pour ce nouveau champ scalaire et l'action dite de Brans-Dicke s'écrit

$$S = \frac{c^4}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\Phi R - \frac{\omega}{\Phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \right] + S_{\rm mat}[g_{\mu\nu}, \Psi_m] \tag{5.2}$$

où ω (qui est un paramètre sans dimension) est un paramètre libre de la théorie. Nous pouvons généraliser cette action en considérant que le paramètre ω est une fonction du champ scalaire Φ et en ajoutant un terme de self-interaction pour le champ additionnel. Nous obtenons alors

1. Nous avons posé $\hbar = c = 1$ dans cette expression mais pour rétablir les unités, il suffit de remarquer que $\frac{cm_g}{\hbar}$ a les dimensions de l'inverse d'une longueur.

l'action

$$S = \frac{c^4}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\Phi R - \frac{\omega(\Phi)}{\Phi}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - U(\Phi)\right] + S_{\rm mat}[g_{\mu\nu},\Psi_m]. \tag{5.3}$$

Il ne s'agit ici que d'un exemple très simple de théorie tenseur-scalaire qui est construit directement en élevant la constante gravitationnelle au rang de variable dynamique. Ceci conduit directement à une violation du principe d'équivalence fort [Füzfa et Alimi, 2009]. L'action ci-dessus est exprimée en représentation de Jordan (*Jordan Frame*). La représentation de Jordan est caractérisée par le fait que la matière est minimalement couplée à la métrique. Il est possible de montrer qu'une transformation conforme (qui correspond physiquement à un changement d'échelle des unités [Dicke, 1962]) du type

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{G_*\Phi}g^*_{\mu\nu} \tag{5.4}$$

(où G_* est la constante de gravitation en représentation d'Einstein) associée à une redéfinition appropriée du champ scalaire

$$A^2(\phi) = \frac{1}{G_*\Phi} \tag{5.5}$$

avec

$$k(\phi) = \frac{d\ln A(\phi)}{d\phi} = \frac{1}{2\sqrt{3+2\omega(\Phi)}} \tag{5.6}$$

et une redéfinition du potentiel de self-interaction permet de réécrire l'action sous une forme standard [voir par exemple Dicke, 1962; Damour et al., 1990; Damour et Esposito-Farese, 1992; Füzfa et Alimi, 2009; Flanagan, 2004]

$$S = \int d^4x\sqrt{-g_*}\left[\frac{m_p^2}{16\pi}R_* - \frac{m_p^2}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\right] + S_{\rm mat}\left[A^2(\phi)g^*_{\mu\nu},\Psi_m\right] \tag{5.7}$$

où m_p est la masse de Planck en représentation d'Einstein (donnée par $m_p^2 = 1/G_*$ conformément à la relation (7)) [2]. Cette action est exprimée en représentation d'Einstein (*Einstein frame*). La représentation d'Einstein est caractérisée par le fait que l'action fait apparaître un terme identique à celui de l'action d'Einstein-Hilbert. Ceci signifie entre autre que les propagateurs du graviton et du champ scalaire sont découplés dans cette représentation. Les calculs se font généralement plus aisément dans cette représentation. Par contre, il faut être prudent car la matière est non-minimalement couplée (dans cette représentation) ce qui signifie que les observables ne se dérivent plus comme en RG. Par exemple, les masses tests ne suivent pas les géodésiques de la métrique en représentation d'Einstein $g^*_{\mu\nu}$ [Dicke, 1962; Füzfa et Alimi, 2009]. Néanmoins, la physique ne peut être dépendante d'un choix de variables et par conséquent, les deux représentations doivent fournir les mêmes prédictions physiques [voir par exemple Flanagan, 2004]. Dans la suite, les quantités exprimées en représentation d'Einstein seront notées avec des étoiles. Le lien entre la métrique en représentation de Jordan et de Einstein est donc donné par

$$g_{\mu\nu} = A^2(\phi)g^*_{\mu\nu}. \tag{5.8}$$

2. Cette dernière action et la définition de la masse de Planck sont données dans des unités géométriques caractérisées par $\hbar = c = 1$. Ces unités seront utilisées pour l'analyse des champs caméléons au chapitre 5. En particulier, on peut voir que l'action est correcte d'un point de vue dimensionnel : le scalaire de courbure a une dimension de l'inverse d'une longueur au carré ou encore des unités de GeV^2, m_p a des unités de GeV et $\partial_\mu\phi$ a également la dimension d'une inverse de longueur ou des unités de GeV. Il faut donc que le potentiel ait une unité de GeV^4 pour que l'action soit cohérente au point de vue des unités.

Dans le cas de théories non-massives (c'est-à-dire dont le potentiel $V(\phi)$ est négligeable), les théories décrites par l'action précédente sont extrêmement contraintes au niveau linéaire. En effet, on peut montrer que le paramètre Post-Newtonien γ dépend directement de la constante de couplage linéaire de la théorie

$$k(\phi) = \frac{d \ln A(\phi)}{d\phi} = \frac{1}{A(\phi)} \frac{dA(\phi)}{d\phi} \tag{5.9}$$

qui est fortement contrainte par les expériences dans le Système Solaire. En particulier, nous rappelons à la section 5.4 que la contrainte Cassini sur γ implique (dans le cas d'une théorie non massive) la contrainte $k^2 < 10^{-5}$.

Nous pouvons donc maintenant nous attaquer au mécanisme caméléon qui apparaît dans des théories tenseur-scalaire massives. Ce mécanisme permet une réduction effective de la constante de couplage k dans certaines conditions, ce qui permet alors de passer les tests du Système Solaire. Ceci permet de considérer des théories dont la constante de couplage est de l'ordre de l'unité (ce qui est requis dans les théories $f(R)$ par exemple) qui sont exclues dans les théories non-massives. Ce mécanisme fut introduit par Khoury et Weltman [2004a,b] dans le but d'expliquer les observations cosmologiques par une théorie alternative dont les déviations sont cachées à l'échelle du Système Solaire. Le modèle considéré dans ce travail est le modèle original utilisé par Khoury et Weltman [2004a,b] : une théorie dont l'action est donnée par (5.7) avec une fonction de couplage exponentielle $A(\phi) = e^{k\phi}$ et un potentiel Ratra-Peebles [Ratra et Peebles, 1988]

$$V(\phi) = \frac{\Lambda^{\alpha+4}}{m_p^{\alpha} \phi^{\alpha}} \tag{5.10}$$

utilisé pour des raisons cosmologiques.

Cette théorie fut proposée initialement par Khoury et Weltman [2004a,b] avec pour but d'expliquer l'accélération de l'expansion cosmique sans introduction de fluide d'énergie sombre tout en satisfaisant les contraintes du Système Solaire. L'étude des champs caméléons fait l'objet d'un chapitre à part entière car contrairement aux autre théories considérées dans le chapitre 4, la métrique pour le Système Solaire n'est pas connue. Par conséquent, il y a un travail théorique nécessaire pour passer de l'action de la théorie (5.7) à l'expression de la métrique. Ce travail sera présenté dans ce chapitre. D'autre part, les théories de type caméléons ayant été développées pour des raisons cosmologiques (l'idée étant d'expliquer l'accélération de l'expansion cosmique par une théorie alternative), il est intéressant de compléter l'analyse du Système Solaire par une analyse cosmologique plus approfondie. Nous commencerons donc par présenter une étude de l'évolution cosmologique des champs caméléons et une analyse des données Supernovae Ia qui nous a permis de dériver des régions de confiance pour les paramètres qui caractérisent ces théories. Ensuite, nous nous attaquerons à une analyse des champs caméléons au niveau du Système Solaire. En particulier, nous dériverons la métrique qui s'y rapporte et nous dériverons les régions des paramètres admissibles par les observations réalisées dans le Système Solaire. En combinant ces deux analyses, nous pourrons répondre à la question suivante : est-ce que les champs caméléons sont en mesure d'expliquer l'expansion cosmique (sans introduire d'énergie sombre) tout en satisfaisant les contraintes du Système Solaire ? Ce chapitre est basé sur la publication correspondante [Hees et Füzfa, 2012] à laquelle ce travail a mené [3].

3. Pour des raisons de facilité, dans ce chapitre, nous travaillerons avec des unités géométriques caractérisées par $\hbar = c = 1$.

5.2 Equations de champs

Tout d'abord, nous allons dériver les équations de champs qui dérivent de l'action (5.7). Ces équations pourront alors être utilisées dans les contextes de la cosmologie et du Système Solaire. La variation de l'action (5.7) par rapport à la métrique donne les équations d'Einstein modifiées

$$R^*_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^*_{\mu\nu}R^* = \frac{8\pi}{m_p^2}T^*_{\mu\nu} + 8\pi\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - 4\pi g^*_{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - \frac{8\pi}{m_p^2}g^*_{\mu\nu}V(\phi) \tag{5.11}$$

où $T^*_{\mu\nu} = -(2/\sqrt{-g^*})(\partial\mathcal{L}_{\rm mat}\sqrt{-g^*}/\partial g_*^{\mu\nu})$ est le tenseur énergie-impulsion en Einstein frame.

La variation de l'action (5.7) par rapport au champ scalaire donne l'équation de Klein-Gordon pour le champ scalaire

$$\Box\phi = -\frac{k(\phi)}{m_p^2}T^* + \frac{1}{m_p^2}\frac{dV}{d\phi} \tag{5.12}$$

où $T^* = g_*^{\mu\nu}T^*_{\mu\nu}$ est la trace du tenseur énergie-impulsion, $\Box\phi = g_*^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi$ et $k(\phi)$ est le couplage scalaire à la matière.

Finalement, l'invariance de l'action (5.7) sous les transformations de coordonnées conduit aux équations de conservation dans l'Einstein frame (qui se dérivent également par combinaison des équations (5.11) et (5.12))

$$\nabla_\mu T_*^{\mu\nu} = k(\phi)T^*\partial^\nu\phi. \tag{5.13}$$

Dans la suite, nous considérerons toujours que la matière est décrite par un fluide parfait. Par conséquent, le tenseur énergie-impulsion s'exprime par

$$T_*^{\mu\nu} = (\rho_* + p_*)u_*^\mu u_*^\nu + p^* g_*^{\mu\nu} \tag{5.14}$$

où ρ_* et p_* sont les densité et pression en Einstein frame et u_*^μ est la quadri-vitesse du fluide. Comme on peut l'observer par la relation (5.13), ce tenseur énergie-impulsion n'est pas conservé en Einstein frame à cause du couplage explicite entre la matière et le champ scalaire. Par contre, le tenseur énergie-impulsion en Jordan frame est conservé car les champs de matière sont minimalement couplés à la métrique Jordan $g_{\mu\nu}$. De plus, la Jordan frame est définie comme étant la frame dans laquelle la matière ressent localement les lois de la relativité restreinte. Les densité et pression Jordan frame (ρ et p) sont donc conservées comme en RG. Le tenseur énergie-impulsion observable (Jordan frame) est lié à son équivalent en Einstein frame par un facteur conforme [Brans et Dicke, 1961; Damour et Esposito-Farese, 1992; Damour et Nordtvedt, 1993a]

$$\begin{aligned} T_{*\ \nu}^{\mu} &= A^4(\phi)T^{\mu}{}_{\nu} = A^4(\phi)(\rho + p)u^\mu u_\nu + A^4(\phi)p\delta^\mu_\nu \\ &= A^4(\phi)(\rho + p)u_*^\mu u_\nu^* + A^4(\phi)p\delta^\mu_\nu. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Ceci implique les relations suivantes entre les densités et pression en Einstein et Jordan frame

$$\rho_* = A^4(\phi)\rho \tag{5.16a}$$

$$p_* = A^4(\phi)p. \tag{5.16b}$$

5.3 Contraintes cosmologiques

Rappelons que la théorie caméléon dérive de l'action (5.7) écrite en Einstein frame. Les équations de champs dérivant de cette action sont données par (5.11-5.12). Dans cette section, nous allons écrire les équations de Friedman-Lemaître correspondant à cette théorie. Nous ferons particulièrement attention quant à l'utilisation de quantités exprimées en Jordan frame par rapport à celles exprimées en Einstein frame. En particulier, nous utiliserons la densité et la pression Jordan frame dans le terme source des équations de champs. Ensuite, dans la section 5.3.2, nous dériverons la relation qui donne la distance-luminosité et nous montrerons que cette relation est indépendante de la frame utilisée (démontrant par conséquent l'équivalence physique des deux frames). Cette relation nous permettra ensuite de faire des prédictions cosmologiques. Nous présenterons alors dans la section 5.3.3 une analyse de vraisemblance des dernières données des Supernovae Ia (ces donnés sont présentées à la section 1.4.2). Cette analyse étend des analyses similaires effectuées en quintessence (qui est un cas limite de notre modèle pour lequel la constante de couplage s'annule $k = 0$) et permet d'identifier le domaine des paramètres statistiquement consistant avec les données. Le reste de la section concerne une étude détaillée de la dynamique des modèles dans la région de confiance des données Supernovae. Pour commencer, nous avons étendu le travail de Brax et al. [2004] concernant l'étude de la dynamique du champ scalaire ϕ en identifiant clairement les éléments qui gouvernent son évolution. Finalement, nous proposons une analyse originale de l'expansion cosmique dans les modèles en accord avec les données. Dans cette analyse, les contributions du potentiel de quintessence et du couplage non-minimal sont clairement identifiées et comparées. Finalement, nous avons interprété les champs caméléons en RG avec un fluide parfait avec une équation d'état qui varie. Ici encore, les contributions de quintessence et de couplage non-minimal seront identifiées.

5.3.1 Equations d'évolution cosmologique

Si on suppose que l'univers peut être décrit par un espace-temps plat de type Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [4], nous pouvons écrire la métrique Einstein frame sous la forme suivante

$$ds_*^2 = -dt_*^2 + a_*^2(t_*)d\ell^2 = a_*^2(t_*)(-d\eta^2 + d\ell^2) \tag{5.17}$$

où $a_*(t)$ est le facteur d'échelle cosmique exprimé en Eintein frame, t_* est le temps cosmique en Einstein frame et η est le temps conforme (il est aisé de voir que le temps conforme est le même dans les deux frames) défini par

$$d\eta = \frac{dt_*}{a_*} = \frac{dt}{a}. \tag{5.18}$$

La métrique correspondante en Jordan frame s'écrit en utilisant la relation (5.8)

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + a^2(t)d\ell^2 = A^2(\phi)ds_*^2 \\ &= -A^2(\phi(t_*))dt_*^2 + A^2(\phi(t_*))a_*^2(t_*)d\ell^2. \end{aligned} \tag{5.19}$$

4. l'espace-temps de FLRW est justifié par le principe cosmologique tandis que le fait de travailler avec l'espace plat est justifié par le fait que les observations montrent que $\Omega_{k0} \sim 0$ comme indiqué à la section 1.4.1.

Le temps cosmique observable t (il s'agit du temps propre d'un observateur comobile avec le fluide cosmologique) et le facteur d'échelle cosmique observable a s'obtiennent des dernières relations

$$dt = A(\phi(t_*))dt_* \tag{5.20a}$$
$$a(t) = A(\phi(t_*))a(t_*)\cdot \tag{5.20b}$$

En remplaçant la métrique (5.17) dans les équations de champs en Einstein frame (5.11) et en utilisant l'expression du tenseur énergie-impulsion donné par la relation (5.15), nous obtenons les équations de Friedmann et d'accélération

$$\left(\frac{a'_*}{a_*}\right)^2 = \frac{4\pi}{3}\phi'^2 + \frac{8\pi}{3m_p^2}a_*^2V(\phi) + \frac{8\pi}{3m_p^2}a_*^2A^4(\phi)\rho \tag{5.21a}$$
$$\frac{a''_*}{a_*} = -\frac{4\pi}{3}\phi'^2 + \frac{16\pi}{3m_p^2}a_*^2V(\phi) + \frac{4\pi}{3m_p^2}a_*^2A^4(\phi)(\rho - 3p) \tag{5.21b}$$

où le $'$ dénote une dérivation par rapport au temps conforme η et où ρ et p sont les densité et pression observables pour les fluides cosmologiques. L'équation de Klein-Gordon (5.12) quant à elle devient

$$\phi'' + 2\frac{a'_*}{a_*}\phi' = -\frac{k(\phi)}{m_p^2}a_*^2A^4(\phi)(\rho - 3p) - \frac{a_*^2}{m_p^2}\frac{dV}{d\phi}. \tag{5.22}$$

Finalement, l'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion (5.13) donne

$$\rho'_* + 3\frac{a'_*}{a_*}(\rho_* + p_*) = k(\phi)\phi'(\rho_* - 3p_*). \tag{5.23}$$

Si on introduit l'équation d'état

$$\omega = \frac{p_*}{\rho_*} = \frac{p}{\rho}, \tag{5.24}$$

et si on remplace les densité et pression Einstein frame par leur équivalent en Jordan frame (5.16), l'équation de conservation (5.23) devient

$$(A(\phi)a_*)^{3(1+\omega)}\rho = \rho_0 \tag{5.25}$$

où l'indice 0 fait référence à l'époque actuelle caractérisée par $a_0 = A(\phi_0)a_0^* = 1$. A partir de la dernière équation, nous pouvons remarquer que le tenseur énergie-impulsion en Jordan frame est conservé car nous avons retrouvé l'expression de conservation traditionnelle $a^{3(1+\omega)}\rho = cst$.

Nous pouvons maintenant introduire les paramètres de densité observables définis par

$$\Omega = \frac{8\pi G\rho}{3H^2} \tag{5.26}$$

où H est le paramètre de Hubble observable défini par

$$H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \tag{5.27}$$

et G est la constante de couplage gravitationnelle effective qui devient variable et qui est lié à la constante gravitationnelle en Einstein frame par [Damour et al., 1990]

$$G = A^2(\phi)G_* = \frac{A^2(\phi)}{m_p^2} \tag{5.28}$$

(ceci se dérive également de l'équation (5.5) où pour rappel $\Phi = \frac{1}{G}$).

En remplaçant ρ_0 dans la relation de conservation (5.25) par sa valeur dérivée de l'équation (5.26), nous trouvons

$$\rho = \frac{3m_p^2 H_0^2 \Omega_0}{8\pi A^2(\phi_0)(A(\phi)a_*)^{3(1+\omega)}}. \tag{5.29}$$

Nous pouvons maintenant utiliser l'équation d'état (5.24) et l'expression de ρ (5.29) dans les équations de Friedmann, d'accélération et de Klein-Gordon (5.21-5.22). Si nous introduisons deux composantes de matière dans l'Univers : de la matière sans pression (qui représente la matière baryonique ordinaire et la matière noire) caractérisée par $\omega_m = 0$ et la radiation caractérisée par $\omega_r = \frac{1}{3}$, nous pouvons réécrire les équations d'évolution cosmologique sous la forme

$$\left(\frac{a_*'}{a_*}\right)^2 = \frac{H_0^2}{A^2(\phi_0)}\left[\frac{\Omega_{m0}A(\phi)}{a_*} + \frac{\Omega_{r0}}{a_*^2}\right] + \frac{4\pi}{3}\phi'^2 + \frac{8\pi}{3m_p^2}a_*^2 V(\phi) \tag{5.30a}$$

$$\frac{a_*''}{a_*} = \frac{H_0^2}{A^2(\phi_0)}\frac{\Omega_{m0}A(\phi)}{2a_*} - \frac{4\pi}{3}\phi'^2 + \frac{16\pi}{3m_p^2}a_*^2 V(\phi) \tag{5.30b}$$

$$\phi'' = -\frac{3k(\phi)}{8\pi}\frac{H_0^2}{A^2(\phi_0)}\frac{\Omega_{m0}A(\phi)}{a_*} - 2\frac{a_*'}{a_*}\phi' - \frac{a_*^2}{m_p^2}\frac{dV}{d\phi}. \tag{5.30c}$$

A ce stade, quelques commentaires sont nécessaires. Tout d'abord, ces équations dépendent de plusieurs paramètres : la valeur actuelle des paramètres de densité Ω_{m0} et Ω_{r0}, la valeur actuelle du paramètre de Hubble H_0, la fonction de couplage $A(\phi)$ (dans notre cas une fonction exponentielle paramétrisée par la constante de couplage k) et le potentiel $V(\phi)$ (paramétrisé par les constantes Λ et α). Les équations cosmologiques correspondant à la quintessence sont retrouvées dans le cas d'un couplage constant ($A(\phi) = 1$ et $k(\phi) = 0$) [Alimi et al., 2010]. Les équations ci-dessus sont cependant légèrement différentes par rapport à ce qu'il est possible de trouver dans la littérature [par exemple dans Brax et al., 2004; Gannouji et al., 2010] car nous avons décidé de travailler avec des densités et pressions définies en Jordan frame (qui sont directement interprétables comme des quantités mesurables) en suivant les travaux de Damour et Nordtvedt [1993a]; Damour et Esposito-Farese [1993]; Damour et Esposito-Farèse [1996] et de Babichev et Langlois [2010] alors que la plupart des articles sur les caméléons utilisent une densité hybride (notée $\bar{\rho}$) qui est conservée en Einstein frame si on considère de la matière (caractérisée par $\omega = 0$) au niveau cosmologique et qui est reliée à la densité Einstein frame (ρ_* non conservée à cause du couplage du champ scalaire à la matière comme cela peut s'observer sur la relation (5.13)) ou à la densité Jordan frame (ρ conservée en Jordan frame) [Khoury et Weltman, 2004b,a; Brax et al., 2004; Gannouji et al., 2010] :

$$\bar{\rho} = A^{-1}(\phi)\rho_* = A^3(\phi)\rho\cdot \tag{5.31}$$

En principe, toutes les définitions de la densité de matière pourraient être utilisées dans le terme de source dans les équations de champs. Néanmoins d'un point de vue interprétatif, l'utilisation de la densité Jordan frame ρ est justifiée car les quantités Jordan frame sont interprétées comme en RG car la métrique $g_{\mu\nu}$ est couplée universellement aux champs de matière et donc les lois locales sont celles de la Relativité Restreinte. De plus, l'équation de conservation de $\bar{\rho}$ défini par (5.31) n'est pas robuste car elle dépend des symétries du principe cosmologique (et même ainsi,

elle n'est valide que pour la matière sans pression) tandis que les quantités en Jordan frame sont conservées dans n'importe quelles circonstances et peuvent être utilisées également dans l'étude du Système Solaire.

5.3.2 Distance Luminosité

Les chandelles SNe Ia nous fournissent une mesure de la distance luminosité $d_L(z)$ en fonction du redshift observable z (voir à la section 1.4.2). Cette distance luminosité s'obtient aisément en Jordan frame. Néanmoins, pour illustrer le fait que les observables peuvent aussi se dériver en Einstein frame, nous allons dériver l'expression de d_L dans les deux frames. Ceci montrera que les observables sont bien indépendantes de frame (comme il se doit).

En Jordan frame, la distance luminosité s'exprime comme en RG (voir la relation (1.22) avec $\Omega_{k0} = 0$)

$$d_L(z) = (1+z)\int_0^z \frac{dy}{H(y)} \tag{5.32}$$

où $z = 1/a - 1$ est le redshift cosmologique observable. Finalement, le module de distance est défini par

$$\mu = 25 + 5\log\left(\frac{d_L}{1\text{ Mpc}}\right). \tag{5.33}$$

Si nous voulons exprimer la même quantité en Einstein frame, nous devons introduire la distance luminosité en Einstein frame d_L^*

$$d_L^*(z_*) = (1+z_*)\int_0^{z_*} \frac{dy}{H_*(y)} \tag{5.34}$$

où $z_* = 1/a_* - 1$ et H_* est le paramètre de Hubble en Einstein frame

$$H_* = \frac{1}{a_*}\frac{da_*}{dt} = \frac{a_*'}{a_*^2}. \tag{5.35}$$

Dans l'Einstein frame, les unités physiques sont multipliées par un facteur $A(\phi)$ [Dicke, 1962]. Pour cette raison, le module de distance observable est donné par

$$\mu_* = 25 + 5\log\left(\frac{d_L^*}{A(\phi)\times 1\text{ Mpc}}\right). \tag{5.36}$$

Il est alors aisé de montrer l'équivalence entre les deux expressions (5.33) et (5.36). Pour ce faire, il faut substituer $1 + z_* = 1/a_*$, $H_* = \frac{a_*'}{a_*^2}$ et $dz_* = -\frac{da_*}{a_*^2}$ dans (5.34) pour obtenir

$$d_L^*(z_*) = -\frac{1}{a_*}\int_{a_0^*}^{a_*}\frac{da_*}{a_*^2 H_*} = -\frac{1}{a_*}\int_{\eta_0}^{\eta} d\eta = \frac{\eta_0 - \eta}{a_*}, \tag{5.37}$$

et par conséquent

$$\mu_* = 25 + 5\log\left(\frac{\eta_0 - \eta}{A(\phi)a_*}\right) \tag{5.38}$$

(si η qui est le temps conforme défini à la relation (5.18) est exprimé en Mpc, ce qui est possible étant donné que $c\eta$ a les dimensions d'une longueur).

D'autre part, en utilisant le fait que $dt = ad\eta$, nous pouvons exprimer le paramètre de Hubble par

$$H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \frac{a'}{a^2}. \tag{5.39}$$

La substitution de cette relation et l'utilisation de l'expression $dz = -\frac{da}{a^2}$ nous permet de réécrire la relation (5.32) sous la forme

$$d_L(z) = -\frac{1}{a}\int_{a_0}^{a}\frac{da}{a^2 H} = -\frac{1}{a}\int_{\eta_0}^{\eta} d\eta = \frac{\eta_0 - \eta}{a}. \tag{5.40}$$

Finalement, le module de distance (5.36) est donné sans ambiguité par

$$\mu = 25 + 5\log\left(\frac{\eta_0 - \eta}{a}\right) = 25 + 5\log\left(\frac{\eta_0 - \eta}{A(\phi)a_*}\right) \tag{5.41}$$

avec η exprimé en Mpc. La relation (5.20b) montre que la dernière expression est équivalente à l'équation (5.38). Ceci montre l'équivalence physique entre les deux frames et donne une formule utile pour calculer le module de distance sans ambiguité provenant du choix de la frame. Le module de distance peut alors être évalué par l'intégration des équations cosmologiques (5.30) qui donne l'évolution de a_* et ϕ par rapport à η.

5.3.3 Analyse de vraisemblance des donnés Supernovae

Dans cette section, nous présentons une analyse de vraisemblance des données SNe Ia [Kowalski et al., 2008]. L'objectif est d'identifier les modèles (caractérisés par un jeu de paramètres) qui sont statistiquement consistants avec les observations, bien que différent du modèle ΛCDM. Les modèles cosmologiques dans la théorie que nous considérons dans ce chapitre sont identifiés par 6 paramètres : Ω_{mo}, Ω_{r0}, H_0, k, Λ et α (tandis que le modèle ΛCDM dépendait de 4 paramètre $\Omega_{k,m,r0}$ et H_0). Etant donné que la valeur actuelle du paramètre de densité de la radiation est petite, cela a une influence négligeable sur les mesures des SNe Ia. C'est pourquoi, nous avons fixé la valeur de $\Omega_{r0} = 5 \times 10^{-5}$ [Beringer et al., 2012]. Cela réduit donc le nombre de paramètres à cinq. D'autre part, la valeur de l'échelle d'énergie du potentiel Λ est optimisée de telle façon que pour une valeur donnée de α, la valeur demandée de Ω_{m0} soit bien retrouvée (cela correspond à ajuster Λ de façon consistante avec H_0). Finalement, étant donné que le diagramme de Hubble laisse le paramètre H_0 non-contraint et dégénéré dans le plan $\alpha - \Omega_{m0}$ [Caresia et al., 2004; Schimd et al., 2007], nous avons imposé la valeur du paramètre de Hubble $H_0 = 70.4$ km/s/Mpc [Komatsu et al., 2011]. De même, du fait de la dégénérescence du diagrame de Hubble par rapport à H_0, nous avons calculé la vraisemblance marginalisée par rapport à H_0. Cette vraisemblance marginalisée est donnée par Lewis et Bridle [2002]; di Pietro et Claeskens [2003]

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(\mu_i - \mu(z_i))^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_i \frac{\mu_i - \mu(z_i)}{\sigma_i^2}\right)^2 \frac{1}{\sum_i \sigma_i^{-2}} + \log\left(\sum_i \frac{1}{2\pi\sigma_i^2}\right) \tag{5.42}$$

où les données, qui sont représentées par les couples (μ_i, z_i), ont un écart-type qui est noté σ_i et la fonction $\mu(z)$ dépend du modèle cosmologique considéré et est donné par (5.38).

Au final, après les considérations ci-dessus, chaque modèle est caractérisé par un jeu de trois paramètres : (Ω_{m0}, α, k). Nous avons simulé une série de modèles en décomposant le domaine

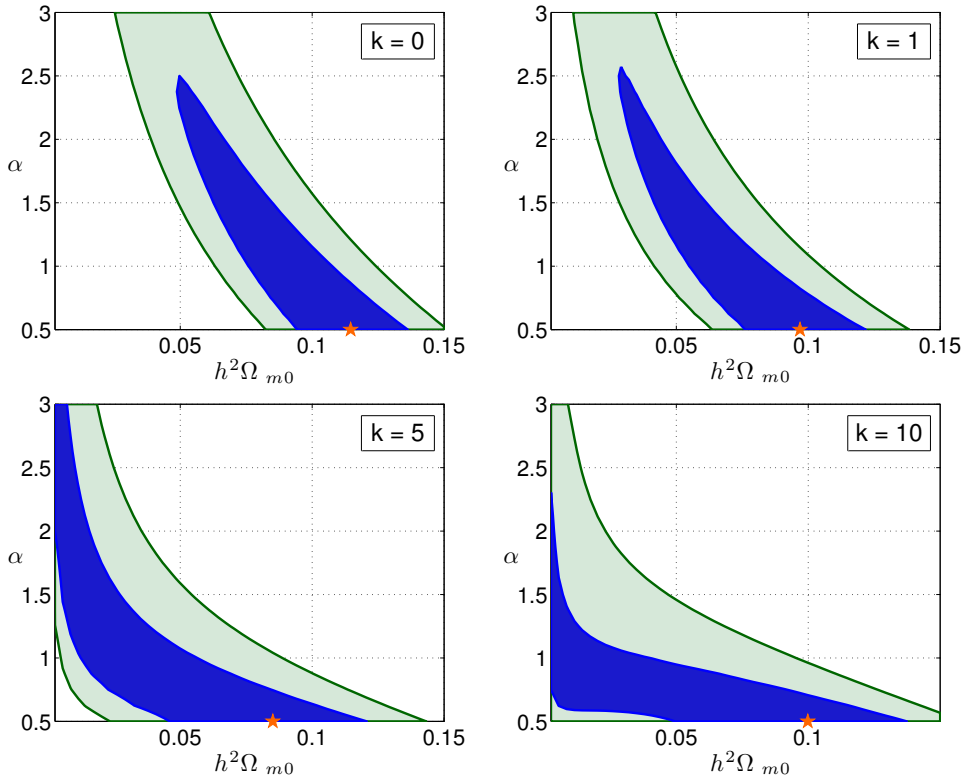

FIGURE 5.1 – Représentation des régions de confiance conditionnelles à 68 % (en bleu/foncé) et à 95% (en vert/clair) dans le plan $h^2\Omega_{m0} - \alpha$ pour différentes valeurs de la constante de couplage k. Ces régions sont obtenues par une analyse du diagramme de Hubble des données SNe Ia de UNION [Kowalski et al., 2008]. Les étoiles représentent le meilleur fit.

des paramètres en utilisant une grille uniforme. Le résultat de cette analyse est représentée à la figure 5.1 où sont représentées les régions de confiance conditionnelles à 68 % et à 95 % dans le plan $\Omega_{m0}h^2 - \alpha$ (avec $h = H_0/100\ km/s/\text{Mpc}$) avec une valeur supposée de la constante de couplage [5] k. Comme on peut le remarquer, le modèle de concordance ΛCDM (qui correspond à $k = 0$ et $\alpha = 0$) se trouve dans cette région de confiance. Les modèles caractérisés par $k = 0$ sont des modèles de quintessence. Comme remarqué dans des analyses similaires effectuées dans le cadre de la quintessence [Alimi et al., 2010; Corasaniti et al., 2004], les modèles de quintessence ont tendance à fitter les données pour des valeurs de $\Omega_{m0}h^2$ plus petites qu'en ΛCDM. Cette tendance est renforcée lorsque la valeur de la constante de couplage k augmente. De plus, nous pouvons remarquer que les aires des régions de confiance ne se réduisent pas significativement avec une augmentation de k. Cela signifie en particulier que l'ajustement fin (fine-tuning) des paramètres α et Ω_{m0} n'évolue pas avec la constante de couplage. Ceci est principalement dû à un nouveau régime dynamique qui explique l'expansion cosmique avec une petite valeur du paramètre de densité mais avec une grande valeur de la constante de couplage.

La figure 5.2 montre l'évolution du χ^2 en fonction de la densité cosmologique de matière Ω_{m0} pour une valeur fixée $\alpha = 0.5$. Le χ^2 donne une idée de la qualité du fit du modèle aux données. Une augmentation de la constante de couplage k produit une augmentation dans la

5. Dans cette analyse, nous avons déterminé les régions de confiance en comparant la valeur du χ^2 avec des valeurs tabulées [Press et al., 2007]. Ceci présuppose que les erreurs sont distribuées de façon gaussienne.

valeur minimale du χ^2 ce qui montre que les modèles avec une constante de couplage non-nulle reproduisent légèrement moins bien les données. De plus, il est intéressant de remarquer que pour des hautes valeurs de k, la courbe du χ^2 a deux minima : un avec une petite valeur de Ω_{m0} et un avec une valeur usuelle pour Ω_{m0}. Ces deux minima caractérisent des évolutions cosmologiques très différentes (ceci sera discuté plus loin) et ils conduisent à des prédictions d'âge de l'Univers très différentes. Les prédictions pour l'âge de l'Univers en fonction de Ω_{m0} sont représentées sur le haut de la figure 5.2. Tout d'abord, il est intéressant de remarquer que les modèles avec une haute constante de couplage produisent des estimations plus élevées pour l'âge de l'Univers que les modèles de quintessence avec les mêmes paramètres cosmologiques. Par exemple, pour $h^2\Omega_{m0} = 0.1$, l'estimation de l'âge de l'Univers pour un modèle de quintessence est de 14.2×10^9 années alors que pour les mêmes paramètres, le modèle avec une constante de couplage $k = 10$ donne un âge de 15.3×10^9 années. Finalement, les modèles avec une petite valeur de Ω_{m0} (autorisés par l'analyse de vraisemblance) conduisent à une estimation de l'âge de l'Univers beaucoup plus grande.

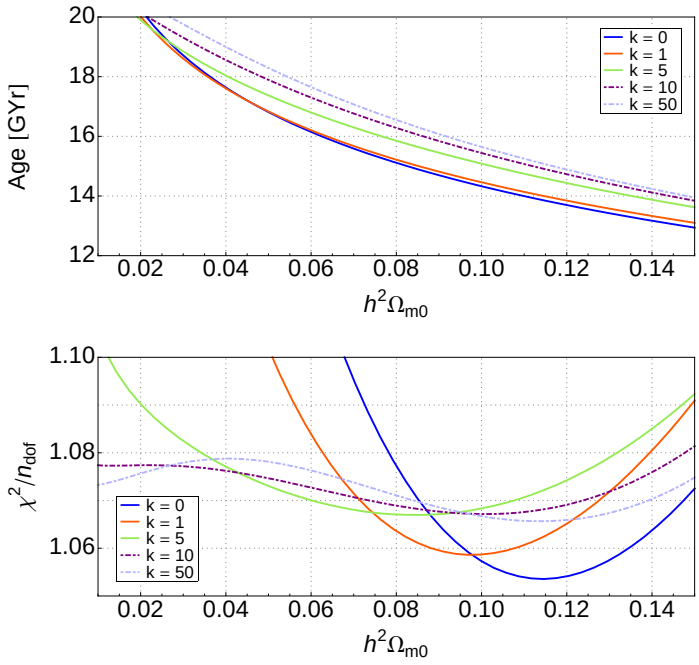

FIGURE 5.2 – Haut : Représentation de l'âge de l'Univers par rapport au paramètre de densité de matière Ω_{m0} pour des modèles caractérisés par $\alpha = 0.5$.
Bas : Représentation du χ^2 par degrés de liberté χ^2/n_{dof} en fonction du paramètre de densité de matière Ω_{m0} pour des modèles caractérisés par $\alpha = 0.5$.

Un autre résultat très intéressant concerne la relation entre Λ et les autres paramètres. Pour rappel, Λ est optimisé pour trouver la bonne valeur de Ω_{m0} (ce qui est équivalent à une optimisation par rapport à H_0). La figure 5.3 représente l'évolution de Λ par rapport à α pour différentes valeurs de k et de Ω_{m0}. Nous pouvons remarquer que l'influence de la constante de couplage et du paramètre de densité de la matière est très faible par rapport à l'influence de α. Nous avons ajusté une courbe sur ce nuage de points et nous avons obtenu la relation

$$\log \Lambda \approx \frac{19\alpha - 47}{4 + \alpha} \tag{5.43}$$

qui est exactement la même relation obtenue par Schimd et al. [2007] pour des modèles de quintessence. Cette relation donne un ordre de grandeur de Λ qui convient pour obtenir la bonne valeur de Ω_{m0}. Cette analyse montre que le mécanisme d'attraction n'est que peu modifié par le couplage non-minimal.

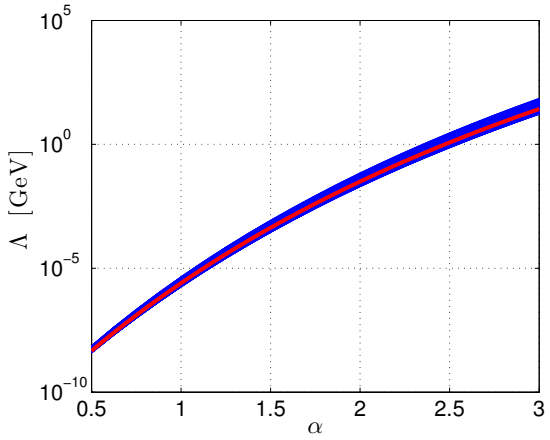

FIGURE 5.3 – En bleu (foncé) : données représentant Λ en fonction de α pour différentes valeurs de k et de Ω_{m0}. L'influence de k et Ω_{m0} est très faible par rapport à l'influence de α. En rouge (clair) : la courbe résultant du fit sur les données. L'équation de cette courbe est donnée par (5.43).

5.3.4 Evolution du champ scalaire

Il est intéressant d'étudier l'évolution du champ scalaire pour des modèles cosmologiques dont les valeurs des paramètres sont compatibles avec l'analyse des données SNe Ia de la section précédente. L'équation de Klein-Gordon qui gouverne l'évolution du champ scalaire est donnée par (5.30c) et peut être écrite sous la forme

$$\phi'' + 2\mathcal{H}_*\phi' = -k(\phi)\frac{a_*^2 A^4(\phi)}{m_p^2}\rho_m - \frac{a_*^2}{m_p^2}\frac{dV}{d\phi} = -a_*^2\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial\phi} \tag{5.44}$$

où $\mathcal{H}_* = a_*'/a_*$ et $V_{\text{eff}}(\phi)$ est un potentiel effectif dont l'expression est donné par

$$V_{\text{eff}}(\phi,\rho_m) = \frac{1}{m_p^2}\left(V(\phi) + \frac{1}{4}A^4(\phi)\rho_m\right). \tag{5.45}$$

Avec les hypothèses adoptées dans ce travail (c'est-à-dire l'utilisation du potentiel de Ratra-Peebles et d'une fonction de couplage exponentielle), ce potentiel effectif possède un minimum (comme on peut le voir à la figure 5.10). Le champ scalaire est donc attiré vers le minimum de ce potentiel effectif. Ce minimum dépend du facteur d'échelle a_* (dû au fait que le potentiel dépend de ρ dont l'évolution dépend de a_* comme indiqué à la relation (5.29)) et il bouge donc continuellement avec le temps. La forme de ce potentiel effectif pour deux densités différentes est représentée à la figure 5.10. La densité de matière diminue avec le facteur d'échelle (comme indiqué par l'équation (5.25)) ce qui implique que le potentiel était très serré pour les temps du début de l'Univers et il devient de plus en plus large au fur et à mesure que le temps s'écoule.

Notons que l'expression du potentiel effectif (5.45) est différente de l'expression donnée par Brax et al. [2004]. La différence provient simplement du fait que nous utilisons des densités qui sont exprimées en Jordan frame (ρ) tandis que Brax et al. [2004] utilise une définition hybride de la densité $\bar{\rho}$ qui est donné par (5.31).

Le fait de travailler avec le potentiel de Ratra-Peebles $V(\phi) = \Lambda^{4+\alpha}/m_p^\alpha \phi^\alpha$ et avec une fonction de couplage exponentielle $A(\phi) = e^{k\phi}$ fournit une expression analytique pour le minimum du potentiel effectif qui est déterminé par la condition suivante

$$0 = -\frac{\alpha \Lambda^{4+\alpha}}{m_p^\alpha \phi^{\alpha+1}} + k\rho_m e^{4k\phi}. \tag{5.46}$$

La solution de cette équation donne la valeur du champ scalaire qui minimise le potentiel effectif ϕ_{min} en fonction de la densité cosmologique de matière ρ_m, de la constante de couplage k et des paramètres du potentiel (α et Λ) :

$$\phi_{min}(\rho_m) = \frac{\alpha+1}{4k}\, LW\left(\frac{4kb}{\alpha+1}\right) \tag{5.47}$$

avec $b = \left(\frac{\alpha\Lambda^{4+\alpha}}{m_p^\alpha k \rho_m}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$ et $LW(x)$ la fonction W-Lambert [Chapeau-Blondeau et Monir, 2002].

Pour les modèles qui sont dans les régions de confiance provenant de l'analyse des données SNe Ia (voir à la section précédente), le comportement typique du champ scalaire est le suivant :

- au début, le mécanisme d'attraction est très efficace et le champ scalaire est attiré par le minimum du potentiel effectif et il oscille autour de celui-ci. Ceci est dû au fait que le potentiel effectif est extrêmement étroit dans le début de l'évolution (la densité de matière primordiale étant très importante). La figure 5.4 montre le comportement du champ scalaire pour différentes conditions initiales et l'évolution du minimum du potentiel effectif ϕ_{min} qui est donné par l'équation (5.47). Nous remarquons immédiatement que le mécanisme d'attraction est très puissant pour les petits facteurs d'échelle. Ceci implique que l'évolution cosmologique est très peu sensible aux conditions initiales du champ scalaire (voir la figure 5.4). Ceci est lié aux propriétés de "tracking" du potentiel de Ratra-Peebles [Steinhardt et al., 1999].
- pendant un certain laps de temps, le champ scalaire reste dans le minimum du potentiel effectif et il évolue de la même manière que ce minimum.
- dépendant du modèle considéré, le mécanisme d'attraction peut ne pas être suffisamment fort et le champ scalaire peut ne pas être capable de suivre le minimum du potentiel (voir la figure 5.4 et la figure 5.6). En particulier, pour des constantes de couplage faibles le potentiel effectif devient trop large et n'est plus capable d'attirer suffisamment le champ scalaire.

La condition nécessaire pour que le champ scalaire suive le minimum du potentiel effectif peut être dérivée en considérant les échelles de temps qui sont impliquées dans l'évolution de ce champ. Il y a trois échelles de temps différentes que nous pouvons identifier :

- une échelle de temps liée au terme d'amortissement $2\mathcal{H}\phi'$ dans l'équation (5.44). Cette échelle de temps peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{t_{damp}} = \frac{2\mathcal{H}_*}{a_*} = 2H_* \tag{5.48}$$

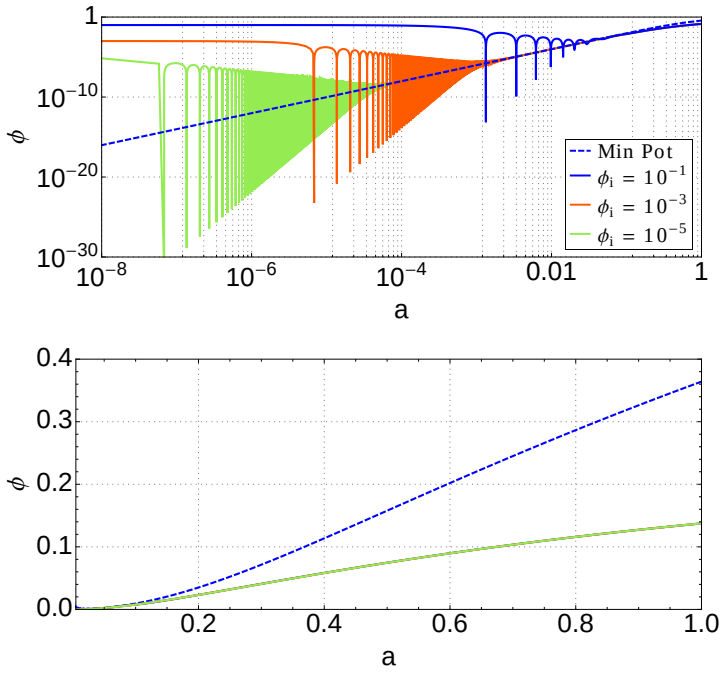

FIGURE 5.4 – Evolution du champ scalaire en fonction du facteur d'échelle observable a pour différentes conditions initiales ϕ_i et pour un modèle caractérisé par ($k = 1$, $\Omega_{m0} = 0.197$ et $\alpha = 0.5$). Le minimum du potentiel effectif (voir la relation (5.47)) est représenté par une courbe discontinue.
Haut : les courbes sont représentées sur une échelle log-log pour mettre en évidence que le champ scalaire atteint le minimum du potentiel effectif pour toutes les conditions initiales.
Bas : l'axe horizontal est linéaire pour mettre en évidence que le champ scalaire quitte le minimum du potentiel effectif à partir de $a \sim 0.1$ (quel que soit la condition initiale ϕ_i).

où t_{damp} est un temps cosmique en Einstein frame qui caractérise l'amortissement lié à l'expansion de l'Univers (Hubble damping).

– une échelle de temps qui caractérise l'évolution des oscillations du champ scalaire autour du minimum du potentiel effectif. Cette échelle de temps est liée à la masse effective du champ scalaire qui est donnée par

$$m^2 = \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial \phi^2}. \tag{5.49}$$

L'échelle de temps qui en découle est donnée par

$$\frac{1}{t_\phi^2} = \frac{m^2}{(2\pi)^2} \tag{5.50}$$

qui caractérise le temps de réponse du champ scalaire (cette estimation du temps de réponse est effectuée en utilisant une approximation harmonique autour du minimum du potentiel effectif).

– la dernière échelle de temps présente dans l'évolution du champ scalaire caractérise l'évolution du potentiel effectif. Comme nous l'avons déjà mentionné, le potentiel effectif évolue continuellement avec le temps à cause de la présence du terme ρ_m dans son expression (5.45).

Nous pouvons caractériser l'échelle de temps de cette évolution par l'échelle de temps liée à la variation du minimum du potentiel ϕ_{min}

$$\frac{1}{t_{min}} = \frac{\dot{\phi}_{min}}{\phi_{min}} = \frac{1}{\phi_{min}} \frac{\partial \phi_{min}}{\partial \rho_m} \frac{\partial \rho_m}{\partial a} \dot{a} \tag{5.51}$$

où un point dénote la dérivation par rapport au temps cosmique en Einstein frame t^*. En utilisant l'expression de ϕ_{min} (5.47), de ρ_m (5.29) et la définition de a (5.20b), nous obtenons finalement

$$\frac{1}{t_{min}} = \frac{3\left(H_* + \alpha\dot{\phi}\right)}{1 + \alpha + 4k\phi_{min}}. \tag{5.52}$$

Le champ scalaire ϕ suit le minimum du potentiel effectif si le temps d'amortissement du champ scalaire est plus grand que le temps de réponse du champ ($t_{damp} > t_\phi$) et si l'évolution du potentiel effectif est plus lente que l'oscillation du champ autour du minimum ($t_{min} > t_\phi$). En résumé, les conditions qui caractérisent le fait que le champ scalaire suit le minimum du potentiel sont données par

$$\frac{m^2}{4\pi^2} > 4H_*^2 \tag{5.53a}$$

$$\frac{m^2}{4\pi^2} > \frac{9\left(H_* + \alpha\dot{\phi}\right)^2}{(1 + \alpha + 4k\phi_{min})^2} \tag{5.53b}$$

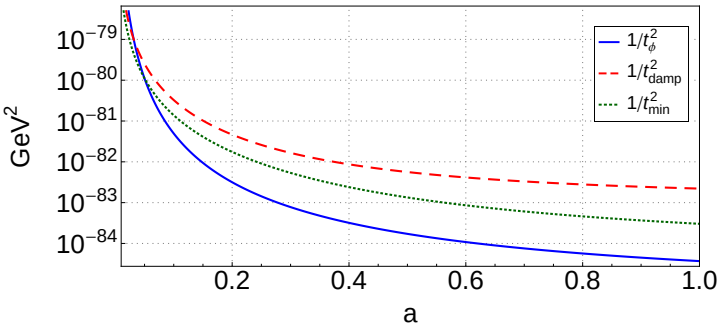

FIGURE 5.5 – Evolution des trois échelles de temps caractéristiques de la dynamique du champ scalaire en fonction du facteur d'échelle Jordan frame a : le temps caractéristique de réponse du champ (5.50), le temps d'amortissement (5.48) et le temps d'évolution du potentiel effectif (5.51). Le modèle considéré est le même modèle que celui de la figure 5.4. Nous pouvons remarquer que l'intersection entre t_ϕ et t_{damp} se produit au facteur d'échelle de transition a_t (ce facteur d'échelle correspond au moment où le champ quitte le minimum du potentiel effectif comme on peut le voir sur la figure 5.4).

Ces trois échelles de temps sont représentées à la figure 5.5 (pour un modèle qui fitte les SNe Ia avec $k = 1$). Nous pouvons voir que l'intersection de t_ϕ avec les autres courbes se produit à $a \sim 0.1$ qui est exactement le même facteur d'échelle où le champ scalaire s'arrête de suivre le minimum du potentiel effectif (comme c'est indiqué à la figure 5.4). Nous notons par a_t le facteur d'échelle Jordan frame à partir duquel le champ scalaire s'arrête de suivre le minimum de V_{eff}. La

figure 5.6 (a) représente l'évolution du champ scalaire et du minimum du potentiel effectif pour différentes valeurs de la constante de couplage k. Le facteur d'échelle de transition a_t augmente avec k et pour $k \sim 15$, le champ scalaire reste dans le minimum du potentiel effectif durant toute l'évolution. Sur la figure 5.6 (b), le comportement du champ scalaire pour le second minimum de la courbe du χ^2 pour $k = 10$ est aussi représenté (il s'agit du minimum qui apparait pour les petites valeurs de Ω_{m0} sur la figure 5.2). L'évolution de ce modèle est très différent des autres : le champ scalaire augmente beaucoup plus rapidement.

La figure 5.6 (c) représente l'évolution du facteur d'échelle de transition a_t en fonction de la constante de couplage k. Nous remarquons que ce facteur d'échelle augmente avec la constante de couplage ce qui est logique vu que le potentiel effectif devient de plus en plus serré pour des hautes constantes de couplage. En conséquence, il est plus difficile au champ scalaire de quitter le minimum de ce potentiel.

5.3.5 Evolution de l'expansion cosmique

Nous allons étudier ici quelle est l'origine de l'accélération de l'expansion cosmique dans les modèles de champs caméléons. Dans ce contexte, l'expansion cosmique est décrite en Jordan frame par l'évolution du facteur d'échelle $a = A(\phi)a_*$. Pour pouvoir identifier l'origine de l'accélération de l'expansion cosmique, nous devons déterminer l'expression de $\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2}$. Avec la définition de a donnée par l'équation (5.20b) et avec les équations d'évolution cosmologique (5.30), nous pouvons écrire

$$q = \frac{1}{H^2 a}\frac{d^2a}{dt^2} = q_M + q_Q + q_{\rm NMC} \tag{5.54}$$

où les différents termes sont donnés par

$$q_M = -\frac{\Omega_m}{2} - \Omega_r \tag{5.55a}$$

$$q_Q = \frac{8\pi}{3m_p^2 A^2(\phi)H^2}\left(V(\phi) - m_p^2\frac{\phi'^2}{a^2}\right) \tag{5.55b}$$

$$q_{\rm NMC} = \frac{k\phi''}{A^2(\phi)a^2H^2}. \tag{5.55c}$$

Le premier terme est le terme présent en RG qui implique la matière (ici l'indice M se rapporte à la matière baryonique aussi bien que la matière noire et la radiation). Ce terme est un terme qui ne produit que de la décélération. Le second terme q_Q est un terme dû à la présence du champ scalaire dans la dynamique. Ce terme se trouve aussi dans les modèles de quintessence (où la fonction de couplage vaut $A(\phi) = 1$ et la constante de couplage k s'annule) [Steinhardt et al., 1999; di Pietro et Claeskens, 2003; Schimd et al., 2007]. Finalement, le dernier terme $q_{\rm NMC}$ est dû au couplage non-minimal ($A(\phi) \neq cst$) et il est directement lié à l'évolution du champ scalaire.

Les différentes contributions à l'accélération cosmique sont représentées à la figure 5.7 pour trois valeurs différentes de la fonction de couplage k ($k = 1$, $k = 10$ et $k = 20$) pour des modèles qui produisent les meilleurs fit aux données SNe Ia. La contribution due à la matière

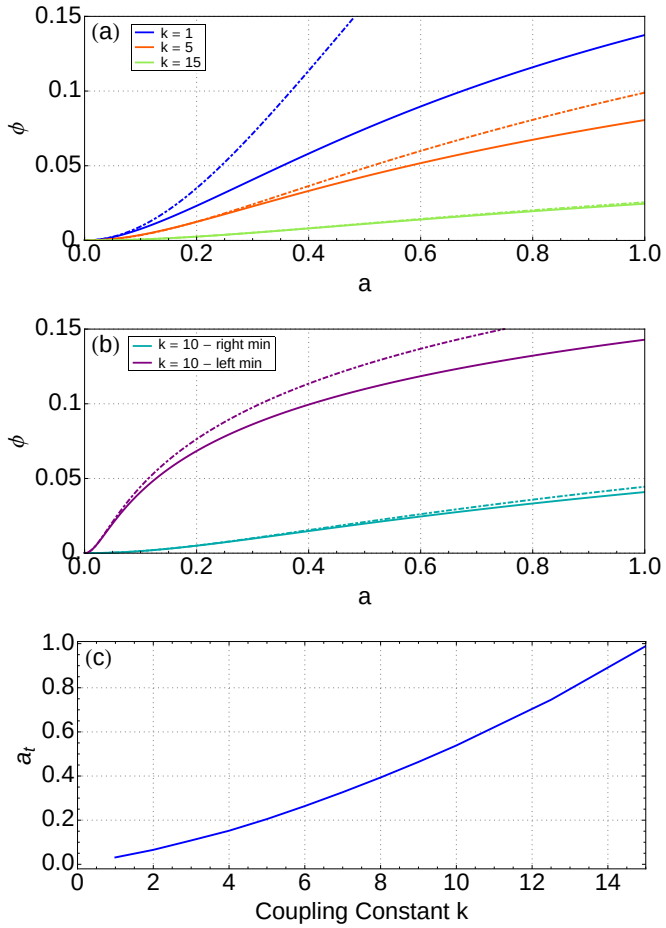

FIGURE 5.6 – (a) : Evolution du champ scalaire (courbes continues) et du minimum du potentiel effectif ϕ_{min} dont l'expression est donnée par la relation (5.47) (courbes discontinues) pour différentes valeurs de la constante de couplage k. Pour des petites valeurs de la constante de couplage, le champ scalaire quitte ϕ_{min} relativement tôt. Le facteur d'échelle de transition a_t où le champ quitte le minimum du potentiel augmente avec la constante de couplage k. Pour $k = 15$, le champ scalaire reste dans le minimum du potentiel jusqu'à l'époque actuelle.
(b) : Evolution du champ scalaire (courbes continues) et du minimum du potentiel effectif ϕ_{min} (courbes discontinues) pour deux modèles caractérisés par $k = 10$ et correspondant aux deux minima locaux du χ^2 (voir la figure 5.2). L'évolution du modèle situé dans le second minimum du χ^2 (caractérisé par une faible valeur de Ω_{m0}) est très rapide.
(c) : Evolution du facteur d'échelle de transition a_t en fonction de la constante de couplage k.

est approximativement la même quelle que soit la valeur de k. Par contre, il est intéressant de remarquer que pour des petites valeurs de k, l'accélération cosmique est expliquée par le terme de quintessence q_Q alors que le couplage non-minimal ne joue aucun rôle. Une augmentation de la constante de couplage produit une diminution de la contribution de quintessence en faveur de la contribution provenant du couplage non-minimal $q_{\rm NMC}$. Finalement, pour $k >> 1$, l'accélération de l'expansion cosmique est expliquée par le couplage non-minimal.

Pour comparer la différence dans la dynamique des modèles correspondant aux deux minima de la courbe du χ^2 (voir à la figure 5.2 et la discussion associée), nous avons représenté à la figure 5.7 l'évolution des facteurs d'accélération pour les deux minima locaux de la courbe du χ^2 pour $k = 10$. L'évolution du modèle dans le minimum de gauche (caractérisé par un petit paramètre de densité) est extrêmement rapide et il atteint un comportement asymptotique avec une contribution de quintessence qui est du même ordre de grandeur que la contribution provenant du couplage non-minimal. La contribution de la matière est quant-à-elle beaucoup plus petite, ce qui est logique vu que le paramètre de densité est plus petit dans ce modèle.

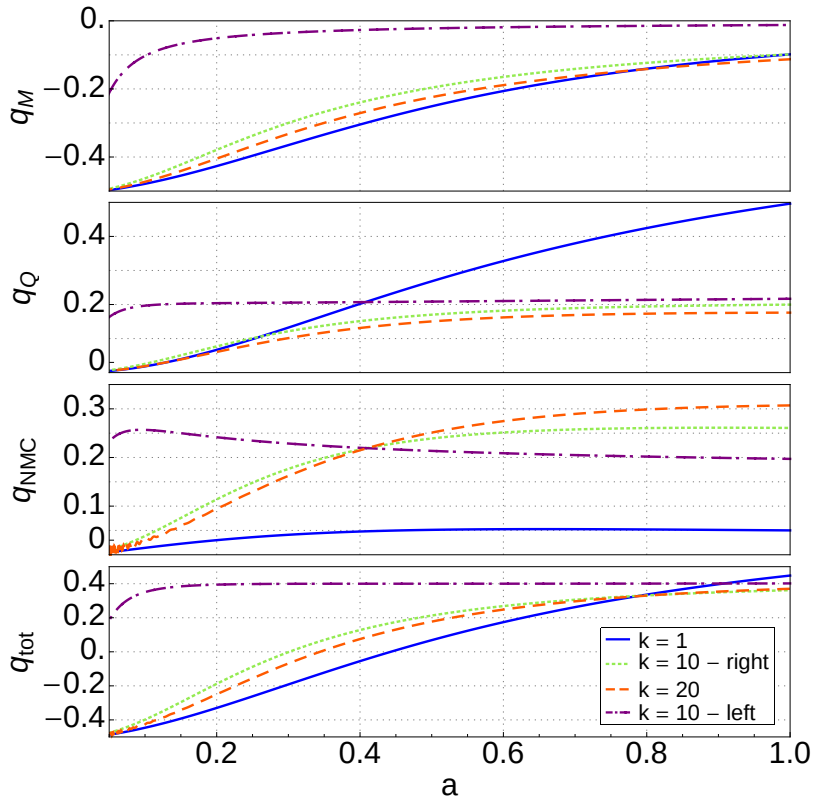

FIGURE 5.7 – Représentation des différents termes qui constituent le facteur d'accélération pour différentes constantes de couplage k. Les différents termes sont : q_M pour la contribution de la matière, q_Q pour la contribution de la quintessence et q_{NMC} pour la contribution due au couplage non-minimal. L'expression de ces contributions est donnée par les équations (5.55). Les trois premières courbes $k = 1, 10, 20$ représentent des modèles dans le minimum global du χ^2 (best-fit) tandis que la dernière courbe $k = 10-$left représente un modèle qui se trouve dans le second minimum (de gauche) du χ^2 (voir la figure 5.2). Pour les modèles dans le minimum global du χ^2 : la contribution de la RG est du même ordre de grandeur quelle que soit la valeur de la constante de couplage k ; la contribution du potentiel de quintessence décroit quand la constante de couplage augmente pour laisser sa place à la contribution provenant du couplage non-minimal. Le modèle dans le minimum caractérisé par une faible valeur de Ω_{m0} possède une évolution qui est beaucoup plus rapide et atteint rapidement des valeurs asymptotiques.

5.3.6 Equation d'état du fluide effectif d'énergie noire

En suivant ce qui est fait dans les études de quintessence [voir par exemple dans Steinhardt et al., 1999; di Pietro et Claeskens, 2003; Schimd et al., 2007; Alimi et al., 2010; Alam et al., 2003] et dans le contexte de l'hypothèse de l'"Abnormally Weighted Energy (AWE)" [Alimi et Füzfa, 2008], nous avons modélisé la présence du champ scalaire non-minimalement couplé par un fluide effectif d'énergie noire en RG. Nous introduisons alors un paramètre de densité Ω_{DE} et un paramètre caractérisant l'équation d'état de ce fluide effectif ω_{DE}. A nouveau, tout comme pour les paramètres d'accélération à la section précédente, nous introduisons en fait deux fluides effectifs : un lié à la contribution des termes de quintessence (caractérisé par Ω_Q et ω_Q) et un lié à la contribution provenant du couplage non-minimal (caractérisé par $\Omega_{\rm NMC}$ et $\omega_{\rm NMC}$).

La constante de Hubble observable est définie par (5.27). En utilisant les relations (5.20b) et (5.20a), il est possible de relié la constante de Hubble en Jordan frame à son équivalent en Einstein frame

$$H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \frac{1}{Aa_*}\frac{d\left(Aa_*\right)}{Adt_*} = \frac{1}{A}\left(H_* + \alpha(\phi)\frac{d\phi}{dt_*}\right) \tag{5.56}$$

L'idée est d'élever cette dernière relation au carré et d'y insérer les équations d'évolutions (5.30). Ensuite, il est possible d'identifier les différents termes qui apparaissent avec l'équation de Friedmann en Jordan frame qui contient les deux fluides effectifs

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_Q + \Omega_{\rm NMC}, \tag{5.57}$$

pour obtenir l'expression des paramètres de densité

$$\Omega_Q = \frac{8\pi}{3m_p^2A^2(\phi)H^2}\left(\frac{m_p^2\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)\right) \tag{5.58a}$$

$$\Omega_{\rm NMC} = \frac{k}{H^2A^2(\phi)}\left(2\frac{\dot{a}_*\dot{\phi}}{a_*} + k\dot{\phi}^2\right). \tag{5.58b}$$

Le paramètre de densité total du fluide effectif d'énergie noire est alors donné par

$$\Omega_{DE} = \Omega_Q + \Omega_{\rm NMC}. \tag{5.59}$$

La figure 5.8 (a-b) représente l'évolution des différents paramètres de densité Ω définis ci-dessus pour différentes valeurs de la constante de couplage k. Le paramètre de densité de la quintessence diminue quand k augmente tandis que le phénomène inverse est observé pour le paramètre de densité lié à la contribution du couplage non-minimal. Ceci est consistant avec le comportement de l'évolution des facteurs d'accélération q comme illustré à la figure 5.7. Pour des grandes valeurs de la constante de couplage, l'accélération cosmique est grandement expliquée par le couplage non-minimal. Le comportement asymptotique du modèle situé dans le second minimum du χ^2 (caractérisé par une faible valeur de Ω_{m0}) est également confirmé par la figure 5.8 (b).

Nous pouvons maintenant utiliser la même procédure avec l'équation d'accélération (5.54) et l'identifier à l'équation standard en RG avec deux fluides supplémentaires

$$q = -\frac{\Omega_m}{2} - \Omega_r - \frac{1}{2}\Omega_Q(1+3\omega_Q) - \frac{1}{2}\Omega_{\rm NMC}(1+3\omega_{\rm NMC}) \tag{5.60}$$

pour obtenir l'expression des équations d'état effectives liée à la quintessence et au couplage non-minimal

$$\omega_Q = \frac{m_p^2\dot{\phi}^2/2 - V(\phi)}{m_p^2\dot{\phi}^2/2 + V(\phi)} \tag{5.61a}$$

$$\omega_{\rm NMC} = \frac{1}{3}\frac{2\frac{\dot{a}_*\dot{\phi}}{a_*} + 2\frac{\partial V_{\rm eff}}{\partial\phi} - k\dot{\phi}^2}{2\frac{\dot{a}_*\dot{\phi}}{a_*} + k\dot{\phi}^2} \tag{5.61b}$$

et l'équation d'état totale est donnée par

$$\omega_{DE} = \frac{\omega_Q\Omega_Q + \omega_{\rm NMC}\Omega_{\rm NMC}}{\Omega_{DE}}. \tag{5.62}$$

La figure 5.8 (c) représente l'évolution du paramètre de l'équation d'état effective totale ω_{DE} pour différentes valeurs de la constante de couplage k. Tous les modèles présentés sur cette figure sont statistiquement équivalents au modèle ΛCDM pour les observations SNe Ia. Une augmentation dans la constante de couplage produit un changement significatif dans l'allure des courbes. En particulier, la valeur de $\frac{d\omega}{da}\big|_0$ peut devenir positive (cette dérivée est parfois notée $-\omega_1$ dans une paramétrisation de l'équation d'état de Chevallier-Polarski-Linder $\omega(a) = \omega_0 + \omega_1(1-a)$ [Chevallier et Polarski, 2001; Linder, 2003]). Dans un scénario de quintessence avec un potentiel de Ratra-Peeble, la dérivée de ω est toujours négative ($\omega_1 > 0$) [Weller et Albrecht, 2002]. Ainsi, une mesure de la valeur de la dérivée de l'équation d'état permet en principe de discriminer entre les modèles d'énergie noire fortement non-minimalement couplé et les modèles de quintessence. Une telle mesure sera réalisée par la mission EUCLID récemment sélectionné par l'ESA comme mission de classe moyenne dans le programme "Cosmic Vision" [ESA, 2012a].

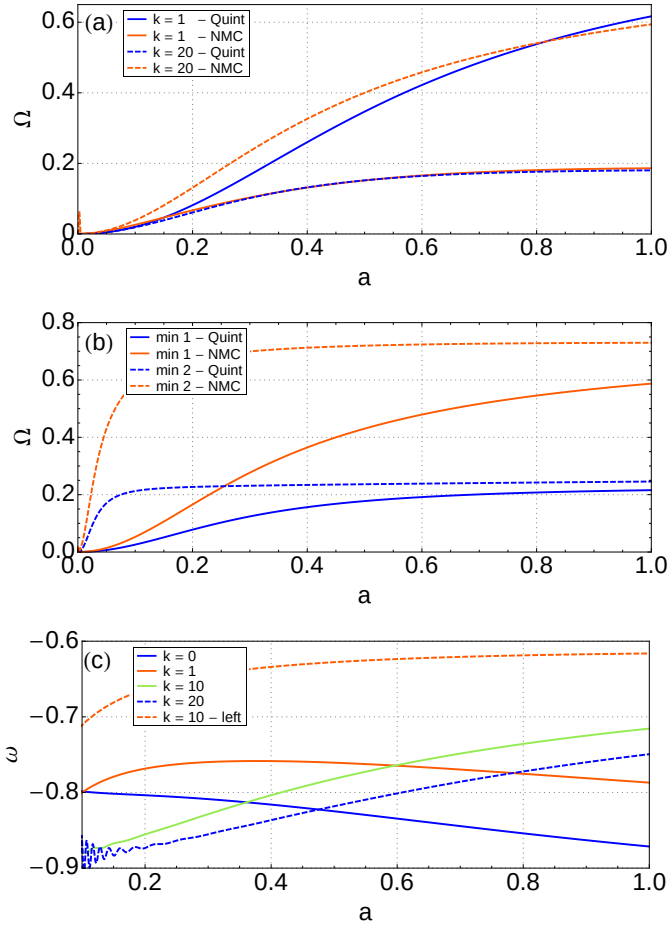

FIGURE 5.8 – (a-b) : Evolution des paramètres de densité Ω correspondant à la contribution de la quintessence (Ω_Q donné par la relation (5.61a) et représenté par des courbes bleues (foncées)) et à la contribution du couplage non-minmal ($\Omega_{\rm NMC}$ donné par l'équation (5.61b) et représenté par les courbes rouges (claires)). Différentes constantes de couplage sont représentées : sur la figure (a) : $k = 1$ et $k = 20$; sur la figure (b) : deux modèles caractérisés par $k = 10$ mais situés dans les minima locaux différents de la courbe du χ^2.
(c) : Evolution du paramètre de l'équation d'état ω_{DE} en fonction du facteur d'échelle cosmique pour des modèles "best-fit" pour différentes constantes de couplage. Un modèle situé dans le second minimum de la courbe du χ^2 (caractérisé par une faible valeur de Ω_{m0}) pour $k = 10$ est aussi représenté.

5.4 Contraintes du Système Solaire

Dans cette partie, nous allons étudier les contraintes provenant du Système Solaire sur les paramètres qui caractérisent le potentiel du champ scalaire et sur le couplage entre la matière et la champ scalaire. Ces contraintes seront évidemment indépendantes et complémentaires par rapport à celles obtenues par des considérations cosmologiques à la section 5.3.3. Les théories tenseur-scalaire traditionnelles (dans le sens où aucun potentiel n'est considéré et le mécanisme caméléon n'est pas présent) sont sévèrement contraintes par les observations du Système Solaire et des pulsars binaires. Rappelons à ce titre que les déviations par rapport à la RG peuvent être exprimées dans le formalisme PPN décrit par Will [1993, 2006]. Les paramètres PPN liés à une théorie tenseur-scalaire traditionnelle avec une fonction de couplage exponentielle $A(\phi) = e^{k\phi}$ sont donnés par [voir par exemple Damour et Esposito-Farese, 1992] [6]

$$\gamma - 1 = -2\frac{k^2}{4\pi + k^2}, \qquad \beta - 1 = 0\cdot \tag{5.63}$$

Rappelons également que la meilleure contrainte actuelle sur le paramètre γ est obtenue par la mesure du délai Shapiro de Cassini par Bertotti et al. [2003]

$$\gamma - 1 = (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}\cdot \tag{5.64}$$

Cette contrainte sur γ montre que les théories tenseur-scalaires de la gravité ne sont viables que pour des petites valeurs de la constante de couplage k. La nouveauté dans les champs caméléons présentés par Khoury et Weltman [2004a,b] est qu'il est possible de satisfaire cette contrainte grâce au mécanisme caméléon et ce, même pour des valeurs de la constante de couplage grande (pour des valeurs à priori rejetées par la contrainte de Cassini).

En effet, si le potentiel du champ scalaire est choisi de telle façon que sa masse devienne grande en présence de matière, la charge scalaire du corps (qui vaut k dans une théorie sans mécanisme caméléon) est remplacée par une charge effective k_{eff} dont la valeur peut être fortement réduite par rapport à k (et dès lors satisfaire la contrainte PPN). Le but de cette partie est d'étudier un modèle simplifié de Soleil et de dériver les contraintes pour que le mécanisme caméléon soit suffisamment fort et ainsi pour qu'il satisfasse les observations du Système Solaire. L'idée est donc de déterminer la métrique extérieure au Soleil pour pouvoir en déduire les observables (par exemple à l'aide du logiciel développé au chapitre 2). Au final, nous pourrons comparer la région des paramètres admissibles pour le Système Solaire avec la région de confiance obtenue à l'aide des donnés SNe IA à la section 5.3.3.

Dans la section suivante, nous dériverons les équations de champs dans le cas d'une symétrie sphérique et statique dans le même esprit que ce qui a été réalisé par Babichev et Langlois [2010]. Nous discuterons également du problème des conditions frontières à la lumière de l'analyse cosmologique réalisée précédemment. Dans la section 5.4.2, nous rappelons brièvement le fonctionnement du mécanisme caméléon présenté dans Khoury et Weltman [2004a,b]. La section 5.4.3 est dédiée à une étude des solutions analytiques des équations de champs présentes

6. Notons que notre champ scalaire ϕ n'est pas le même que celui utilisé par Damour et Esposito-Farese [1992] que nous noterons φ. Les deux champs scalaires sont liés entre eux par la relation $\phi = \frac{\varphi}{\sqrt{4\pi}}$. Dès lors, notre constante de couplage k est reliée à leur constante de couplage α par $k = \sqrt{4\pi}\alpha$ et le paramètre Post-Newtonien γ donné par $\gamma = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$ dans leur notation devient $\gamma = \frac{4\pi-k^2}{4\pi+k^2}$ dans les nôtres.

dans la littérature [Khoury et Weltman, 2004a; Waterhouse, 2006; Tamaki et Tsujikawa, 2008; Tsujikawa et al., 2009]. En particulier, nous comparerons ces résultats analytiques à des solutions numériques. Finalement, dans la section 5.4.4, nous dérivons la métrique extérieure au Soleil et nous montrons qu'elle entre parfaitement dans le formalisme PPN. Nous comparerons notre approche avec différentes expressions qu'il est possible de trouver dans la littérature et nous commenterons les différences obtenues. Nous terminerons alors cette analyse par une comparaison des régions de confiance obtenues dans le Système Solaire avec les régions de confiance obtenues par l'analyse des données SNe Ia.

5.4.1 Configuration sphérique et statique

La métrique caractérisant un espace-temps possédant une symétrie sphérique et statique peut s'écrire en coordonnées de Schwarzschild (en Einstein frame) sous la forme

$$ds_*^2 = -e^{\nu(r_*)}dt_*^2 + e^{\lambda(r_*)}dr_*^2 + r_*^2 d\Omega^2 \cdot \tag{5.65}$$

La substitution de cette métrique dans les équations de champs (5.11-5.12) et l'utilisation de la définition du tenseur énergie-impulsion donnée par (5.15) permet de trouver les équations suivantes

$$\lambda' = \frac{8\pi}{m_p^2} r_* A^4(\phi) e^{\lambda} \rho + 4\pi r_* \Psi^2 + \frac{1-e^{\lambda}}{r_*} + \frac{8\pi}{m_p^2} r_* e^{\lambda} V(\phi) \tag{5.66a}$$

$$\nu' = \frac{8\pi}{m_p^2} r_* A^4(\phi) e^{\lambda} p + 4\pi r_* \Psi^2 - \frac{1-e^{\lambda}}{r_*} - \frac{8\pi}{m_p^2} r_* e^{\lambda} V(\phi) \tag{5.66b}$$

$$\phi' = \Psi \tag{5.66c}$$

$$\Psi' = -\left(\frac{2}{r_*} + \frac{1}{2}(\nu' - \lambda')\right)\Psi + \frac{A^4(\phi)e^{\lambda}}{m_p^2} k(\phi)(\rho - 3p) + \frac{e^{\lambda}}{m_p^2}\frac{dV}{d\phi} \tag{5.66d}$$

$$p' = -(\rho + p)\left(k(\phi)\Psi + \frac{\nu'}{2}\right) \cdot \tag{5.66e}$$

où un prime dénote une dérivation par rapport à la coordonnée radiale r_*. Ces équations sont une extension de celles dérivées par Damour et Esposito-Farese [1993] (où aucun potentiel n'était considéré) et sont équivalentes aux équations dérivées par Babichev et Langlois [2010]. Ce jeu de cinq équations avec six inconnues doit être complété par une équation d'état. Dans ce travail, nous avons considéré un modèle très simple d'étoile dans lequel nous avons supposé que la densité était constante dans l'étoile (ρ_b). En dehors de l'étoile, nous avons considéré un fluide cosmologique de densité constante ρ_∞. Cette densité cosmologique est reliée au paramètre de densité cosmologique Ω_{m0} par la relation (5.29).

Pour comprendre le mécanisme caméléon, il est utile de considérer l'équation (5.66d) dans sa limite non-relativiste (c'est-à-dire en ignorant la backreaction du champ scalaire et en considérant que $e^{\lambda} \sim 1$) et en négligeant la pression par rapport à la densité d'énergie

$$\frac{d^2\phi}{dr_*^2} + \frac{2}{r_*}\frac{d\phi}{dr_*} = \frac{dV_{\text{eff}}}{d\phi} \tag{5.67}$$

où le potentiel effectif est exactement celui qui apparait dans l'évolution cosmologique (5.45). Si on considère un potentiel runaway [7], le potentiel effectif possède un minimum noté $\phi_{min}(\rho)$. Dans le cas d'un potentiel Ratra-Peebles, ce minimum est donné par l'expression (5.47). Comme nous l'avons déjà fait remarquer dans la section 5.3.4, l'expression de ce potentiel effectif est légèrement différente de ce qui se trouve généralement dans la littérature des caméléons [Khoury et Weltman, 2004b,a; Tamaki et Tsujikawa, 2008; Tsujikawa et al., 2009; de Felice et Tsujikawa, 2010; Brax et al., 2004] car nous utilisons toujours la densité exprimée en Jordan frame ρ (rappelons que c'est dans cette frame que le tenseur énergie-impulsion est conservé et c'est cette densité qui est observable (ce raisonnement est celui suivi par Damour et Nordtvedt [1993a]; Damour et Esposito-Farese [1993]; Damour et Esposito-Farèse [1996] et par Babichev et Langlois [2010]) alors que la plupart des analyses des champs caméléons utilisent une densité hybride définie pour de la matière sans pression qui est conservée dans un contexte cosmologique ($\bar{\rho}$). Cette densité hybride est liée à la densité en Jordan frame et en Einstein frame par des facteurs conformes comme indiqués par les relations (5.31). Cette différence ne change néanmoins qualitativement pas les résultats obtenus.

Cinq conditions frontières sont nécessaires pour pouvoir résoudre les équations (5.66) en plus de l'équation d'état. Tout d'abord, si on veut que les équations soient régulières à l'origine des coordonnées $r_* = 0$, il faut imposer

$$\lambda(r_* = 0) = 0 \tag{5.68a}$$
$$\Psi(r_* = 0) = 0\cdot \tag{5.68b}$$

D'autre part, la pression de la matière doit s'annuler à la frontière du corps considéré $r_* = R_b$, donnant la condition supplémentaire

$$p(r_* = R_b) = 0\cdot \tag{5.68c}$$

Une condition sur ν est encore nécessaire, ce qui correspond à fixer la coordonnée temporelle. Ce choix peut être arbitraire et ne change pas le résultat de l'intégration puisque les équations ne dépendent que de ν'.

La dernière condition concerne le champ scalaire ϕ. Suivant ce qui est fait par Khoury et Weltman [2004a,b], par Babichev et Langlois [2010], par Tamaki et Tsujikawa [2008] et par Tsujikawa et al. [2009], nous avons supposé que le champ scalaire atteint le minimum du potentiel effectif à grande distance du corps central

$$\phi(r_* = \infty) = \phi_{min}\cdot \tag{5.68d}$$

La validité de cette hypothèse peut être remise en cause. En effet, nous avons vu dans la section 5.3.4 que l'évolution cosmologique ne produit pas toujours une situation dans laquelle le champ scalaire reste dans le minimum du potentiel effectif jusqu'à l'époque actuelle. En particulier, pour des faibles valeurs de la constante de couplage (k inférieure à ~ 15), nous avons montré que ce n'est pas le cas et le champ scalaire cosmologique à l'époque actuelle est différent de la valeur qui minimise le potentiel effectif (ϕ_{min}) comme illustré à la figure 5.6. A la figure 5.9,

7. La définition d'un potentiel runaway est donnée dans Khoury et Weltman [2004b]. Il s'agit d'un potentiel monotone décroissant qui satisfait $V, V_{,\phi}/V, V_{,\phi\phi}/V \to \infty$ quand $\phi \to 0$ et $V, V_{,\phi}/V, V_{,\phi\phi}/V \to 0$ quand $\phi \to \infty$.

nous avons représenté le rapport ϕ_∞/ϕ_0 (pour rappel ϕ_∞ qui est la valeur du champ scalaire qui minimise le potentiel effectif et ϕ_0 est la valeur actuelle du champ scalaire telle que obtenue après intégration des équations cosmologiques). Nous pouvons remarquer que pour des faibles valeurs de la constante de couplage, ce rapport est différent de 1 et la condition frontière (5.68d) ne peut pas être satisfaite. Pour être complètement cohérent au niveau de cette condition de bord, il faudrait résoudre l'évolution cosmologique des structures pour avoir une idée des conditions limites du champ au bord du Système Solaire. Ceci représente un travail gigantesque qui n'a pas été considéré.

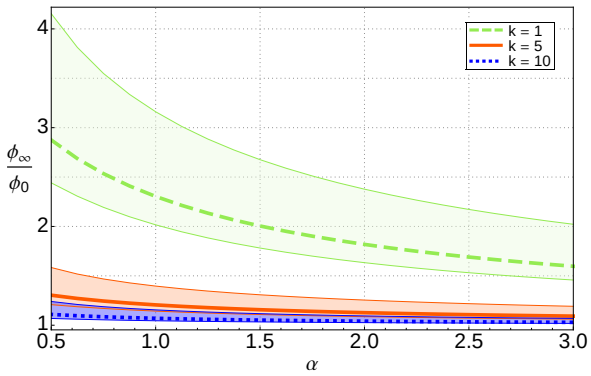

FIGURE 5.9 – Rapport $\phi_{min}(\rho_\infty)/\phi_0$ entre la valeur du champ scalaire qui minimise le potentiel effectif (au niveau cosmologique) et ϕ_0 la valeur du champ scalaire donnée par l'évolution cosmologique. Les différentes lignes correspondent à différentes valeurs de la constante de couplage k et les régions correspondent à différentes valeur de Ω_{m0}.

Les cinq équations (5.66) avec l'équation d'état et les cinq conditions frontières (5.68) décrites ci-dessus forment un problème au bord (Boundary Value Problem, BVP). Ce problème a été résolu numériquement en utilisant une méthode de multigrilles.

5.4.2 Le mécanisme Caméléon

Comme nous l'avons établi dans la section précédente, l'évolution de ϕ dans la limite non-relativiste est gouvernée par le potentiel effectif $V_{\rm eff}(\phi, \rho)$ qui dépend explicitement de la densité locale de matière. Ce potentiel est illustré à la figure 5.10 où la courbe bleue représente le potentiel effectif en-dehors du corps (la densité cosmologique ρ_∞ est beaucoup plus petite que la densité du corps ρ_b) et la courbe rouge représente le potentiel dans le corps central.

Le minimum du potentiel est noté ϕ_{min} et la masse des fluctuations autour du minimum est obtenue en évaluant la dérivée seconde de ce potentiel

$$m^2 = \left.\frac{\partial^2 V_{\rm eff}}{\partial\phi^2}\right|_{\phi=\phi_{min}} = \frac{1}{m_p^2}\left(\frac{d^2V(\phi_{min})}{d\phi^2} + 4A^4(\phi_{min})k^2\rho\right). \tag{5.69}$$

Comme nous pouvons le voir sur la figure 5.10, à des valeurs plus grandes de ρ correspondent des valeurs plus petites de ϕ_{min} et des valeurs plus grandes de m (le potentiel devient plus étroit). Autrement dit, au plus dense est l'environnement, au plus massif est le champ scalaire.

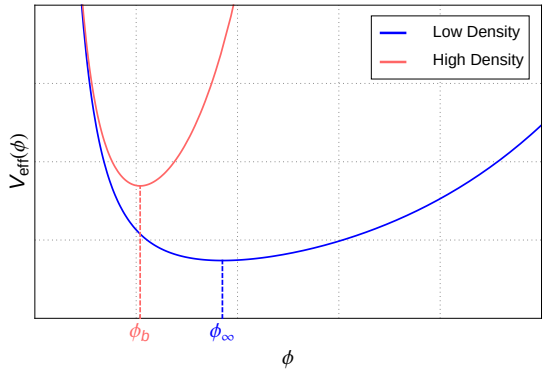

FIGURE 5.10 – Représentation du potentiel effectif pour des grandes et des petites valeurs de la densité de matière ρ. Ceci illustre que, quand ρ diminue, le potentiel effectif devient plus large et le minimum se déplace vers des plus hautes valeurs du champ scalaire. Cette situation représente (par exemple) le potentiel effectif dans un corps massif (une étoile par exemple) en rouge (clair) et hors du corps en bleu (foncé). Cette situation peut aussi illustrer le potentiel effectif pour diverses époques de l'Univers : une époque relativement tôt de l'Univers pour la courbe rouge (claire) et une époque plus tardive (moins dense) pour la courbe en bleue (foncée).

Ceci justifie le nom qui a été attribué à cette théorie : caméléon. Dans ce qui suit, les indices b indiquent que la quantité associée est évaluée pour un champ scalaire minimisant le potentiel effectif dans le corps central et les indices ∞ indiquent que la quantité associée est évaluée au minimum du potentiel effectif hors du corps central.

Pour bien fixer les idées, il faut se rendre compte que le champ scalaire est influencé par deux potentiels différents : un dans le corps central et un en-dehors. Ces potentiels possèdent des minima distincts qui attirent le champ scalaire en deux endroits bien différents. Dans les modèles des caméléons, il est supposé que le champ scalaire atteint le minimum du potentiel effectif loin du corps central ($\phi(r=\infty)=\phi_\infty$) comme nous l'avons discuté aux alentours de la relation (5.68d). D'un autre coté, le champ scalaire n'atteint pas nécessairement le minimum du potentiel dans le corps. Deux régimes sont dès lors possibles :

– le champ scalaire atteint effectivement le minimum du potentiel dans le corps ($\phi(r=0)\approx\phi_b$). Il est alors possible de montrer que ce champ est gelé dans le minimum dans une grande partie du corps central. Ce régime est appelé le régime de *thin-shell* [Khoury et Weltman, 2004a,b] car le champ évolue seulement dans une fine couche autour de la surface du corps. Si on note par R_b le rayon du corps et par R_r le rayon où le champ scalaire commence à évoluer, la condition pour avoir une couche fine est donnée par

$$\frac{\Delta R_b}{R_b}=\frac{R_b-R_r}{R_b}<1. \tag{5.70}$$

Suivant Khoury et Weltman [2004a,b], nous pouvons écrire cette condition comme suit

$$\frac{\Delta R_b}{R_b}\approx\varepsilon=\frac{\phi_\infty-\phi_b}{\frac{3}{4\pi}k\Phi_b}<1 \tag{5.71}$$

où ε est appelée le *thin-shell parameter*[8] et Φ_b est le potentiel Newtonien à la surface du

8. La définition du paramètre ε est quelque peut différente de la définition donnée par Khoury et Weltman

corps.

– le champ scalaire n'atteint pas le minimum du potentiel à l'intérieur du corps et le champ n'est pas gelé du tout à l'intérieur du corps central. Ce régime est appelé le régime *thick-shell*.

La figure 5.11 représente qualitativement la différence entre les deux régimes. Dans le régime "thin-shell", nous pouvons remarquer que le champ est bien gelé autour de ϕ_b dans le corps alors que ce minimum du potentiel effective n'est pas atteint dans le régime "thick-shell".

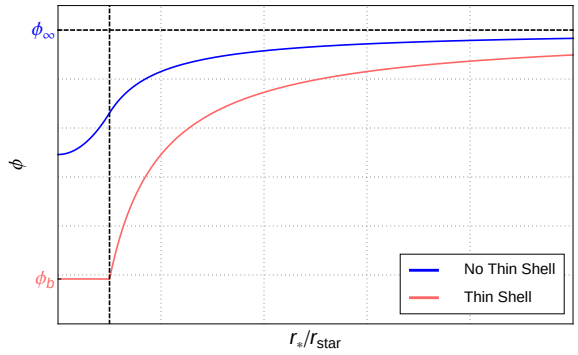

FIGURE 5.11 – Représentation de l'évolution du champ scalaire en fonction de la coordonnée radiale pour les deux régimes. En rouge (clair) : dans le régime "thin-shell", nous pouvons remarquer que le champ est gelé dans le minimum du potentiel à l'intérieur du corps central. En bleu (foncé) : dans le régime "thick-shell", le champ n'atteint pas le minimum du potentiel effectif dans l'étoile.

5.4.3 Profil du champ scalaire

Le profil du champ scalaire $\phi(r)$ a été dérivé analytiquement par Khoury et Weltman [2004a]. Une solution plus précise a ensuite été dérivée par Waterhouse [2006] et fut reprise par Tamaki et Tsujikawa [2008]. Ils introduisirent alors un troisième régime : le régime *no-shell* qui correspond essentiellement au cas du "thin-shell" dans la limite où le rayon de la couche fine s'annule. Ces solutions furent dérivées en faisant implicitement un bon nombre d'hypothèses :

– la solution a été dérivée en utilisant un espace-temps de Minkowski.
– en dehors du corps, la dérivée du potentiel effectif est linéarisée.
– dans le régime "thin-shell", la dérivé du potentiel effectif est également linéarisée à l'intérieur du corps.
– il faut supposer que $m_\infty R_b << 1$
– le facteur $A^4(\phi)$ est toujours approximé comme valant l'unité (ou en d'autres termes, on fait l'hypothèse que $k\phi << 1$).

[2004a,b] car l'action de départ n'est pas exactement la même. En particulier, notre champ scalaire ϕ est liée au champ scalaire de Khoury et Weltman [2004a,b] ϕ_{KW} par la relation $\phi = \frac{\phi_{KW}}{m_p}$ et par conséquent, notre constante de couplage k est reliée à leur constante de couplage β par $k = \sqrt{8\pi}\beta$. Avec ces relations, le paramètre "thin-shell" défini par Khoury et Weltman [2004a,b] $\varepsilon = \frac{\phi_{KW\infty} - \phi_{KWb}}{6\beta M_p \Phi_b}$ devient $\frac{\phi_\infty - \phi_b}{\frac{3}{4\pi} k \Phi_b}$.

La validité des hypothèse précédentes n'a jamais été vérifiée après coup en comparant les solutions analytiques avec les solutions numériques provenant de l'intégration du système d'équations complet (5.66). Finalement, Tsujikawa et al. [2009] ont dérivé le profil du champ en considérant une perturbation gravitationnelle. Nous ne considérerons pas cet effet ici car dans le cas du Système Solaire, il est complètement négligeable.

La solution extérieure au corps central dérivée avec les hypothèses mentionnées ci-dessus est donnée par [9]

$$\phi(r_*) = \phi_\infty - \frac{k_{\rm eff}}{4\pi}\frac{G_* M_b^*}{r_* c^2} e^{-m_\infty (r_* - R_b)} \tag{5.72}$$

où $k_{\rm eff}$ dépend du paramètre de "thin-shell" ε

$$\varepsilon = \frac{\phi_\infty - \phi_b}{\frac{3}{4\pi} k \Phi_b}\cdot \tag{5.73}$$

Deux régimes sont identifiés dépendant de la valeur de ε

– si $\varepsilon < \frac{1}{2} + \frac{1}{(m_b R_b)^2}$. Ce cas correspond au régime "thin-shell" et la constante de couplage effective est alors donnée par

$$\begin{aligned} k_{\rm eff} &= 3k\left[\frac{\Delta R_b}{R_b} + \frac{1}{m_b R_b}\right. & \text{(5.74a)} \\ &- \left.(\frac{\Delta R_b}{R_b})^2 - \frac{2}{m_b R_b}\frac{\Delta R_b}{R_b} - \frac{1}{(m_b R_b)^2}\right] \approx 3k\varepsilon\cdot \end{aligned}$$

– si $\varepsilon > \frac{1}{2} + \frac{1}{(m_b R_b)^2}$. Ce cas correspond au régime "thick-shell" et la constante de couplage effective est alors donnée par

$$k_{\rm eff} = k\cdot \tag{5.74b}$$

Les expressions analytiques pour la solution intérieure au corps central peuvent être trouvées par exemple dans Tamaki et Tsujikawa [2008] mais nous n'en aurons pas besoin ici car nous sommes uniquement intéressés par la solution extérieure qui représente la solution dans le Système Solaire.

La figure 5.12 représente une comparaison entre la solution analytique et la solution numérique du problème BVP complet (5.66) pour une situation correspondant au Soleil et avec une densité cosmologique de matière de $10^{-27}{\rm kg/m}^3$ pour un modèle qui fait apparaître un régime "thick-shell". Nous pouvons remarquer que la solution analytique est très bonne loin du Soleil mais cet accord se détériore dans le Soleil. Ceci est en grande partie lié au fait que la solution analytique est obtenue en négligeant le facteur $A^4(\phi)$ dans l'équation (5.66d). Cependant, pour la détermination des paramètres PPN, nous avons uniquement besoin de le solution extérieure. L'analyse de la figure 5.12 montre que la solution analytique peut être utilisée sans problème pour modéliser le Soleil dans le cas de théories produisant un régime "thick-shell".

Le cas d'un régime "thin-shell" autour du Soleil est très délicat à traiter numériquement. En effet, il n'est plus possible de résoudre numériquement le problème BVP complet. C'est principalement dû au fait que $\rho_b/\rho_\infty \sim 10^{30}$ ce qui signifie que pour obtenir un modèle qui présente un régime "thin-shell", la masse effective du champ scalaire dans le corps (m_b) doit être

9. Pour éviter toutes confusions, nous rappelons que m_b est la masse du champ scalaire autour du minimum du potentiel effectif à l'intérieur du corps et M_b^* est la masse du corps central en Einstein frame.

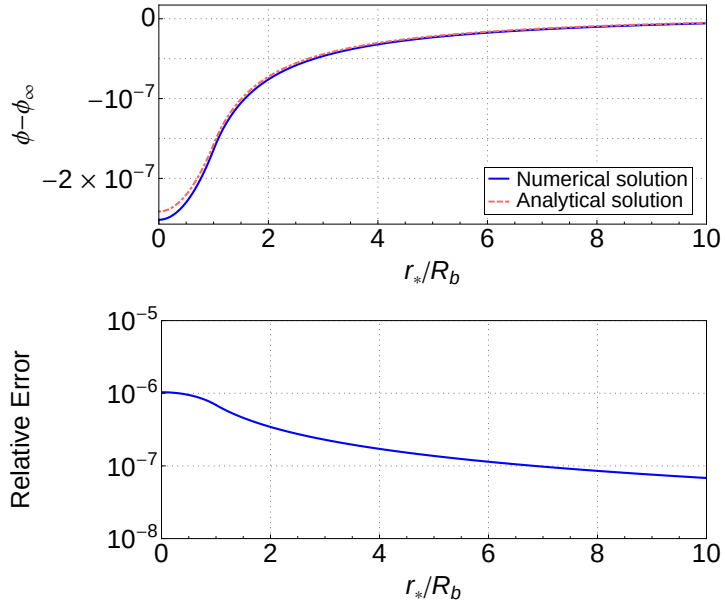

FIGURE 5.12 – Représentation de l'évolution du champ scalaire pour une situation corrspondant au Soleil pour un modèle caractérisé par les paramètres : $\Lambda = 10^{-9}$ GeV, $\alpha = 0.5$, $k = 1$ and $\rho_\infty = 10^{-27}\mathrm{kg/m}^3$. Avec ces paramètres, nous obtenons un régime "thick-shell" autour du Soleil.
Haut : comparaison du profil du champ obtenu numériquement en intégrant le problème BVP complet (5.66) et du profil analytique.
Bas : différence relative entre le profil obtenu numériquement et la solution analytique. Nous pouvons voir que la solution analytique est très bonne loin du Soleil mais elle est moins bonne dans le Soleil.

énorme (la relation (83) de Tsujikawa et al. [2009] donne $(m_b R_b)^2 \approx \frac{(\alpha+1)}{\varepsilon}[(\rho_b/\rho_\infty)^{1/(\alpha+1)} - 1]$). Le résultat engendré par cette masse effective énorme est que les variations du champ scalaire dans le corps sont extrêmement petites et souvent plus petites que la précision machine. Ceci signifie que le problème est extrêmement difficile à traiter numériquement. Le profil "thin-shell" fut néanmoins obtenu en solvant le problème complet par Babichev et Langlois [2010] mais dans des cas où le rapport des densités est de l'ordre de $10^{-2} - 10^{-4}$ (ce qui est loin des valeurs caractéristiques sans le Système Solaire).

Au lieu de résoudre le problème BVP complet, ce qui est extrêmement difficile à faire, nous avons traité une version simplifiée du problème constituée seulement de l'équation relative au champ scalaire. Ceci signifie que nous approximons l'espace-temps par une espace-temps de Minkowski (qui est une hypothèse également adoptée dans la dérivation d'une solution analytique), ce qui est une approximation valide étant donné les faibles champs gravitationnels dans le Système Solaire. Dans ce cas, le problème consiste à résoudre une équation différentielle du second ordre avec les conditions aux bords ($\phi'(r_* = 0) = 0$ et $\phi(r_* = \infty) = \phi_\infty$). Nous avons résolu ce problème par une méthode de shooting implémentée avec un intégrateur "stiff" en quadruple précision. Avec cette méthode, il est possible d'obtenir le profil du champ scalaire autour du Soleil.

La figure 5.13 représente une comparaison entre la solution analytique et la solution numérique obtenue en résolvant le problème BVP simplifié pour une situation correspondant au Soleil et avec une densité cosmologique de 10^{-27}kg/m^3 pour un modèle qui présente un régime "thin-shell". Nous pouvons remarquer que la solution analytique est relativement bonne loin du Soleil mais (comme dans le cas du "thick-shell") cette accord se dégrade dans le Soleil. Encore une fois, pour la détermination des paramètres PPN, nous avons uniquement besoin de la solution extérieure. La figure 5.13 montre que dans ce cas, la solution analytique peut être utilisé en bonne approximation.

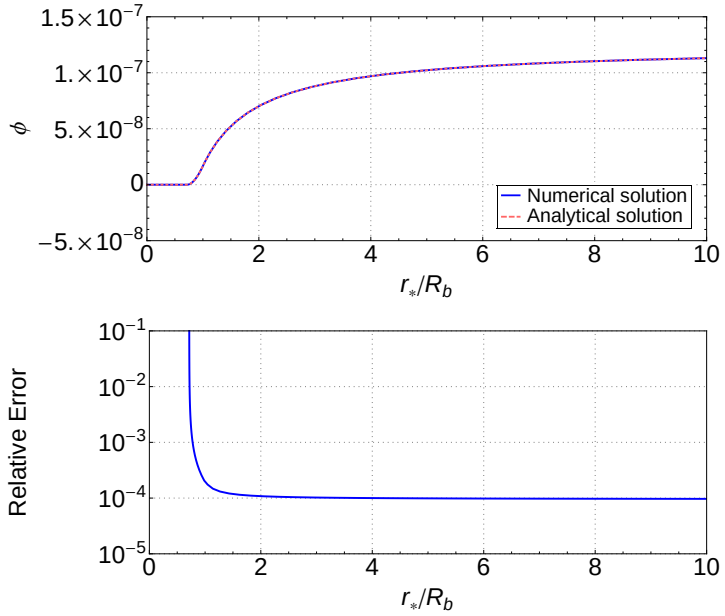

FIGURE 5.13 – Représentation de l'évolution du champ scalaire pour une situation correspondant au Soleil et pour un modèle caractérisé par les paramètres : $\Lambda = 10^{-2}$ GeV, $\alpha = 3.3$, $k = 1$ et $\rho_\infty = 10^{-27}\text{kg/m}^3$. Avec ces paramètres, nous obtenons un régime "thin-shell" autour du Soleil.
Haut : comparaison du profil du champ obtenu numériquement en résolvant le problème BVP simplifié avec le profil analytique.
Bas : différence relative entre la solution numérique et l'approximation analytique. Nous pouvons remarquer que la solution analytique est relativement bonne loin du Soleil mais elle est beaucoup moins efficace dans le Soleil.

5.4.4 Paramètres Post-Newtoniens

Dans le but de contraindre les paramètres qui caractérisent la théorie avec les observations réalisées dans le Système Solaire, il est utile de dériver la métrique observable en champs faible. Une fois que cette métrique sera déterminée, il sera possible de voir si oui ou non elle entre dans le formalisme Post-Newtonien et si oui, cela nous donnera l'expression des paramètres Post-Newtoniens. Comme nous l'avons indiqué à la relation (5.63), les paramètres Post-Newtoniens

pour une théorie tenseur-scalaire sans potentiel sont donnés par

$$\gamma - 1 = -2\frac{k^2}{4\pi + k^2}, \qquad \beta - 1 = 0\cdot \tag{5.75}$$

Comme nous l'avons montré à la section précédente, quand un potentiel est ajouté à la théorie, l'effet caméléon peut réduire la constante de couplage k qui est alors remplacée par une constante de couplage effective $k_{\rm eff}$ comme indiqué par la relation (5.74). Cependant, considérer que la théorie caméléon est une théorie Brans-Dicke avec une constante de couplage effective $k_{\rm eff}$ (tel que cela est explicitement réalisé dans les papiers originaux de Khoury et Weltman [2004a,b]) n'est pas correct. Au contraire, il faut calculer les paramètres Post-Newtoniens en suivant la procédure décrite par Damour et Esposito-Farese [1992]. Cette procédure est utilisée par Faulkner et al. [2007] mais ils ont utilisé une définition du paramètre Post-Newtonien en coordonnées de Schwarzschild, ce qui peut conduire à des erreurs puisque les paramètres Post-Newtoniens originaux sont définies dans la jauge Post-Newtonienne Standard (jauge SPN) [Will, 1993] dans laquelle la métrique est isotrope. Si les paramètres Post-Newtoniens sont constants, utiliser la métrique en coordonnées de Schwarzschild ou en jauge SPN ne change rien. Cependant, le paramètre γ tel que calculé par Faulkner et al. [2007] dépend de la coordonnée radiale et son expression dépend alors de la jauge utilisée. Nous allons expliciter cela en considérant que les paramètres Post-Newtoniens γ et β sont définis par la métrique en Jordan frame en jauge SPN (qui est isotrope) :

$$\begin{aligned} ds^2 \;\approx\; & -\left(1 - 2\frac{GM_b}{c^2\chi} + 2\beta\left(\frac{GM_b}{c^2\chi}\right)^2\right)dt^2 \\ & + \left(1 + 2\gamma\frac{GM_b}{c^2\chi}\right)\left(d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2\right) \end{aligned} \tag{5.76}$$

où χ est la coordonnée radiale isotrope en Jordan frame. Dans toute cette section, nous allons considérer des champs gravitationnels faibles et nous allons travailler au premier ordre Post-Newtonien. Dans ce contexte, le symbole $\approx$ insiste sur le fait que l'égalité en question n'est valide qu'au premier ordre Post-Newtonien. Au lieu d'utiliser des coordonnées isotropes, nous pouvons transformer la métrique en coordonnées de Schwarzschild [cette transformation de coordonnées pour des paramètres PN constants est dérivée dans Weinberg, 1972] en utilisant la transformation

$$r \approx \chi\left(1 + \gamma\frac{GM_b}{c^2\chi}\right)\cdot \tag{5.77}$$

Un calcul direct conduit à

$$\begin{aligned} ds^2 \;\approx\; & -\left(1 - 2\frac{GM_b}{c^2 r} + 2(\beta - \gamma)\left(\frac{GM_b}{c^2 r}\right)^2\right)dt^2 \\ & + \left(1 + 2\gamma\frac{GM_b}{c^2 r} - 2\gamma'\frac{GM_b}{c^2}\right)dr^2 + r^2 d\Omega^2, \end{aligned} \tag{5.78}$$

où $\gamma' = d\gamma/dr$ est la dérivée du paramètre γ par rapport à la coordonnée radiale de Schwarzschild. Ce simple calcul montre que lorsque nous avons à faire à des paramètres Post-Newtoniens qui dépendent de l'espace, il faut être prudent avec la jauge utilisée. En particulier, l'identification usuelle du paramètre γ en jauge de Schwarzschild n'est plus compatible avec la définition de γ en jauge SPN : une dérivée radiale de γ apparait dans la jauge de Schwarzschild. Ainsi, Faulkner

et al. [2007] ont utilisé les coordonnnes de Schwarzschild pour identifier le paramètre γ qui dépend de la coordonnée radiale sans prendre garde à une éventuelle contribution de γ. Cela signifie en particulier que l'expression incorrecte obtenue pour γ va différer de l'expression correcte qui aurait été obtenue en effectuant le calcul en coordonnées isotropes (en jauge SPN) qui est la jauge utilisée pour définir les paramètres Post-Newtoniens [Will, 1993].

Dans la suite, nous allons suivre la procédure décrite par Damour et Esposito-Farese [1992] en étant particulièrement prudent quant à la jauge utilisée. La variable χ se réfèrera à la coordonnée radiale en jauge isotrope et la variable r à la coordonnée radiale de Schwarzschild. Finalement, tout comme depuis le début de ce chapitre, l'étoile indique les quantités en Einstein frame. Nous démarrons donc avec la métrique en champ faible en Einstein frame en coordonnées isotropes

$$\begin{aligned} ds_*^2 &\approx -\left(1-2\frac{M_b^*}{m_p^2\chi_*}+2\left(\frac{M_b^*}{m_p^2\chi_*}\right)^2\right)dt_*^2 \\ &\quad +\left(1+2\frac{M_b^*}{m_p^2\chi_*}\right)(d\chi_*^2+\chi_*^2 d\Omega_*^2) \end{aligned} \tag{5.79}$$

obtenue car la limite en champs faibles de l'équation (5.11) est la même que pour la RG. Ensuite, nous pouvons réaliser la transformation conforme pour dériver la métrique en Jordan frame

$$ds^2 = A^2(\phi)ds_*^2\cdot \tag{5.80}$$

Pour calculer cette métrique en Jordan frame, il faut utiliser le profil du champ scalaire (5.72) en fonction de la coordonnée radiale de Schwarzschild en Einstein frame r_*. Ensuite, il faut utiliser la transformation entre les coordonnées de Schwarzschild et isotropes ($r_* \approx \chi_* + M_b^*/m_p^2$) pour exprimer le profil du champ scalaire en fonction de la coordonnée isotrope χ_*. Finalement, en utilisant l'expansion $A^2(\phi) = A^2(\phi_\infty)e^{2k(\phi-\phi_\infty)} = A_\infty^2(1+2k(\phi-\phi_\infty)+2k^2(\phi-\phi_\infty)^2)$ et les relations entre les quantités exprimées en Jordan et en Einstein frame [voir par exemple Dicke, 1962; Damour et Esposito-Farese, 1992] ($x^\mu = A(\phi_\infty)x_*^\mu = A_\infty x_*^\mu$ and $M_b^* = A_\infty M_b$), nous obtenons la métrique (5.76) avec

$$G = \frac{A(\phi_\infty)^2}{m_p^2}\left(1+\frac{kk_{\rm eff}}{4\pi}\right)e^{-m_\infty(\chi-\chi_b)} \tag{5.81a}$$

$$\gamma = \frac{4\pi - kk_{\rm eff}e^{-m_\infty(\chi-\chi_b)}}{4\pi + kk_{\rm eff}e^{-m_\infty(\chi-\chi_b)}} \tag{5.81b}$$

$$\beta = 0\cdot \tag{5.81c}$$

En pratique, m_∞ est minuscule et la décroissance exponentielle peut être négligée ce qui conduit à l'expression

$$\gamma = \frac{4\pi - kk_{\rm eff}}{4\pi + kk_{\rm eff}}. \tag{5.82}$$

Cette approche donne le paramètre PN tel que défini par Will [1993] et évite toute confusion possible due à un choix de coordonnées pour définir le paramètre γ. Cependant, dans beaucoup de papiers [de Felice et Tsujikawa, 2010; Faulkner et al., 2007; Capozziello et Tsujikawa, 2008], cette dérivation est réalisée en coordonnées de Schwarzschild sans tenir compte du terme lié à la dérivée γ'. Pour cette raison, il y a certaines différences dans l'expression des paramètres PN qui sont donc liées au fait que la jauge utilisée n'est pas la même. Cette différence est présente

lorsqu'on compare notre résultat avec l'équation (5.50) de de Felice et Tsujikawa [2010] où un terme supplémentaire est présent au dénominateur de γ. Néanmoins, dans Faulkner et al. [2007]; Capozziello et Tsujikawa [2008], m_∞ est également supposé petit ce qui conduit à négliger les termes relatifs à la dérivée de γ. Par conséquent, l'expression de γ obtenue dans ces papiers est similaire à l'expression (5.82) (avec des différences qui sont liées au choix de l'action de départ comme nous l'avons indiqué dans la note de bas de page 6). Finalement, considérer que la théorie est équivalente à une théorie Brans-Dicke avec une constante de couplage donnée par $k_{\rm eff}$ (ce qui est réalisé par Khoury et Weltman [2004a,b] et qui n'est pas correct) conduit à l'expression

$$\gamma = \frac{4\pi - k_{\rm eff}^2}{4\pi + k_{\rm eff}^2} \tag{5.83}$$

qui est considérablement différente de l'expression (5.82) et qui conduit à une mauvaise estimation des paramètres Post-Newtoniens.

L'effet "thin-shell" a donc la propriété de réduire la déviation produite par le champ scalaire, En effet, si on est dans un régime "thin-shell", la déviation par rapport à la RG est quantifiée par la quantité

$$\gamma - 1 = -2\frac{kk_{\rm eff}}{4\pi + kk_{\rm eff}} \approx -6\frac{\varepsilon k^2}{4\pi + 3\varepsilon k^2}. \tag{5.84}$$

Ceci montre que des grandes valeurs de la constante de couplage k peuvent être compatibles avec les expériences du Système Solaire (telle que la mesure du délai Shapiro par Cassini (5.64)) si le paramètre ε est suffisamment petit. Ceci est probablement la grande nouveauté des champs caméléons car les grandes constantes de couplage k sont complètement exclues dans les théories Brans-Dicke. Si on utilise la relation (5.73), la dernière expression devient

$$\gamma - 1 = -2\frac{k(\phi_\infty - \phi_b)}{\Phi_b + k(\phi_\infty - \phi_b)}. \tag{5.85}$$

Il est possible de pousser le développement analytique plus loin en considérant que $\phi_\infty >> \phi_b$ (ce qui est justifié étant donné qu'il est montré par Tsujikawa et al. [2009] que $\phi_\infty/\phi_b = (\rho_b/\rho_\infty)^{1/(\alpha+1)} \sim 10^{30/(\alpha+1)}$ si on utilise la densité cosmologique et la densité du Soleil). Il est alors possible d'isoler $k\phi_\infty$ pour obtenir

$$k\phi_\infty = -\frac{\Phi_b(\gamma - 1)}{2 + (\gamma - 1)}. \tag{5.86}$$

Si on utilise la contrainte Cassini (5.64) sur le paramètre $\gamma - 1$ et si on prend la valeur du potentiel de Newton à la surface du Soleil $\Phi_b = 2.12\times10^{-6}$, nous obtenons la contrainte $k\phi_\infty \leq 2.12\times10^{-12}$. La valeur de ϕ_∞ est la valeur du champ qui minimise le potentiel effectif $V_{\rm eff}$ et est donnée par la relation (5.47). Pour des très faibles valeurs de ϕ_∞ (ce qui est le cas ici où on considère la densité cosmologique), nous pouvons utiliser une expansion de Taylor de la fonction W-Lambert $W_L(x) \approx x$ pour trouver la contrainte

$$k\left(\frac{\alpha\Lambda^{4+\alpha}}{m_p^\alpha k\rho_\infty}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \leq 2.12\times10^{-12}. \tag{5.87}$$

Résumons donc la discussion concernant les paramètres Post-Newtoniens. Le paramètre γ a été déterminé avec un grand soin quant à la jauge utilisée. L'expression de ce paramètre

est donnée par la relation (5.82) où k_{eff} dépend directement du paramètre "thin-shell" ε. Si $\varepsilon > \frac{1}{2} + \frac{1}{(m_b R_b)^2}$, nous sommes dans un régime "thick-shell" et la théorie est équivalente à une théorie Brans-Dicke. Dans ce cas, la contrainte Post-Newtonienne est classique et n'autorise que les très faibles couplages $k^2 \leq 10^{-4}$. Si $\varepsilon < \frac{1}{2} + \frac{1}{(m_b R_b)^2}$, nous sommes dans un régime "thin-shell" et la contrainte Cassini est alors donnée par la contrainte (5.87).

Pour les modèles à l'intérieur des régions de confiance à 95% obtenues par l'analyse de vraisemblance des données SNe Ia (voir à la section 5.3.3), nous avons calculé le paramètre de "thin-shell" ε donné par la relation (5.73). La figure 5.14 montre l'évolution de ce paramètre pour des modèles considérés à la section 5.3.3. Nous pouvons voir que tous les modèles considérés ont une valeur de ε qui est énorme par rapport à l'unité. Cela signifie que les modèles qui expliquent l'accélération de l'expansion cosmique ne présentent pas de régime "thin-shell" dans le cadre du Système Solaire. En conséquent, dans le Système Solaire, ces modèles sont équivalents aux théories Brans-Dicke et le mécanisme caméléon ne joue aucun rôle et nous obtenons une contrainte sur le couplage entre le champ scalaire et la matière qui est donnée par $k^2 < 10^{-4}$.

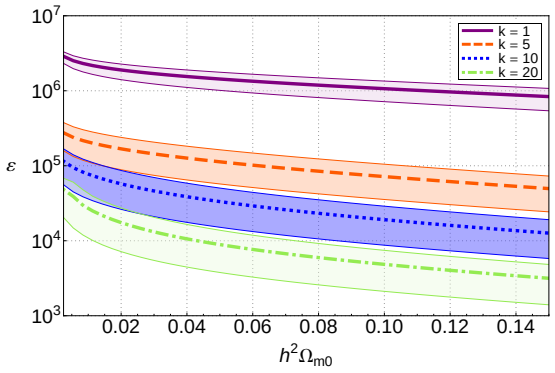

FIGURE 5.14 – Représentation du paramètre "thin-shell" ε pour les modèles qui satisfont l'analyse de vraisemblance des données SNe Ia (voir à la section 5.3.3). Les différentes lignes représentent différentes valeurs de la constante de couplage et les régions hachurées représentent différentes valeurs de α entre 0.5 et 3.

Une autre façon de percevoir l'incompatibilité entre les observations cosmologiques et les observations réalisées dans le Système Solaire est de prendre le plan (α, Λ) qui est déjà représenté à la figure 5.3. Avec les relations (5.82) et (5.74), il est possible de calculer le paramètre Post-Newtonien γ pour différents modèles caractérisés par trois paramètres Λ, α and k (on considère une densité cosmologique observée de l'ordre de 10^{-27} kg/m^3). La figure 5.15 représente les régions dans l'espace des paramètres (représenté dans le plan (α, Λ)) qui sont compatibles avec la contrainte sur γ provenant de Cassini (5.64) pour différentes valeurs de la constante de couplage k. Plusieurs remarques doivent être faites. Tout d'abord, nous pouvons remarquer que les hautes constantes de couplage ne sont pas complètement rejetées par l'analyse des observations réalisées dans le Système Solaire. Par exemple, $k = 1$ ou $k = 10^4$ sont complètement exclues dans le cadre des théories tenseur-scalaire sans potentiel (théories Brans-Dicke) tandis que nous pouvons remarquer que ces constantes de couplage peuvent satisfaire les contraintes Post-Newtoniennes dans un certain domaine de l'espace des paramètres (α, Λ). En particulier, pour des faibles valeurs de Λ et des hautes valeurs de α, l'effet caméléon est suffisamment

fort pour réduire la charge scalaire k_{eff} de telle façon que le paramètre γ (5.82) satisfasse la contrainte Cassini. C'est certainement la véritable percée des papiers originaux de Khoury et Weltman [2004a,b]. Néanmoins, nous pouvons remarquer à la figure 5.15 qu'il n'est pas possible d'expliquer l'accélération de l'expansion cosmique et de satisfaire les contraintes obtenues avec les observations du Système Solaire pour le même jeu de paramètres (à l'exception des faibles valeurs de constantes de couplage k mais nous retombons alors dans des théories Brans-Dicke...). En effet, il n'y a pas d'intersection entre les courbes qui représentent la relation entre Λ et α imposée par les observations cosmologiques et le domaine autorisé par les contraintes PPN.

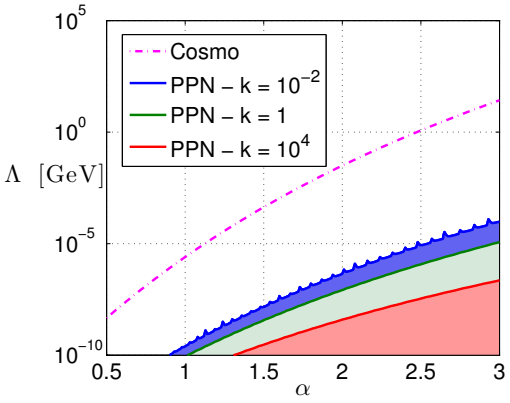

FIGURE 5.15 – Représentation des couples (α, Λ) admissibles par rapport à la contrainte de Cassini (5.64) pour différentes valeurs de la constante de couplage k et représentation des couples (α, Λ) nécessaires pour expliquer les observations cosmologiques. La densité à l'infini du Système Solaire est $\rho(r = \infty) = 10^{-27}\text{kg/m}^3$ qui correspond à la densité cosmologique de matière.

Dans le calcul du paramètre Post-Newtonien de la figure 5.15, la densité de matière à l'infini du Système Solaire est supposée être la densité cosmologique de matière ($\rho(r = \infty) = \rho_0$). Cette situation est une situation simplifiée. En réalité, la situation est beaucoup plus complexe étant donné que le Système Solaire n'est pas directement plongé dans un fluide cosmologique mais fait partie d'une galaxie qui elle-même est une partie d'un cluster de galaxies etc... Par conséquent, le champ scalaire va avoir une évolution différente à toutes les étapes entre le Système Solaire et les échelles cosmologiques (en passant par les échelles galactiques, des clusters de galaxies, des superamas, etc...). Toute cette modélisation est relativement complexe et ne sera pas abordée ici. Néanmoins pour avoir une certaine idée de ce que cela changerait, nous avons calculé le paramètre Post-Newtonien en supposant que la densité à l'infini du Système Solaire est donnée par la densité galactique à la distance du Système Solaire. Nous avons supposé que la densité galactique est de $\rho_{gal} \approx 10^{-21}\text{kg/m}^3$ à la distance du Système Solaire par rapport au centre galactique. La figure 5.16 représente le domaine des paramètres admissible dans le plan (α, Λ) si on suppose que la densité à l'infini du Système Solaire est la densité galactique $\rho(r = \infty) = \rho_{gal}$. Nous pouvons voir que la situation est quelque peu meilleure que lorsque nous avons considéré la densité cosmologique. L'aire des régions qui satisfont les contraintes Post-Newtoniennes est plus grande mais il n'y a toujours pas d'intersection entre la relation cosmologique et la région admissible par les contraintes Post-Newtoniennes.

Les résultats de cette analyse est que, à l'échelle du Système Solaire, l'effet caméléon peut

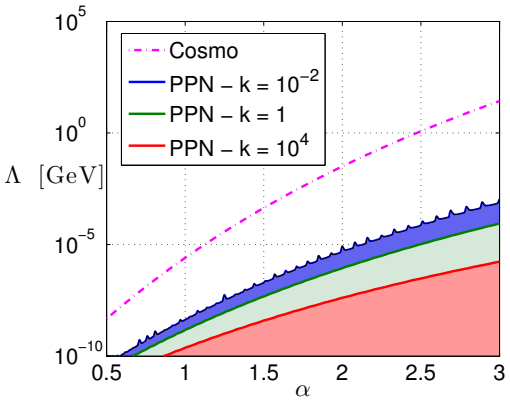

FIGURE 5.16 – Représentation des couples (α, Λ) admissibles par rapport à la contrainte Cassini (5.64) pour différentes valeurs de la constante de couplage k et représentation des couples (α, Λ) nécessaires pour expliquer les observations cosmologiques. La densité à l'infini du Système Solaire est $\rho(r = \infty) = 10^{-21}\text{kg/m}^3$ qui correspond à la densité galactique de matière.

autoriser des hautes constantes de couplage k qui sont normalement exclues dans les analyses de Brans-Dicke à la condition que les paramètres α et Λ soient dans le domaine admissible (caractérisé par des hautes valeurs de α et des faibles valeurs de Λ). Cependant, nous avons montré qu'il n'existait pas d'intersections entre les modèles qui expliquent les observations cosmologiques et les modèles autorisés par les observations du Système Solaire.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié en détails les champs caméléons qui correspondent à une théorie tenseur-scalaire avec un potentiel. Cette analyse a été effectuée à deux échelles très différentes : aux échelles cosmologiques et dans le Système Solaire. Nous avons dérivé des contraintes combinées sur les modèles des champs caméléons qui furent introduits par Khoury et Weltman [2004a,b]. Nous nous sommes concentrés uniquement sur le modèle original qui est caractérisé par une fonction de couplage exponentielle $A(\phi) = e^{k\phi}$ et par un potentiel de Ratra-Peebles [Ratra et Peebles, 1988]. Nous avons dérivé l'expression des observables de façon non-ambigüe : la distance luminosité et les paramètres Post-Newtoniens.

Aux échelles cosmologiques, nous avons dérivé les équations d'évolution cosmologique à partir de la métrique de FLRW. Dans ces équations, nous avons été particulièrement vigilants à utiliser les densités et les pressions observables définies en Jordan frame bien que les équations soient dérivées en Einstein frame. En utilisant les données des Supernovae Ia [Kowalski et al., 2008] (jamais utilisées auparavant pour contraindre les champs caméléons), nous avons dérivé les régions de confiance pour la constante de couplage k, pour les paramètres qui caractérisent le potentiel et pour le paramètre de densité de matière aujourd'hui Ω_{m0}. Nous avons alors considéré les modèles dans cette région de confiance pour dériver une relation entre les deux paramètres qui caractérisent le potentiel de Ratra-Peebles (Λ et α). Un résultat original de cette étude est que la relation trouvée (5.43) étend la relation obtenue dans les modèles de quintessence (caractérisés

par une constante de couplage qui s'annule $k = 0$) [Schimd et al., 2007]. Une analyse détaillée de l'évolution cosmologique a été présentée. En particulier, la contribution du champ scalaire a été modélisée par un fluide effectif d'énergie sombre en RG. Nous avons présenté l'évolution du paramètre de l'équation d'état de ce fluide ω_{DE} et nous avons montré que la dérivée de ce paramètre peut devenir positive ce qui permettrait de distinguer des théories minimalement couplées (quintessence) avec des théories non-minimalement couplées. De plus, nous avons montré que pour des hautes constantes de couplage k, l'expansion cosmique est essentiellement produite par le couplage non-minimal et non par la self-interaction du champ scalaire. Finalement, nous avons identifié deux régimes dynamiques qui permettent d'expliquer l'accélération cosmique. Ces deux régimes sont caractérisés par deux minima dans la courbe du χ^2 comme indiqué à la figure 5.2.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous avons étudié la configuration du Système Solaire dans le cadre des champs caméléons. Le modèle considéré est extrêmement simple : un Soleil sphérique statique. Nous avons déterminé numériquement le profil du champ scalaire en intégrant le jeu complet d'équations qui forme un BVP. Cette approche numérique est originale et permet de comparer les résultats (numériques) obtenus avec les approximations analytiques proposées dans la littérature. En particulier, pour une situation semblable à celle du Soleil, nous avons montré que les solutions analytiques sont relativement bonnes hors du corps central mais deviennent nettement moins bonnes à l'intérieur de celui-ci. Ces simulations ont confirmé que le régime "thin-shell" peut apparaître dans l'environnement du Soleil. En utilisant les expressions analytiques hors du corps central, nous avons dérivé les paramètres Post-Newtoniens. Dans cette dérivation, nous avons été particulièrement prudent quant à la jauge utilisée pour définir le paramètre Post-Newtonien γ et nous avons comparé notre résultat avec les expressions disponibles dans la littérature. Dans le cas d'une situation avec un "thin-shell", nous avons confirmé que la charge scalaire du corps central peut être réduite de façon drastique par la relation $k_{\text{eff}} = 3\varepsilon k$ où ε est le paramètre de "thin-shell". Contrairement à ce qui est dit dans Khoury et Weltman [2004a,b], nous avons montré que dans ce cas, la théorie n'est pas équivalente à une théorie de Brans-Dicke avec une constante de couplage effective k_{eff}. La conséquence directe est que la contrainte sur le paramètre γ est différente de celle dérivée dans les papiers originaux sur les caméléons. Néanmoins, nous avons confirmé que dans le cas d'un régime "thin-shell", la réduction de la charge scalaire entraine une réduction de la déviation du paramètre Post-Newtonien γ de sa valeur en RG. Nous avons alors montré que des hautes valeurs de la constante de couplage k peuvent éventuellement satisfaire les contraintes du Système Solaire alors que ces valeurs étaient totalement exclues lorsqu'on considérait des théories tenseur-scalaire habituelles.

Pour les modèles qui se situent dans les régions de confiance à 2σ pour l'analyse de vraisemblance des données SNe Ia, nous avons calculé le paramètre "thin-shell" ε. Nous avons trouvé que pour tous ces modèles, ce paramètre est toujours énorme devant l'unité ($\varepsilon >> 1$). Ceci signifie que les modèles qui expliquent l'accélération cosmique ne présentent pas de régime "thin-shell" dans le Système Solaire. La théorie est dès lors équivalente à une théorie de Brans-Dicke dans le Système Solaire et les contraintes Post-Newtoniennes impliquent directement que seules les très faibles valeurs de la constante de couplage sont admissibles. Une autre présentation des contraintes combinées est présentée sous la forme de région admissible dans le plan (α, Λ). Dans ce plan, nous avons montré qu'il n'y a pas d'intersections entre le domaine admissible par les observations cosmologiques et le domaine admissible par les observations du Système Solaire à l'exception des très faibles valeurs de la constante de couplage k.

La conclusion principale de ce chapitre est que les champs caméléons (si on considère le modèle original de Khoury et Weltman [2004a,b]) ne sont pas en mesure d'expliquer l'accélération de l'expansion cosmique et de satisfaire aux contraintes du Système Solaire en même temps. Ce résultat fort fut l'objet d'une publication [Hees et Füzfa, 2012]. Cette conclusion n'est évidemment valide que pour le modèle original caractérisé par une fonction de couplage exponentielle et un potentiel de Ratra-Peebles. Il est intéressant de se poser la question de la robustesse de ce résultat. Pour ce faire, il faudrait envisager d'autres types de potentiel (comme par exemple le potentiel supergravifique SUGRA [Brax et Martin, 2000]) et d'autres types de fonction de couplage (comme par exemple une fonction de couplage gaussienne $A(\phi) = e^{k\phi^2/2}$) qui pourraient éventuellement conduire à des conclusions différentes. Cependant, il est fort probable que les potentiels de type attracteur qui présentent une forme semblable au potentiel de Ratra-Peebles soient également exclus par une analyse des contraintes combinées (en particulier le potentiel SUGRA avec la fonction de couplage exponentielle). Par contre, il est illusoire d'étendre directement les conclusions obtenues ici pour des potentiels de formes complètement différents comme par exemple un potentiel quadratique. De même, la considération d'une fonction de couplage différente peut changer complètement le résultat présenté ici (par exemple une fonction de couplage gaussienne produirait un couplage $k(\phi)$ proportionnel au champ scalaire fort différent du couplage constant considéré ici). Il y a donc un intérêt à étendre l'analyse effectuée dans le cadre de cette thèse à d'autres potentiels et fonctions de couplage.

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

"Les passions sont les vents qui enflent les voiles du navire ;
Elles le submergent quelquefois, mais sans elles il ne pourrait voguer."
Voltaire

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de cette thèse, la théorie de la Relativité Générale est un superbe édifice qui est bien vérifié expérimentalement. Néanmoins, il existe un certain nombre de motivations pour poursuivre les tests de cette théorie et pour considérer des théories alternatives de la gravitation. Ces motivations (développées en long et en large dans l'introduction) proviennent de considérations théoriques concernant la quantification de l'interaction gravitationnelle et l'unification de la gravitation avec les autres interactions fondamentales mais également de considérations expérimentales notamment liées à la cosmologie.

Dans cette thèse, nous avons développé des outils qui permettent de simuler différentes observations dans diverses théories de la gravitation. Ces simulations permettent ainsi d'identifier les effets produits par des hypothétiques théories alternatives de la gravitation, ce qui permet de tester ces théories alternatives (par une comparaison des simulations avec des observations réalisées) ou encore de dériver le niveau de précision auquel il sera permis de les détecter ou de les contraindre en considérant une expérience donnée. Nous avons considéré deux types d'observations complètement différentes : des observations réalisées dans le Système Solaire notamment grâce aux missions spatiales (observations de Range, Doppler et de type astrométrique) et des observations de luminosité de Supernovae Ia réalisées au niveau cosmologique. Même si ces deux types d'observations font appel à une physique relativement différente, la philosophie poursuivie est la même : simuler des observables (au sens relativiste du terme, c'est-à-dire des quantités invariantes de jauge) qui puissent être comparées aux observations réalisées. Nous avons d'ailleurs montré dans le chapitre 5 que la combinaison des deux types d'observations considérées dans ce travail peut être extrêmement intéressante en ce qui concerne les tests de la gravitation. A cet égard, je pense qu'il est intéressant de pousser cette combinaison le plus loin possible, ce qui fournit une motivation pour le développement de collaborations entre cosmologistes et physiciens du Système Solaire.

Cette remarque générale étant faite, nous allons maintenant conclure et énoncer des perspec-

tives dans les deux domaines (Système Solaire et cosmologie) séparément.

Système Solaire

Dans le cadre du Système Solaire, nous avons développé un outil original qui permet de dériver la signature incompressible produite par une théorie alternative de la gravitation sur certaines observations spatiales. Les observations qui peuvent être simulées sont le Range, le Doppler et des observations astrométriques (de type VLBI par exemple). La procédure suivie est relativement flexible car tout est simulé à partir de la métrique de l'espace-temps si bien qu'il est relativement aisé de changer la théorie de la gravitation en changeant la métrique dans le logiciel. Une procédure générale pour dériver des contraintes sur des théories alternatives en utilisant les outils développés dans le cadre de ce travail consiste en 4 étapes et est décrite à la section 1.3. En résumé, il s'agit de dériver la signature incompressible produite par la théorie alternative de la gravitation en simulant une situation simplifiée où seuls les éléments principaux sont considérés. Ensuite, il s'agit de faire une recherche de cette signature dans les résidus obtenus après une analyse standard en Relativité Générale de données réelles. Dans ce travail, la première partie de cette procédure a été développée (et est présentée aux chapitres 2 et 3). Ensuite au chapitre 4, nous avons utilisé ces logiciels pour dériver des signatures incompressibles de théories alternatives (présentées succinctement à la section 1.5) dans deux situations : des observations radioscience de Cassini et des observations VLBI de Saturne. Notons que la démarche utilisée pour les observables radioscience fut l'objet d'une publication [Hees et al., 2012b]. Dans le chapitre 4, nous avons également dérivé des contraintes provenant de l'analyse des précessions des périhélies à partir des éphémérides INPOP [Fienga et al., 2011]. Ces contraintes sont toutes originales à l'exception de celles dérivées dans le cadre de l'effeet de champ externe de MOND [Blanchet et Novak, 2011b].

La perspective la plus évidente et la plus importante qui s'ouvre à la suite de cette thèse concerne la seconde partie de la procédure décrite à la section 1.3 qui consiste à utiliser les signatures incompressibles présentées au chapitre 4 et à les rechercher dans des résidus d'analyses de données réelles. Ceci ne peut évidemment être envisagé que si on peut avoir accès aux données réelles, avec l'aide et l'expérience de spécialistes en traitement de ce type de données (qui est loin d'être trivial). Les résultats obtenus dans le cadre de cette thèse donnent une réelle motivation et indiquent qu'il y a un réel intérêt à réaliser ce type d'analyses. De plus, ils fournissent un excellent point de départ pour la suite.

Outre les signatures incompressibles qui pourront servir de base pour des analyses futures, les simulations effectuées au chapitre 4 nous ont permis de dériver un certain nombre de résultats (voir à la section 4.9) que nous allons résumer ici. Tout d'abord, rappelons que nous avons considéré deux situations expérimentales : nous avons simulé des observations radioscience entre la Terre et la sonde Cassini lors de son voyage interplanétaire entre Jupiter et Saturne et nous avons simulé des observations VLBI du système Saturnien observé depuis la Terre. Pour ces deux situations, nous avons considéré quatre théories alternatives de la gravitation : des théories de gravité Post-Einsteinienne, un effet de champ externe présent dans les théories MOND, l'Extension du Modèle Standard et une théorie tenseur-scalaire de type "John+George". Pour ces

quatre théories, la comparaison de l'ordre de grandeur de la signature incompressible avec la précision de l'observation nous a permis de dériver la précision atteignable sur les estimations des paramètres qui caractérisent ces théories si une analyse complète des données était réalisée. De plus, comme nous l'avons indiqué au chapitre 4, ces précisions nous donnent également une idée de l'ordre de grandeur des valeurs maximales que peuvent prendre les paramètres en question. En effet, si un des paramètres était plus grand que les valeurs obtenues, cela produirait un signal inexpliqué dans les données. Nous allons résumer très brièvement les résultats obtenus pour les quatre théories :

- théories PEG : les précisions atteignables par une analyse des données Range et Doppler de Cassini sur les paramètres PEG sont données par la table 4.2. Ces valeurs donnent aussi une idée des ordres de grandeur des valeurs maximales que peuvent prendre ces paramètres. Les contraintes obtenues en considérant les observations VLBI du système Saturnien sont nettement moins bonnes à l'exception de celles sur les paramètres χ_1 et χ_2. Nous avons également montré que les paramètres entrant dans le potentiel ϕ_N (4.9a) influencent très peu la propagation de la lumière et il est donc raisonnable de négliger la modification de la propagation de la lumière quand on s'intéresse à ces derniers. C'est ce qui est notamment réalisé dans l'étude de la précession des périhélies dont les résultats sont présentés à la table 4.1. Les contraintes les plus performantes sur les paramètres de ϕ_N sont d'ailleurs obtenues par les éphémérides.
- l'effet de champ externe provoqué par une théorie MOND : nous avons montré que ni l'analyse des données radioscience de Cassini ni les analyses des données VLBI du système Saturnien ne donnent des résultats suffisamment précis pour contraindre le paramètre Q_2 qui caractérise cet effet. Les contraintes provenant des précessions des périhélies obtenues par Blanchet et Novak [2011b] (et rappelées à la section 4.4.2) sont beaucoup plus performantes. Nous avons par ailleurs montré que l'effet de champ externe sur la propagation de la lumière est complètement négligeable ce qui explique entre autre pourquoi les contraintes provenant de la dynamique orbitale sont les plus fortes.
- Extension du Modèle Standard (SME) : nous avons dérivé numériquement les combinaisons linéaires qu'il est possible de contraindre par l'analyse de la radioscience de Cassini (4.35) et par l'analyse des données VLBI du système Saturnien (4.37). Nous avons également déterminé la précision atteignable lors d'une analyse des données de Cassini sur ces combinaisons linéaires. Ces précisions atteignables établies à la table 4.5 donnent aussi une idée de l'ordre de grandeur des valeurs maximales autorisées pour ces combinaisons linéaires. Nous avons montré que cette analyse fournit des contraintes qui sont du même ordre de grandeur que les contraintes obtenues par une analyse de la précession des périhélies (rappelées à la section 4.5.2). Par contre, l'analyse des observations VLBI est légèrement moins précise mais elle reste intéressante car elle permet de contraindre d'autres combinaisons linéaires, ce qui permettrait de décorréler certains paramètres. Finalement, nous avons montré que la propagation de la lumière est relativement peu influencée par les paramètres SME (à l'exception de $\alpha/M(a_{\text{eff}})_T$).
- une théorie tenseur-scalaire de type "John+George" : les précisions atteignables par une analyse des données Range et Doppler de Cassini sur les paramètres qui caractérisent cette théorie sont données par la table 4.7. Ces valeurs donnent aussi une idée de l'ordre de grandeur des valeurs maximales que peuvent prendre ces paramètres. Nous avons montré que les observations VLBI de Saturne fournissent des contraintes qui sont du même ordre

de grandeur. De plus, nous avons établi que trois des quatre paramètres qui entrent dans la métrique influencent grandement la propagation de la lumière. Pour cette raison, il faut être très prudent dans l'analyse des contraintes provenant des précessions des périhélies (données à la table 4.6) mais qui sont moins prometteuses que des analyses de données radioscience.

Notons que les résultats radioscience dérivés dans le cadre des théories PEG et pour l'effet de champ externe de MOND furent également publiés [Hees et al., 2012b]. De même les résultats radioscience dérivés dans le cadre de la théorie "John+George" furent également publiés dans Bruneton et al. [2012].

Ces quelques exemples montrent le type d'analyse qu'il est possible d'effectuer avec les logiciels développés dans le cadre de cette thèse. Il est évident que ce type d'analyse peut être répété pour d'autres situations et d'autres théories alternatives ouvrant potentiellement un grand nombre de possibilités d'analyses.

Nous allons citer ici quelques exemples qu'il serait intéressant de considérer à l'aide de l'outil développé dans ce travail. Tout d'abord, n'importe quelle théorie alternative de la gravitation peut être considérée à partir du moment où la métrique de l'espace-temps est connue. Par exemple, certaines théories $f(R)$ peuvent être considérées directement [Hashemi et Saffari, 2011; Saffari et Rahvar, 2008; Capozziello et al., 2007b; Chiba et al., 2007; de Felice et Tsujikawa, 2010]. De façon générale, la métrique peut être dérivée de l'action des théories alternatives (de la même façon que nous avons dérivé la métrique des champs caméléons au chapitre 5), ce qui nous permet de pouvoir considérer un très grand nombre de théories [pour de nombreux exemples, voir Clifton et al., 2012].

Un autre exemple intéressant d'utilisation de nos logiciels concerne la détermination d'effets cosmologiques dans le Système Solaire. A ce titre, Kopeikin et al. [2001]; Kopeikin [2010, 2012]; Ramírez et Kopeikin [2002] proposent une extension du formalisme standard de l'IAU [décrit dans Soffel et al., 2003] pour tenir compte des effets locaux de l'expansion de l'Univers. Il serait donc particulièrement intéressant de voir à partir de quel niveau de précision (sur les observations spatiales) ces effets deviennent importants (et par conséquent doivent être corrigés) et si éventuellement les futures missions spatiales offrent la possibilité de mesurer directement certains paramètres cosmologiques.

Finalement, il serait intéressant de considérer l'effet Lense-Thirring. Cet effet découvert par Lense et Thirring [1918] est une prédiction de la Relativité Générale qui apparaît autour des corps en rotation. Autour de tels corps, l'espace-temps est entrainé par le mouvement de rotation ce qui entraine des perturbations notamment dans la dynamique orbitale et dans le comportement des gyroscopes. L'effet de Lense-Thirring sur les gyroscopes a été détecté récemment par la mission spatiale *Gravity Probe B (GPB)* [Everitt et al., 2011] tandis que l'effet sur la dynamique orbitale a été détecté avec des satellites terrestres [Ciufolini et Pavlis, 2004] [1]. Dans les analyses de Iorio et al. [2011]; Iorio [2011b], il est notamment montré que l'effet Lense-Thirring du Soleil peut produire une contribution non-négligeable sur les mesures de Range entre la Terre et les autres planètes du Système Solaire (par exemple de l'ordre de 10 m pour le Range entre la Terre

1. L'incertitude avec laquelle cet effet fut observé est toujours l'objet d'un débat entre Ciufolini et al. [2012] et Iorio et al. [2011] (voir aussi les références associées).

et Mercure). Il serait intéressant de confirmer ces résultats en utilisant notre approche (l'approche de Iorio [2011b] utilise une définition dépendante de coordonnées du Range, ne considère que la dynamique orbitale et pas la propagation de la lumière et ne réalise pas l'ajustement des conditions initiales) et ainsi déterminer les missions pour lesquelles il est important de tenir compte de cet effet. D'autre part, il a été proposé de déterminer le moment angulaire de Jupiter en mesurant l'effet Lense-Thirring avec la mission Juno [Iorio, 2010, 2011a; Helled et al., 2011; Finocchiaro et al., 2011] [2]. Là encore, il pourrait être intéressant d'utiliser nos logiciels pour déterminer si cela est envisageable et si oui avec quelle précision.

Pour terminer sur les perspectives concernant le Système Solaire, précisons qu'il nous est actuellement possible de simuler un grand nombre de situations mais une classe importante de situations ne peut être considérée à l'aide de nos logiciels : il s'agit des observations réalisées depuis la Terre de satellites en orbite autour de celle-ci (y compris la Lune). La raison pour laquelle il n'est actuellement pas possible de réaliser de telles simulations est expliquée dans la section 2.6 : les planètes sont simulées comme étant des masses ponctuelles (le tout modélisé dans un seul jeu de coordonnées). Par conséquent, il est actuellement impossible d'introduire un observateur à la surface de la Terre. A mon sens, ce problème peut être résolu en introduisant un référentiel local (qui serait réalisé par une tétrade qui permet d'introduire des coordonnées de Fermi) dans lequel il serait possible d'introduire un modèle d'observateur (par exemple situé à une distance fixe du centre de la planète et en rotation à vitesse angulaire constante). Ce développement du logiciel demande un travail relativement conséquent qui a un intérêt certain pour pouvoir également simuler les sondes en orbite autour de la Terre de même que le Lunar Laser Ranging.

Finalement, rappelons que actuellement, le logiciel ne tient pas compte d'une éventuelle violation du principe d'équivalence fort (au sens de l'effet de Nordtvedt) dans les équations du mouvement des corps possédant une énergie de liaison gravitationnelle non négligeable (c'est-à-dire les planètes). Il s'agit là d'une limitation du logiciel dont aucune solution acceptable n'a été trouvée pour le moment (voir la discussion de la section 2.6).

Les quelques perspectives évoquées ci-dessus montrent qu'il existe un potentiel certain dans la suite de ce travail. La perspective la plus intéressante (mais également la plus conséquente) reste certainement la considération d'analyse de données réelles.

Cosmologie

Dans le cadre de la cosmologie, nous avons adapté un outil qui permet d'ajuster les paramètres cosmologiques et les paramètres qui caractérisent des théories alternatives de la gravitation à partir des observations des Supernovae Ia [3]. Nous avons utilisé cet outil dans le cadre d'une analyse des champs caméléons au chapitre 5. Plus précisément, la théorie considérée est celle proposée par Khoury et Weltman [2004a,b] : une théorie tenseur-scalaire avec une fonction de couplage

2. Juno est une mission spatiale de la NASA qui est partie en 2011 pour Jupiter [NASA, 2012].

3. L'outil initial développé par A. Füzfa qui permettait de considérer des théories de quintessence a été étendu pour tenir compte du couplage non-minimal.

exponentielle (dont la constante de couplage n'est pas nécessairement petite devant l'unité) et un potentiel de Ratra-Peebles. Cette théorie est motivée par des considérations théoriques provenant des théories $f(R)$ ou de limite à basse énergie de théories à dimensions supplémentaires. Cependant, une analyse naïve des contraintes post-newtoniennes pour cette théorie semble indiquer que la constante de couplage k doit être très petite devant 1. Le mécanisme caméléon permet de s'affranchir de cette contrainte ($k << 1$) grâce à un mécanisme d'écrantage : les déviations par rapport à la Relativité Générale peuvent donc être cachées dans le Système Solaire (même pour des grandes valeurs de la constante de couplage k), mais se révéler à de grandes échelles ce qui permettrait d'expliquer l'accélération de l'expansion cosmique. Pour cette théorie bien particulière, nous avons ajusté le modèle sur les données Supernovae Ia (ce qui n'avait jamais été réalisé préalablement), nous avons étudié en détails la dynamique cosmologique et nous avons dérivé les contraintes obtenues en considérant les observations du Système Solaire. Les conclusions détaillées de cette analyse se trouvent à la section 5.5 et furent l'objet d'une publication [Hees et Füzfa, 2012]. En résumé, nous avons dérivé les régions des paramètres qui sont compatibles avec les observations de luminosité des Supernovae Ia et nous avons montré que ces régions n'étaient pas compatibles avec les régions des paramètres qui satisfont les contraintes du Système Solaire. Le résultat original principal obtenu est que cette théorie permet soit d'expliquer l'expansion cosmique, soit de satisfaire les contraintes du Système Solaire (même pour des constantes de couplage "grandes" par rapport à 1, ce qui est la véritable nouveauté des champs caméléons) mais qu'elle ne permet pas de réconcilier les observations réalisées à ces deux échelles différentes. Evidemment, comme nous l'avons mentionné dans la section 5.5, cette conclusion n'est valide que pour la fonction de couplage et le potentiel considérés et il est évidemment très aisé de refaire le même type d'analyses en changeant l'une ou l'autre de ces fonctions. En particulier, considérer un potentiel supergravifique (SUGRA) serait relativement direct. Il serait également très intéressant d'étudier le cas d'un potentiel quadratique (plus familier d'un point de vue de la physique des particules) et de voir si un effet caméléon peut se produire avec un tel potentiel (ce type de potentiel est notamment considéré dans des modèles où l'énergie noire est expliquée par des fluctuations du champ scalaire inflationnaire [Ringeval et al., 2010]).

Néanmoins, je pense qu'il serait encore plus intéressant de modifier les outils développés pour étudier les autres mécanismes d'écrantage décrits à la section 5.1 : le mécanisme symétron et le mécanisme de Vainshtein. En effet, le principe de l'analyse reste le même : étudier le comportement cosmologique en observant si la théorie permet d'expliquer l'expansion cosmique et comparer cette analyse à une analyse des contraintes du Système Solaire. Le mécanisme symétron est particulièrement intéressant dans le cadre de modèles inflationnaires provoqués par des champs scalaires qui sont associés à des bosons de Higgs [voir pour un exemple Bezrukov et Shaposhnikov, 2008]. L'effet Vainshtein, quant à lui, est particulièrement intéressant dans l'étude des théories massives, à dimensions supplémentaires et des champs Galiléons [voir par exemple de Felice et al., 2012].

Pour terminer, une perspective intéressante au niveau cosmologique serait d'élargir les observations considérées. Dans cette thèse, nous nous sommes limités à analyser les données des Supernovae Ia. Il serait évidemment intéressant de compléter cette analyse en y ajoutant des observations CMB ou BAO.

De façon plus globale, nous avons montré que la combinaison de l'étude cosmologique et de

l'analyse des contraintes obtenus dans le Système Solaire est particulièrement riche et intéressante dans le cas des champs caméléons. Il serait donc réellement intéressant de combiner ces deux types d'étude de façon plus générale. A ce titre, il me semble naturel de considérer les théories que nous avons étudiées dans le cadre du Système Solaire à un niveau cosmologique.

Par exemple, on peut se demander si les théories PEG sont à même d'expliquer l'accélération de l'expansion cosmique et si oui, si la région des paramètres qui permet d'expliquer ce phénomène est compatible avec les observations du Système Solaire. La considération de PEG au niveau cosmologique n'est pas évidente de prime abord mais il suffit de considérer la généralisation des équations d'Einstein sous la forme non-locale proposée par les théories PEG (4.7) au niveau cosmologique (c'est-à-dire en introduisant une métrique de type FLRW et un tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait). Il devrait alors être possible de contraindre les paramètres sous la forme des coefficients de la susceptibilité $\chi_{\mu\nu}^{\lambda\rho}$ à l'aide des données des Supernovae Ia. Ces coefficients de susceptibilités sont également liés à la métrique qui caractérise le Système Solaire. La combinaison des contraintes cosmologiques et du Système Solaire semblent donc conceptuellement envisageable.
Il est également intéressant de se poser la même question pour la théorie SME. Est-il possible d'étudier l'accélération de l'expansion cosmique dans le cadre de SME ? A priori, étant donné que nous connaissons l'action de départ de cette théorie (4.27), cela semble possible et il doit être envisageable de pouvoir dériver des contraintes cosmologiques sur les coefficients SME.
Finalement, on peut se poser la même question pour les théories tenseur-scalaire dérivant des "Fab Four". Nous avons vu à la section 4.6.1 que la théorie "John+George" a déjà été étudiée dans le contexte de l'inflation. Nous sommes en droit de nous demander si ces théories sont à même d'expliquer l'accélération de l'expansion cosmique...

Evidemment, il n'y a aucune raison de se limiter aux théories considérées dans ce travail et les perspectives sont à ce titre réellement très larges. Cette thèse n'est donc qu'une modeste contribution dans notre quête de compréhension de l'interaction gravitationnelle et de la résolution des problèmes qui y sont actuellement associés.

"Le monde est une belle histoire, que chaque génération s'efforce d'améliorer."
G. Lemaître

Bibliographie

C. H. Acton, (1996). Ancillary data services of NASA's Navigation and Ancillary Information Facility. *Planet. Space Sci.*, 44 : 65–70, January 1996. doi: 10.1016/0032-0633(95)00107-7.

E. G. Adelberger, B. R. Heckel, and A. E. Nelson, (2003). Tests of the Gravitational Inverse-Square Law. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 53 : 77–121, December 2003. doi: 10.1146/annurev.nucl.53.041002.110503, `arXiv:hep-ph/0307284`.

E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, B. R. Heckel, S. Hoedl, and S. Schlamminger, (2009). Torsion balance experiments : A low-energy frontier of particle physics. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 62 : 102–134, January 2009. doi: 10.1016/j.ppnp.2008.08.002.

U. Alam, V. Sahni, T. Deep Saini, and A. A. Starobinsky, (2003). Exploring the expanding Universe and dark energy using the statefinder diagnostic. *MNRAS*, 344 : 1057–1074, October 2003. doi: 10.1046/j.1365-8711.2003.06871.x, `arXiv:astro-ph/0303009`.

J.-M. Alimi and A. Füzfa, (2007). Is Dark Energy Abnormally Weighting ? *International Journal of Modern Physics D*, 16 : 2587–2592, 2007. doi: 10.1142/S0218271807011206, `arXiv:astro-ph/0609099`.

J.-M. Alimi and A. Füzfa, (2008). The abnormally weighting energy hypothesis : the missing link between dark matter and dark energy. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 9 : 14, September 2008. doi: 10.1088/1475-7516/2008/09/014, `arXiv:0804.4100`.

J.-M. Alimi, A. Füzfa, V. Boucher, Y. Rasera, J. Courtin, and P.-S. Corasaniti, (2010). Imprints of dark energy on cosmic structure formation - I. Realistic quintessence models and the non-linear matter power spectrum. *MNRAS*, 401 : 775–790, January 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2009.15712.x, `arXiv:0903.5490 [astro-ph.CO]`.

J. W. Armstrong, L. Iess, P. Tortora, and B. Bertotti, (2003). Stochastic Gravitational Wave Background : Upper Limits in the 10^{-6} to 10^{-3} Hz Band. *ApJ*, 599 : 806–813, December 2003. doi: 10.1086/379505.

N. Ashby, (2003). Relativity in the Global Positioning System. *Living Reviews in Relativity*, 6 : 1, January 2003.

N. Ashby and B. Bertotti, (2010). Accurate light-time correction due to a gravitating mass. *Classical and Quantum Gravity*, 27 (14) : 145013, July 2010. doi: 10.1088/0264-9381/27/14/145013, `arXiv:0912.2705 [gr-qc]`.

E. Babichev and D. Langlois, (2010). Relativistic stars in f(R) and scalar-tensor theories. *Phys. Rev. D*, 81 (12) : 124051, June 2010. doi: 10.1103/PhysRevD.81.124051, arXiv:0911.1297 [gr-qc].

Q. G. Bailey, (2009). Time delay and doppler tests of the lorentz symmetry of gravity. *Phys. Rev. D*, 80 : 044004, Aug 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.80.044004. http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.044004.

Q. G. Bailey and V. A. Kostelecký, (2006). Signals for lorentz violation in post-newtonian gravity. *Phys. Rev. D*, 74 : 045001, Aug 2006. doi: 10.1103/PhysRevD.74.045001. http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.74.045001.

G. Balmino, (1988). Sur la technologie "L.O.S." en planétologie. Technical report, GRGS - Département Géodésie terrestre et planétaire, 1988.

J. B. R. Battat, J. F. Chandler, and C. W. Stubbs, (2007). Testing for Lorentz Violation : Constraints on Standard-Model-Extension Parameters via Lunar Laser Ranging. *Physical Review Letters*, 99 (24) : 241103, December 2007. doi: 10.1103/PhysRevLett.99.241103, arXiv:0710.0702 [gr-qc].

J. Bekenstein and J. Magueijo, (2006). Modified Newtonian dynamics habitats within the solar system. *Phys. Rev. D*, 73 (10) : 103513, May 2006. doi: 10.1103/PhysRevD.73.103513, arXiv:astro-ph/0602266.

J. Bekenstein and M. Milgrom, (1984). Does the missing mass problem signal the breakdown of Newtonian gravity ? *ApJ*, 286 : 7–14, November 1984. doi: 10.1086/162570.

J. D. Bekenstein, (2004). Relativistic gravitation theory for the modified Newtonian dynamics paradigm. *Phys. Rev. D*, 70 (8) : 083509, October 2004. doi: 10.1103/PhysRevD.70.083509, arXiv:astro-ph/0403694.

D. Bennett, V. Skavysh, and J. Long, (2011). Search for Lorentz Violation in a Short-Range Gravity Experiment. In *CPT AND Lorentz Symmetry*, pages 258–262, December 2011. doi: 10.1142/9789814327688$_0$051, arXiv:1008.3670 [gr-qc].

Beringer, J. et al., (2012). Review of Particle Physics. *Phys. Rev. D*, 86 (1) : 010001, July 2012. doi: 10.1103/PhysRevD.86.010001.

G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk, (2005). Particle dark matter : evidence, candidates and constraints. *Phys. Rep.*, 405 : 279–390, January 2005. doi: 10.1016/j.physrep.2004.08.031, arXiv:hep-ph/0404175.

B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora, (2003). A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature*, 425 : 374–376, September 2003. doi: 10.1038/nature01997.

Beutler, G. and Mervart, L. and Verdun A., (2005). *Methods of celestial mechanics. Vol. I : Physical, mathematical, and numerical principles*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer, 2005. ISBN 9783540407492.

F. Bezrukov and M. Shaposhnikov, (2008). The Standard Model Higgs boson as the inflaton. *Physics Letters B*, 659 : 703–706, January 2008. doi: 10.1016/j.physletb.2007.11.072, arXiv:0710.3755 [hep-th].

L. Blanchet, (2007). Gravitational polarization and the phenomenology of MOND. *Classical and Quantum Gravity*, 24 : 3529–3539, July 2007. doi: 10.1088/0264-9381/24/14/001, arXiv:astro-ph/0605637.

L. Blanchet and A. Le Tiec, (2008a). Model of dark matter and dark energy based on gravitational polarization. *Phys. Rev. D*, 78 (2) : 024031, July 2008. doi: 10.1103/PhysRevD.78.024031, arXiv:0804.3518.

L. Blanchet and A. Le Tiec, (2008b). Phenomenology of the Modified Newtonian Dynamics and the Concordance Cosmological Scenario. *ArXiv e-prints*, July 2008, arXiv:0807.1200.

L. Blanchet and A. Le Tiec, (2009). Dipolar dark matter and dark energy. *Phys. Rev. D*, 80 (2) : 023524, July 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.80.023524, arXiv:0901.3114 [astro-ph.CO].

L. Blanchet and J. Novak, (2011a). External field effect of modified Newtonian dynamics in the Solar system. *MNRAS*, 412 : 2530–2542, April 2011. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.18076.x, arXiv:1010.1349 [astro-ph.CO].

L. Blanchet and J. Novak, (2011b). Testing MOND in the Solar System. In E. Augé, J. Dumarchez, and J. Trân Thanh Vân, editors, *Proceedings of the XLVIth Rencontres de Moriond and GPhys Colloquium 2011 : Gravitational Waves and Experimental Gravity*, page 295, Vietnam, May 2011. Thê Giói Publishers, arXiv:1105.5815 [astro-ph.CO].

L. Blanchet, C. Salomon, P. Teyssandier, and P. Wolf, (2001). Relativistic theory for time and frequency transfer to order c^{-3}. *A&A*, 370 : 320–329, April 2001. doi: 10.1051/0004-6361 :20010233, arXiv:gr-qc/0010108.

R. Bluhm, (2005). Overview of the SME : Implications and Phenomenology of Lorentz Violation. *ArXiv High Energy Physics - Phenomenology e-prints*, June 2005, arXiv:hep-ph/0506054.

B. Boisseau, G. Esposito-Farèse, D. Polarski, and A. A. Starobinsky, (2000). Reconstruction of a Scalar-Tensor Theory of Gravity in an Accelerating Universe. *Physical Review Letters*, 85 : 2236–2239, September 2000. doi: 10.1103/PhysRevLett.85.2236, arXiv:gr-qc/0001066.

C. Bonanno and A. Milani, (2002). Symmetries and Rank Deficiency in the Orbit Determination Around Another Planet. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 83 : 17–33, May 2002.

D. Branch and G. A. Tammann, (1992). Type IA supernovae as standard candles. *ARA&A*, 30 : 359–389, 1992. doi: 10.1146/annurev.aa.30.090192.002043.

R. Brankin, I. Gladwell, and L. F. Shampine, (1993). Rksuite : A suite of explicit runge-kutta codes. In *in Contributions in Numerical Mathematics*, pages 41–53. World, 1993. http://www.netlib.org/ode/rksuite/.

C. Brans and R. H. Dicke, (1961). Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. *Phys. Rev.*, 124 : 925–935, November 1961. doi: 10.1103/PhysRev.124.925.

P. Brax and J. Martin, (2000). Robustness of quintessence. *Phys. Rev. D*, 61 (10) : 103502, May 2000. doi: 10.1103/PhysRevD.61.103502, arXiv:astro-ph/9912046.

P. Brax, C. van de Bruck, A.-C. Davis, J. Khoury, and A. Weltman, (2004). Detecting dark energy in orbit : The cosmological chameleon. *Phys. Rev. D*, 70 (12) : 123518, December 2004. doi: 10.1103/PhysRevD.70.123518, arXiv:astro-ph/0408415.

V. Brumberg, (2007). On derivation of EIH (Einstein–Infeld–Hoffman) equations of motion from the linearized metric of general relativity theory. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 99 : 245–252, November 2007. doi: 10.1007/s10569-007-9094-5.

V. A. Brumberg, (1991). *Essential relativistic celestial mechanics*. Adam Hilger, 1991. ISBN 9780750300629.

V. A. Brumberg and S. M. Kopejkin, (1989). Relativistic reference systems and motion of test bodies in the vicinity of the Earth. *Nuovo Cimento B Serie*, 103 : 63–98, January 1989. doi: 10.1007/BF02888894.

J.-P. Bruneton, (2007). *Théories alternatives de la gravitation et applications*. PhD thesis, Université Paris VI - Pierre et Marie Curie, 2007.

J.-P. Bruneton and G. Esposito-Farèse, (2007). Field-theoretical formulations of MOND-like gravity. *Phys. Rev. D*, 76 (12) : 124012, December 2007. doi: 10.1103/PhysRevD.76.124012.

J.-P. Bruneton, M. Rinaldi, A. Kanfon, A. Hees, S. Schlögel, and A. Füzfa, (2012). Fab Four : When John and George play gravitation and cosmology. *accepted in Advances in Astronomy*, March 2012, arXiv:1203.4446 [gr-qc].

A. Cadez, C. Fanton, and M. Calvani, (1998). Line emission from accretion discs around black holes : the analytic approach. *New A*, 3 : 647–654, December 1998. doi: 10.1016/S1384-1076(98)00035-9.

S. Capozziello and S. Tsujikawa, (2008). Solar system and equivalence principle constraints on f(R) gravity by the chameleon approach. *Phys. Rev. D*, 77 (10) : 107501, May 2008. doi: 10.1103/PhysRevD.77.107501, arXiv:0712.2268 [gr-qc].

S. Capozziello, V. F. Cardone, and A. Troisi, (2007a). Low surface brightness galaxy rotation curves in the low energy limit of R^n gravity : no need for dark matter ? *MNRAS*, 375 : 1423–1440, March 2007. doi: 10.1111/j.1365-2966.2007.11401.x, arXiv:astro-ph/0603522.

S. Capozziello, A. Stabile, and A. Troisi, (2007b). Newtonian limit of f(R) gravity. *Phys. Rev. D*, 76 (10) : 104019, November 2007. doi: 10.1103/PhysRevD.76.104019, arXiv:0708.0723 [gr-qc].

P. Caresia, S. Matarrese, and L. Moscardini, (2004). Constraints on Extended Quintessence from High-Redshift Supernovae. *ApJ*, 605 : 21–28, April 2004. doi: 10.1086/382270, arXiv:astro-ph/0308147.

S. Chandrasekhar, (1998). *The mathematical theory of black holes*. Oxford classic texts in the physical sciences. Oxford University Press, 1998. ISBN 9780198503705.

F. Chapeau-Blondeau and A. Monir, (2002). Numerical evaluation of the Lambert W function and application to generation of generalized Gaussian noise with exponent 1/2. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50 : 2160–2165, September 2002. doi: 10.1109/TSP.2002.801912.

C. Charmousis, E. J. Copeland, A. Padilla, and P. M. Saffin, (2012a). General Second-Order Scalar-Tensor Theory and Self-Tuning. *Physical Review Letters*, 108 (5) : 051101, February 2012. doi: 10.1103/PhysRevLett.108.051101, arXiv:1106.2000 [hep-th].

C. Charmousis, E. J. Copeland, A. Padilla, and P. M. Saffin, (2012b). Self-tuning and the derivation of a class of scalar-tensor theories. *Phys. Rev. D*, 85 (10) : 104040, May 2012. doi: 10.1103/PhysRevD.85.104040.

B. Chauvineau, T. Regimbau, J. Vinet, and S. Pireaux, (2005). Relativistic analysis of the LISA long range optical links. *Phys. Rev. D*, 72 (12) : 122003, December 2005. doi: 10.1103/PhysRevD.72.122003, arXiv:gr-qc/0511157.

M. Chevallier and D. Polarski, (2001). Accelerating Universes with Scaling Dark Matter. *International Journal of Modern Physics D*, 10 : 213–223, 2001. doi: 10.1142/S0218271801000822, arXiv:gr-qc/0009008.

T. Chiba, (1999). Quintessence, the gravitational constant, and gravity. *Phys. Rev. D*, 60 (8) : 083508, October 1999. doi: 10.1103/PhysRevD.60.083508, arXiv:gr-qc/9903094.

T. Chiba, T. L. Smith, and A. L. Erickcek, (2007). Solar System constraints to general f(R) gravity. *Phys. Rev. D*, 75 (12) : 124014, June 2007. doi: 10.1103/PhysRevD.75.124014, arXiv:astro-ph/0611867.

K.-Y. Chung, S.-W. Chiow, S. Herrmann, S. Chu, and H. Müller, (2009). Atom interferometry tests of local Lorentz invariance in gravity and electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 80 (1) : 016002, July 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.80.016002, arXiv:0905.1929 [gr-qc].

I. Ciufolini and E. C. Pavlis, (2004). A confirmation of the general relativistic prediction of the Lense-Thirring effect. *Nature*, 431 : 958–960, October 2004. doi: 10.1038/nature03007.

I. Ciufolini, E. C. Pavlis, A. Paolozzi, J. Ries, R. Koenig, R. Matzner, G. Sindoni, and K. H. Neumayer, (2012). Phenomenology of the Lense-Thirring effect in the Solar System : Measurement of frame-dragging with laser ranged satellites. *New A*, 17 : 341–346, April 2012. doi: 10.1016/j.newast.2011.08.003.

T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis, (2012). Modified gravity and cosmology. *Phys. Rep.*, 513 : 1–189, March 2012. doi: 10.1016/j.physrep.2012.01.001, arXiv:1106.2476 [astro-ph.CO].

D. Colladay and V. A. Kostelecký, (1997). CPT violation and the standard model. *Phys. Rev. D*, 55 : 6760–6774, June 1997. doi: 10.1103/PhysRevD.55.6760, arXiv:hep-ph/9703464.

D. Colladay and V. A. Kostelecký, (1998). Lorentz-violating extension of the standard model. *Phys. Rev. D*, 58 (11) : 116002, December 1998. doi: 10.1103/PhysRevD.58.116002, arXiv:hep-ph/9809521.

A. H. Compton, (1923). A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements. *Physical Review*, 21 : 483–502, May 1923. doi: 10.1103/PhysRev.21.483.

P. S. Corasaniti, M. Kunz, D. Parkinson, E. J. Copeland, and B. A. Bassett, (2004). Foundations of observing dark energy dynamics with the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe. *Phys. Rev. D*, 70 (8) : 083006, October 2004. doi: 10.1103/PhysRevD.70.083006, arXiv:astro-ph/0406608.

T. Damour, (2012). Theoretical Aspects of the Equivalence Principle. *Classical and Quantum Gravity*, 29 (18) : 184001, September 2012. doi: 10.1088/0264-9381/29/18/184001, arXiv:1202.6311 [gr-qc].

T. Damour and G. Esposito-Farese, (1992). Tensor-multi-scalar theories of gravitation. *Class. and Quantum Grav.*, 9 : 2093–2176, September 1992. doi: 10.1088/0264-9381/9/9/015.

T. Damour and G. Esposito-Farese, (1993). Nonperturbative strong-field effects in tensor-scalar theories of gravitation. *Physical Review Letters*, 70 : 2220–2223, April 1993. doi: 10.1103/PhysRevLett.70.2220.

T. Damour and G. Esposito-Farèse, (1996). Tensor-scalar gravity and binary-pulsar experiments. *Phys. Rev. D*, 54 : 1474–1491, July 1996. doi: 10.1103/PhysRevD.54.1474, arXiv:gr-qc/9602056.

T. Damour and K. Nordtvedt, (1993a). Tensor-scalar cosmological models and their relaxation toward general relativity. *Phys. Rev. D*, 48 : 3436–3450, October 1993. doi: 10.1103/PhysRevD.48.3436.

T. Damour and K. Nordtvedt, (1993b). General relativity as a cosmological attractor of tensor-scalar theories. *Physical Review Letters*, 70 : 2217–2219, April 1993. doi: 10.1103/PhysRevLett.70.2217.

T. Damour and A. M. Polyakov, (1994a). The string dilation and a least coupling principle. *Nuclear Physics B*, 423 : 532–558, July 1994. doi: 10.1016/0550-3213(94)90143-0, arXiv:hep-th/9401069.

T. Damour and A. M. Polyakov, (1994b). String theory and gravity. *General Relativity and Gravitation*, 26 : 1171–1176, December 1994. doi: 10.1007/BF02106709, arXiv:gr-qc/9411069.

T. Damour and J. H. Taylor, (1992). Strong-field tests of relativistic gravity and binary pulsars. *Phys. Rev. D*, 45 : 1840–1868, March 1992. doi: 10.1103/PhysRevD.45.1840.

T. Damour, G. W. Gibbons, and C. Gundlach, (1990). Dark matter, time-varying G, and a dilaton field. *Physical Review Letters*, 64 : 123–126, January 1990. doi: 10.1103/PhysRevLett.64.123.

T. Damour, M. Soffel, and C. Xu, (1991). General-relativistic celestial mechanics. i. method and definition of reference systems. *Phys. Rev. D*, 43 (10) : 3273–3307, May 1991. doi: 10.1103/PhysRevD.43.3273.

T. Damour, M. Soffel, and C. Xu, (1992). General-relativistic celestial mechanics ii. translational equations of motion. *Phys. Rev. D*, 45 (4) : 1017–1044, Feb 1992. doi: 10.1103/PhysRevD.45.1017.

A. de Felice and S. Tsujikawa, (2010). f(R) Theories. *Living Reviews in Relativity*, 13 (3) , June 2010, arXiv:1002.4928 [gr-qc]. http://www.livingreviews.org/lrr-2010-3.

A. De Felice and S. Tsujikawa, (2012). Conditions for the cosmological viability of the most general scalar-tensor theories and their applications to extended Galileon dark energy models. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 2 : 7, February 2012. doi: 10.1088/1475-7516/2012/02/007, arXiv:1110.3878 [gr-qc].

A. de Felice, R. Kase, and S. Tsujikawa, (2012). Vainshtein mechanism in second-order scalar-tensor theories. *Phys. Rev. D*, 85 (4) : 044059, February 2012. doi: 10.1103/PhysRevD.85.044059, arXiv:1111.5090 [gr-qc].

W. de Sitter, (1916). On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. Second paper. *MNRAS*, 77 : 155–184, December 1916.

C. Deffayet, G. Dvali, G. Gabadadze, and A. Vainshtein, (2002). Nonperturbative continuity in graviton mass versus perturbative discontinuity. *Phys. Rev. D*, 65 (4) : 044026, February 2002. doi: 10.1103/PhysRevD.65.044026, arXiv:hep-th/0106001.

P. Delva, (2007). *Outils théoriques pour la gravitation expérimentale et applications aux interféromètres et cavités à ondes de matière*. PhD thesis, Université Paris VI - Pierre et Marie Curie, 2007.

P. Delva, (2010). Numerical comparison of time transfer methods in the Schwarzschild geometry. In *Gravitation and Fundamental Physics in Space*, June 2010. http://gphys.obspm.fr/Paris2010/mercredi%2023/delvagphys2.pdf.

S. Deser and P. van Nieuwenhuizen, (1974). One-loop divergences of quantized einstein-maxwell fields. *Phys. Rev. D*, 10 : 401–410, Jul 1974. doi: 10.1103/PhysRevD.10.401. http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.401.

E. di Pietro and J. Claeskens, (2003). Future supernovae data and quintessence models. *MNRAS*, 341 : 1299–1310, June 2003. doi: 10.1046/j.1365-8711.2003.06508.x, arXiv:astro-ph/0207332.

R. H. Dicke, (1962). Mach's Principle and Invariance under Transformation of Units. *Physical Review*, 125 : 2163–2167, March 1962. doi: 10.1103/PhysRev.125.2163.

G. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati, (2000). 4D gravity on a brane in 5D Minkowski space. *Physics Letters B*, 485 : 208–214, July 2000. doi: 10.1016/S0370-2693(00)00669-9, arXiv:hep-th/0005016.

A. Einstein, (1905a). Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, 322 : 132–148, 1905. doi: 10.1002/andp.19053220607. http://en.wikisource.org/wiki/A_Heuristic_Model_of_the_Creation_and_Transformation_of_Light.

A. Einstein, (1905b). Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 322 : 891–921, 1905. doi: 10.1002/andp.19053221004. Translated in Lorentz et al. [1923].

A. Einstein, (1909). Über die entwicklung unserer anschauungen über das wesen und die konstitution der strahlung. *Physikalische Zeitschrift*, 10 : 817–825, 1909. http://en.wikisource.org/wiki/The_Development_of_Our_Views_on_the_Composition_and_Essence_of_Radiation.

A. Einstein, (1911). Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes. *Annalen der Physik*, 340 : 898–908, 1911. doi: 10.1002/andp.19113401005. Traduction anglaise dans Lorentz et al. [1923].

A. Einstein, (1916). Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354 : 769–822, 1916. doi: 10.1002/andp.19163540702. Traduction anglaise dans Lorentz et al. [1923].

A. Einstein and L. Infeld, (1940). The gravitational equations and the problem of motion. ii. *The Annals of Mathematics*, 41 (2) : pp. 455–464, 1940. ISSN 0003486X. `http://www.jstor.org/stable/1969015`.

A. Einstein, L. Infeld, and B. Hoffmann, (1938). The gravitational equations and the problem of motion. *The Annals of Mathematics*, 39 (1) : pp. 65–100, 1938. ISSN 0003486X. `http://www.jstor.org/stable/1968714`.

ESA, (2005). Cassini-huygens : The mission, 2005. `http://www.esa.int/esaMI/Cassini-Huygens/SEMMD2HHZTD_0.html`.

ESA, (2012a). EUCLID : Mission Summary, 2012. `http://sci.esa.int/science-e/www/area/index.cfm?fareaid=102`.

ESA, (2012b). Gaia : The mission, 2012. `http://gaia.esa.int`.

E. Everhart, (1985). An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. In A. Carusi & G. B. Valsecchi, editor, *Dynamics of Comets : Their Origin and Evolution, Proceedings of IAU Colloq. 83, held in Rome, Italy, June 11-15, 1984. Edited by Andrea Carusi and Giovanni B. Valsecchi. Dordrecht : Reidel, Astrophysics and Space Science Library. Volume 115, 1985, p.185*, page 185, 1985.

Everitt, C. W. F. et al., (2011). Gravity Probe B : Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity. *Physical Review Letters*, 106 (22) : 221101, June 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.106.221101, `arXiv:1105.3456 [gr-qc]`.

B. Famaey and S. S. McGaugh, (2012). Modified Newtonian Dynamics (MOND) : Observational Phenomenology and Relativistic. *Living Reviews in Relativity*, 15 : 10, September 2012, `arXiv:1112.3960 [astro-ph.CO]`. `http://www.livingreviews.org/lrr-2012-10`.

T. Faulkner, M. Tegmark, E. F. Bunn, and Y. Mao, (2007). Constraining f(R) gravity as a scalar-tensor theory. *Phys. Rev. D*, 76 (6) : 063505, September 2007. doi: 10.1103/PhysRevD.76.063505, `arXiv:astro-ph/0612569`.

J. E. Felten, (1984). Milgrom's revision of Newton's laws - Dynamical and cosmological consequences. *ApJ*, 286 : 3–6, November 1984. doi: 10.1086/162569.

A. Fienga, (2011). Planetary ephemerides and gravity tests in the solar system. In *Presentation at "Rencontres de Moriond 2011 : Gravitational waves and Experimental Gravity"*, 2011. `http://moriond.in2p3.fr/J11/transparents/fienga.pdf`.

Fienga, A. et al., (2009). INPOP08, a 4-D planetary ephemeris : from asteroid and time-scale computations to ESA Mars Express and Venus Express contributions. *A&A*, 507 : 1675–1686, December 2009. doi: 10.1051/0004-6361/200911755, `arXiv:0906.2860 [astro-ph.EP]`.

A. Fienga, J. Laskar, P. Kuchynka, C. Le Poncin-Lafitte, H. Manche, and M. Gastineau, (2010). Gravity tests with INPOP planetary ephemerides. In S. A. Klioner, P. K. Seidelmann, & M. H. Soffel, editor, *IAU Symposium*, volume 261 of *IAU Symposium*, pages 159–169, January 2010. doi: 10.1017/S1743921309990330, arXiv:0906.3962 [gr-qc].

A. Fienga, J. Laskar, P. Kuchynka, H. Manche, G. Desvignes, M. Gastineau, I. Cognard, and G. Theureau, (2011). The INPOP10a planetary ephemeris and its applications in fundamental physics. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, (3) : 363–385, September 2011. doi: 10.1007/s10569-011-9377-8, arXiv:1108.5546 [astro-ph.EP].

S. Finocchiaro, L. Iess, W. M. Folkner, and S. Asmar, (2011). The Determination of Jupiter's Angular Momentum from the Lense-Thirring Precession of the Juno Spacecraft. *AGU Fall Meeting Abstracts*, page B1620, December 2011.

É. É. Flanagan, (2004). REPLY TO COMMENT : The conformal frame freedom in theories of gravitation. *Classical and Quantum Gravity*, 21 : 3817–3829, August 2004. doi: 10.1088/0264-9381/21/15/N02, arXiv:gr-qc/0403063.

W. M. Folkner, (2010a). Uncertainties in the JPL Planetary Ephemeris. In N. Capitaine, editor, *Proceedings of the "Journées 2010 Systèmes de Référence Spatio-Temporels"*, page 43. Observatoire de Paris, 2010. http://syrte.obspm.fr/jsr/journees2010/index.php?page=proceedings.

W. M. Folkner, (2010b). Relativistic aspects of the JPL planetary ephemeris. In S. A. Klioner, P. K. Seidelmann, & M. H. Soffel, editor, *IAU Symposium*, volume 261 of *IAU Symposium*, pages 155–158, January 2010. doi: 10.1017/S1743921309990329.

A. Friedmann, (1924). Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. *Zeitschrift fur Physik*, 21 : 326–332, December 1924. doi: 10.1007/BF01328280.

A. Friedmann, A., (1922). Über die krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 10 : 377–386, 1922. ISSN 0939-7922. http://dx.doi.org/10.1007/BF01332580. 10.1007/BF01332580.

R. Fujita and W. Hikida, (2009). Analytical solutions of bound timelike geodesic orbits in Kerr spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, 26 (13) : 135002, July 2009. doi: 10.1088/0264-9381/26/13/135002, arXiv:0906.1420 [gr-qc].

A. Füzfa, (2010). *Notes de cours : Géométrie différentielle Riemanienne et calcul tensorielle*. Faculté Universitaire Notre Dame de la Paix (FUNDP, Namur), 2010.

A. Füzfa and J.-M. Alimi, (2007). Toward a unified description of dark energy and dark matter from the abnormally weighting energy hypothesis. *Phys. Rev. D*, 75 (12) : 123007, June 2007. doi: 10.1103/PhysRevD.75.123007, arXiv:astro-ph/0702478.

A. Füzfa and J.-M. Alimi, (2009). An introduction to the Abnormally Weighting Energy Hypothesis and Non-Universal Tensor-Scalar Gravitation. page 207. Hermann Editeurs des Sciences et des Arts, 2009.

G. Galileo, (1638). *Discorsi e Dimonstrazioni matematiche intorno a due scienze attenanti alla mecanica ed i movimenti locali*. 1638. Traduction partielle française dans Hawking [2005].

R. Gannouji, B. Moraes, D. F. Mota, D. Polarski, S. Tsujikawa, and H. A. Winther, (2010). Chameleon dark energy models with characteristic signatures. *Phys. Rev. D*, 82 (12) : 124006, December 2010. doi: 10.1103/PhysRevD.82.124006, arXiv:1010.3769 [astro-ph.CO].

J. Gérard, (2007). *Relativité Générale et Cosmologie : cours de l'Université Catholique de Louvain*. 2007.

J.-M. Gérard, (2012). Les Prix Nobel de Physique : De l'éclipse totale du Soleil à l'énigme de l'énergie sombre. *Revue des Questions Scientifiques*, 183 : 145–168, January 2012.

A. S. Goldhaber and M. M. Nieto, (1971). Terrestrial and Extraterrestrial Limits on The Photon Mass. *Reviews of Modern Physics*, 43 : 277–296, July 1971. doi: 10.1103/RevModPhys.43.277.

E. Gourgoulhon, (2010). *Relativité Restreinte : Des Particules à l'Astrophysique*. Savoirs actuels. Physique. EDP Sciences / CNRS Editions, 2010. ISBN 9782759800674.

GRGS, (2001). Descriptif du modèle de forces : logiciel GINS. Technical report, Groupe en Recherche en Géodésie Spatiale, 2001.

D. Grumiller, (2010). Model for Gravity at Large Distances. *Physical Review Letters*, 105 (21) : 211303, November 2010. doi: 10.1103/PhysRevLett.105.211303, arXiv:1011.3625 [astro-ph.CO].

J. C. Hafele and R. E. Keating, (1972a). Around-the-World Atomic Clocks : Predicted Relativistic Time Gains. *Science*, 177 : 166–168, July 1972. doi: 10.1126/science.177.4044.166.

J. C. Hafele and R. E. Keating, (1972b). Around-the-World Atomic Clocks : Observed Relativistic Time Gains. *Science*, 177 : 168–170, July 1972. doi: 10.1126/science.177.4044.168.

R. Hashemi and R. Saffari, (2011). A well-behaved f(R) gravity model in planetary motions. *Planet. Space Sci.*, 59 : 338–342, March 2011. doi: 10.1016/j.pss.2010.12.011, arXiv:1010.1846 [gr-qc].

S. W. Hawking, (2005). *À l'image des géants*. Dunod, 2005. ISBN 9782100075959. traduit par J. P. Luminet.

A. Hees and A. Füzfa, (2012). Combined cosmological and solar system constraints on chameleon mechanism. *Phys. Rev. D*, 85 (10) : 103005, May 2012. doi: 10.1103/PhysRevD.85.103005, arXiv:1111.4784 [gr-qc].

A. Hees and S. Pireaux, (2010). A relativistic motion integrator : numerical accuracy and illustration with BepiColombo and Mars-NEXT. In S. A. Klioner, P. K. Seidelmann, & M. H. Soffel, editor, *IAU Symposium*, volume 261 of *IAU Symposium*, pages 144–146, January 2010. doi: 10.1017/S1743921309990299, arXiv:0908.1654 [gr-qc].

A. Hees, S. Bertone, and C. Le Poncin-Lafitte, (2012a). Frequency shift up to the 2-PM approximation. In *SF2A-2012 : Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics*, 2012, arXiv:1210.2577 [gr-qc].

Hees, A. et al., (2012b). Radioscience simulations in General Relativity and in alternative theories of gravity. *accepted in Classical and Quantum Gravity*, January 2012, arXiv:1201.5041 [gr-qc].

F. W. Hehl and B. Mashhoon, (2009). Formal framework for a nonlocal generalization of Einstein's theory of gravitation. *Phys. Rev. D*, 79 (6) : 064028, March 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.79.064028, arXiv:0902.0560 [gr-qc].

R. Helled, J. D. Anderson, G. Schubert, and D. J. Stevenson, (2011). Jupiter's moment of inertia : A possible determination by Juno. *Icarus*, 216 : 440–448, December 2011. doi: 10.1016/j.icarus.2011.09.016, arXiv:1109.1627 [astro-ph.EP].

Hinshaw, G. et al., (2003). First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Data Processing Methods and Systematic Error Limits. *ApJS*, 148 : 63–95, September 2003. doi: 10.1086/377222, arXiv:astro-ph/0302222.

K. Hinterbichler and J. Khoury, (2010). Screening Long-Range Forces through Local Symmetry Restoration. *Physical Review Letters*, 104 (23) : 231301, June 2010. doi: 10.1103/PhysRevLett.104.231301, arXiv:1001.4525 [hep-th].

K. Hinterbichler, J. Khoury, A. Levy, and A. Matas, (2011). Symmetron cosmology. *Phys. Rev. D*, 84 (10) : 103521, November 2011. doi: 10.1103/PhysRevD.84.103521, arXiv:1107.2112 [astro-ph.CO].

M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, and A. N. Lasenby, (2006). *General relativity : an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006. ISBN 9780521829519. doi: 10.2277/0521829518.

M. A. Hohensee, S. Chu, A. Peters, and H. Müller, (2011). Equivalence Principle and Gravitational Redshift. *Physical Review Letters*, 106 (15) : 151102, April 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.106.151102, arXiv:1102.4362 [gr-qc].

G. W. Horndeski, (1974). Second-Order Scalar-Tensor Field Equations in a Four-Dimensional Space. *International Journal of Theoretical Physics*, 10 : 363–384, September 1974. doi: 10.1007/BF01807638.

E. Hubble, (1929). A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 15 : 168–173, March 1929. doi: 10.1073/pnas.15.3.168.

L. Infeld, (1957). Equations of Motion in General Relativity Theory and the Action Principle. *Reviews of Modern Physics*, 29 : 398–411, July 1957. doi: 10.1103/RevModPhys.29.398.

L. Iorio, (2010). Juno, the angular momentum of Jupiter and the Lense-Thirring effect. *New A*, 15 : 554–560, August 2010. doi: 10.1016/j.newast.2010.01.004, arXiv:0812.1485 [gr-qc].

L. Iorio, (2011a). Erratum to Juno, the angular momentum of Jupiter and the Lense-Thirring effect [New Astronomy 15 (2010) 554-560]. *New A*, 16 : 17–18, January 2011. doi: 10.1016/j.newast.2010.06.004.

L. Iorio, (2011b). Gravitomagnetism and the Earth-Mercury range. *Advances in Space Research*, 48 : 1403–1410, October 2011. doi: 10.1016/j.asr.2011.06.023, arXiv:1002.0163 [gr-qc].

L. Iorio, (2012). Orbital effects of Lorentz-violating standard model extension gravitomagnetism around a static body : a sensitivity analysis. *Classical and Quantum Gravity*, 29 (17) : 175007, September 2012. doi: 10.1088/0264-9381/29/17/175007, arXiv:1203.1859 [gr-qc].

L. Iorio, H. I. M. Lichtenegger, M. L. Ruggiero, and C. Corda, (2011). Phenomenology of the Lense-Thirring effect in the solar system. *Ap&SS*, 331 : 351–395, February 2011. doi: 10.1007/s10509-010-0489-5, arXiv:1009.3225 [gr-qc].

M.-T. Jaekel and S. Reynaud, (2005a). Gravity Tests in the Solar System and the Pioneer Anomaly. *Modern Physics Letters A*, 20 : 1047–1055, 2005. doi: 10.1142/S0217732305017275, arXiv:gr-qc/0410148.

M.-T. Jaekel and S. Reynaud, (2005b). Post-Einsteinian tests of linearized gravitation. *Classical and Quantum Gravity*, 22 : 2135–2157, June 2005. doi: 10.1088/0264-9381/22/11/015, arXiv:gr-qc/0502007.

M.-T. Jaekel and S. Reynaud, (2006a). Post-Einsteinian tests of gravitation. *Classical and Quantum Gravity*, 23 : 777–798, February 2006. doi: 10.1088/0264-9381/23/3/015, arXiv:gr-qc/0510068.

M.-T. Jaekel and S. Reynaud, (2006b). Radar ranging and Doppler tracking in post-Einsteinian metric theories of gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 23 : 7561–7579, December 2006. doi: 10.1088/0264-9381/23/24/025, arXiv:gr-qc/0610155.

M.-T. Jaekel and S. Reynaud, (2008). Mass, inertia and gravitation. *ArXiv e-prints*, December 2008, arXiv:0812.3936 [gr-qc].

D. L. Jones, E. Fomalont, V. Dhawan, J. Romney, W. M. Folkner, G. Lanyi, J. Border, and R. A. Jacobson, (2011). Very Long Baseline Array Astrometric Observations of the Cassini Spacecraft at Saturn. *AJ*, 141 : 29, February 2011. doi: 10.1088/0004-6256/141/2/29, arXiv:1012.0264 [astro-ph.EP].

P. Jordan, (1949). Formation of the Stars and Development of the Universe. *Nature*, 164 : 637–640, October 1949. doi: 10.1038/164637a0.

N. Kaiser and G. Squires, (1993). Mapping the dark matter with weak gravitational lensing. *ApJ*, 404 : 441–450, February 1993. doi: 10.1086/172297.

D. Kennefick, (2007). Not Only Because of Theory : Dyson, Eddington and the Competing Myths of the 1919 Eclipse Expedition. *ArXiv e-prints*, September 2007, arXiv:0709.0685 [physics.hist-ph].

J. Khoury, (2010). Theories of Dark Energy with Screening Mechanisms. *ArXiv e-prints*, November 2010, arXiv:1011.5909 [astro-ph.CO].

J. Khoury and A. Weltman, (2004a). Chameleon cosmology. *Phys. Rev. D*, 69 (4) : 044026, February 2004. doi: 10.1103/PhysRevD.69.044026, arXiv:astro-ph/0309411.

J. Khoury and A. Weltman, (2004b). Chameleon Fields : Awaiting Surprises for Tests of Gravity in Space. *Phys. Rev. Lett.*, 93 (17) : 171104, October 2004. doi: 10.1103/PhysRevLett.93.171104, arXiv:astro-ph/0309300.

D. Kincaid and E. Cheney, (2002). *Numerical analysis : mathematics of scientific computing*. Pure and applied undergraduate texts. American Mathematical Society, 2002. ISBN 9780821847886.

S. A. Klioner, (1993). On the hierarchy of relativistic kinematically nonrotating reference systems. *Astron. Astrophys.*, 279 : 273–277, November 1993.

S. A. Klioner, (2003). A Practical Relativistic Model for Microarcsecond Astrometry in Space. *AJ*, 125 : 1580–1597, March 2003. doi: 10.1086/367593.

S. A. Klioner, (2004). Physically adequate proper reference system of a test observer and relativistic description of the GAIA attitude. *Phys. Rev. D*, 69 (12) : 124001, June 2004. doi: 10.1103/PhysRevD.69.124001, arXiv:astro-ph/0311540.

S. A. Klioner and M. Soffel, (1998). Nonrotating astronomical relativistic reference frames. *A&A*, 334 : 1123–1135, June 1998.

S. A. Klioner and M. H. Soffel, (2000). Relativistic celestial mechanics with PPN parameters. *Phys. Rev. D*, 62 (2) : 024019, July 2000. doi: 10.1103/PhysRevD.62.024019, arXiv:gr-qc/9906123.

S. A. Klioner and A. V. Voinov, (1993). Relativistic theory of astronomical reference systems in closed form. *Phys. Rev. D*, 48 : 1451–1461, August 1993. doi: 10.1103/PhysRevD.48.1451.

S. A. Klioner and S. Zschocke, (2010). Numerical versus analytical accuracy of the formulae for light propagation. *Classical and Quantum Gravity*, 27 (7) : 075015, April 2010. doi: 10.1088/0264-9381/27/7/075015, arXiv:1001.2133.

Komatsu, E. et al., (2011). Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Cosmological Interpretation. *APJS*, 192 : 18, February 2011. doi: 10.1088/0067-0049/192/2/18, arXiv:1001.4538 [astro-ph.CO].

S. Kopeikin, (2010). Beyond the standard IAU framework. In S. A. Klioner, P. K. Seidelmann, and M. H. Soffel, editors, *IAU Symposium*, volume 261 of *IAU Symposium*, pages 7–15, January 2010. doi: 10.1017/S1743921309990081.

S. Kopeikin and I. Vlasov, (2004). Parametrized post-Newtonian theory of reference frames, multipolar expansions and equations of motion in the N-body problem. *Phys. Rep.*, 400 : 209–318, November 2004. doi: 10.1016/j.physrep.2004.08.004, arXiv:gr-qc/0403068.

S. M. Kopeikin and G. Schäfer, (1999). Lorentz covariant theory of light propagation in gravitational fields of arbitrary-moving bodies. *Phys. Rev. D*, 60 (12) : 124002, December 1999. doi: 10.1103/PhysRevD.60.124002, arXiv:gr-qc/9902030.

S. M. Kopeikin, J. Ramirez, B. Mashhoon, and M. V. Sazhin, (2001). Cosmological perturbations : a new gauge-invariant approach. *Physics Letters A*, 292 : 173–180, December 2001. doi: 10.1016/S0375-9601(01)00777-0, arXiv:gr-qc/0106064.

S. M. Kopeikin, (2012). Celestial ephemerides in an expanding universe. *Phys. Rev. D*, 86 : 064004, Sep 2012. doi: 10.1103/PhysRevD.86.064004, arXiv:1207.3873 [gr-qc].

S. M. Kopejkin, (1988). Celestial coordinate reference systems in curved space-time. *Celestial Mechanics*, 44 : 87–115, March 1988. doi: 10.1007/BF01230709.

A. Kostelecky, (2001). Topics in Lorentz and CPT Violation. *ArXiv High Energy Physics - Phenomenology e-prints*, April 2001, arXiv:hep-ph/0104227.

V. A. Kostelecký, (2004). Gravity, Lorentz violation, and the standard model. *Phys. Rev. D*, 69 (10) : 105009, May 2004. doi: 10.1103/PhysRevD.69.105009, arXiv:hep-th/0312310.

V. A. Kostelecký and N. Russell, (2011). Data tables for Lorentz and CPT violation. *Reviews of Modern Physics*, 83 : 11–32, January 2011. doi: 10.1103/RevModPhys.83.11, arXiv:0801.0287 [hep-ph].

V. A. Kostelecký and J. D. Tasson, (2011). Matter-gravity couplings and lorentz violation. *Phys. Rev. D*, 83 : 016013, Jan 2011. doi: 10.1103/PhysRevD.83.016013. http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.016013.

U. Kostić, (2012). Analytical time-like geodesics in Schwarzschild space-time. *General Relativity and Gravitation*, page 12, January 2012. doi: 10.1007/s10714-012-1328-5.

C. T. Kowal, (1968). Absolute magnitudes of supernovae. *AJ*, 73 : 1021–1024, December 1968. doi: 10.1086/110763.

Kowalski, M. et al., (2008). Improved Cosmological Constraints from New, Old, and Combined Supernova Data Sets. *ApJ*, 686 : 749–778, October 2008. doi: 10.1086/589937, arXiv:0804.4142.

J. Krause, (1975). Some Remarks on Orthonormal Tetrad Transport. *International Journal of Theoretical Physics*, 12 : 35–45, January 1975. doi: 10.1007/BF01884108.

J. R. Kuhn and L. Kruglyak, (1987). Non-Newtonian forces and the invisible mass problem. *ApJ*, 313 : 1–12, February 1987. doi: 10.1086/164942.

V. Lainey, J. E. Arlot, and A. Vienne, (2004a). New accurate ephemerides for the Galilean satellites of Jupiter. II. Fitting the observations. *A&A*, 427 : 371–376, November 2004. doi: 10.1051/0004-6361 :20041271.

V. Lainey, L. Duriez, and A. Vienne, (2004b). New accurate ephemerides for the Galilean satellites of Jupiter. I. Numerical integration of elaborated equations of motion. *A&A*, 420 : 1171–1183, June 2004. doi: 10.1051/0004-6361 :20034565.

S. B. Lambert and C. Le Poncin-Lafitte, (2009). Determining the relativistic parameter γ using very long baseline interferometry. *A&A*, 499 : 331–335, May 2009. doi: 10.1051/0004-6361/200911714, arXiv:0903.1615 [gr-qc].

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, (1975). *The classical theory of fields*. 1975.

C. Le Poncin-Lafitte, B. Linet, and P. Teyssandier, (2004). World function and time transfer : general post-Minkowskian expansions. *CQG*, 21 : 4463–4483, September 2004. doi: 10.1088/0264-9381/21/18/012, gr-qc/0403094.

G. Lemaître, (1927). Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. *Annales de la Societe Scietifique de Bruxelles*, 47 : 49–59, 1927.

G. Lemaître, (1931a). The Beginning of the World from the Point of View of Quantum Theory. *Nature*, 127 : 706, May 1931. doi: 10.1038/127706b0.

G. Lemaître, (1931b). Expansion of the universe, A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae. *MNRAS*, 91 : 483–490, March 1931.

G. Lemaitre, (1945). Hypothèses cosmogoniques. *Ciel et Terre*, 61 : 61, 1945.

J. Lense and H. Thirring, (1918). Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Physikalische Zeitschrift*, 19 : 156, 1918.

A. Lewis and S. Bridle, (2002). Cosmological parameters from CMB and other data : A Monte Carlo approach. *Phys. Rev. D*, 66 (10) : 103511, November 2002. doi: 10.1103/PhysRevD.66.103511, `arXiv:astro-ph/0205436`.

J. E. Lidsey, D. Wands, and E. J. Copeland, (2000). Superstring cosmology. *Phys. Rep.*, 337 : 343–492, October 2000. doi: 10.1016/S0370-1573(00)00064-8, `arXiv:hep-th/9909061`.

E. V. Linder, (2003). Exploring the Expansion History of the Universe. *Physical Review Letters*, 90 (9) : 091301, March 2003. doi: 10.1103/PhysRevLett.90.091301, `arXiv:astro-ph/0208512`.

B. Linet and P. Teyssandier, (2002). Time transfer and frequency shift to the order $1/c^4$ in the field of an axisymmetric rotating body. *Phys. Rev. D*, 66 (2) : 024045, July 2002. doi: 10.1103/PhysRevD.66.024045, `arXiv:gr-qc/0204009`.

M. Livio, (2011). Lost in translation : Mystery of the missing text solved. *Nature*, 479 : 171–173, November 2011. doi: 10.1038/479171a.

H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, and H. Weyl, (1923). *The Principle of Relativity : A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 1923. ISBN 9780486600819.

D. Lovelock, (1971). The Einstein Tensor and Its Generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, 12 : 498–501, March 1971. doi: 10.1063/1.1665613.

D. Lovelock, (1972). The Four-Dimensionality of Space and the Einstein Tensor. *Journal of Mathematical Physics*, 13 : 874–876, June 1972. doi: 10.1063/1.1666069.

A. Magnus, (2007). *Analyse Numérique : Approximation, Interpolation, Intgration*. Notes de Cours INMA2171, Université Catholique de Louvain, 2007.

P. D. Mannheim, (1990). Conformal cosmology with no cosmological constant. *General Relativity and Gravitation*, 22 : 289–298, March 1990. doi: 10.1007/BF00756278.

P. D. Mannheim, (2006). Alternatives to dark matter and dark energy. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 56 : 340–445, April 2006. doi: 10.1016/j.ppnp.2005.08.001, `arXiv:astro-ph/0505266`.

P. D. Mannheim and D. Kazanas, (1989). Exact vacuum solution to conformal Weyl gravity and galactic rotation curves. *ApJ*, 342 : 635–638, July 1989. doi: 10.1086/167623.

J. Martin, (2012). Everything you always wanted to know about the cosmological constant problem (but were afraid to ask). *Comptes Rendus Physique*, 13 : 566–665, July 2012. doi: 10.1016/j.crhy.2012.04.008, `arXiv:1205.3365 [astro-ph.CO]`.

Massey, R. et al., (2007). Dark matter maps reveal cosmic scaffolding. *Nature*, 445 : 286–290, January 2007. doi: 10.1038/nature05497, `arXiv:astro-ph/0701594`.

D. Mattingly, (2005). Modern tests of lorentz invariance. *Living Reviews in Relativity*, 8 (5) , 2005. `http://www.livingreviews.org/lrr-2005-5`.

F. Mignard and S. A. Klioner, (2010). Gaia : Relativistic modelling and testing. In S. A. Klioner, P. K. Seidelmann, and M. H. Soffel, editors, *IAU Symposium*, volume 261 of *IAU Symposium*, pages 306–314, January 2010. doi: 10.1017/S174392130999055X.

A. Milani, D. Vokrouhlický, D. Villani, C. Bonanno, and A. Rossi, (2002). Testing general relativity with the BepiColombo radio science experiment. *Phys. Rev. D*, 66 (8) : 082001, October 2002. doi: 10.1103/PhysRevD.66.082001.

M. Milgrom, (1983a). A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *ApJ*, 270 : 365–370, July 1983. doi: 10.1086/161130.

M. Milgrom, (1983b). A Modification of the Newtonian Dynamics - Implications for Galaxy Systems. *ApJ*, 270 : 384, July 1983. doi: 10.1086/161132.

M. Milgrom, (1983c). A modification of the Newtonian dynamics - Implications for galaxies. *ApJ*, 270 : 371–389, July 1983. doi: 10.1086/161131.

M. Milgrom, (2009). MOND effects in the inner Solar system. *MNRAS*, 399 : 474–486, October 2009. doi: 10.1111/j.1365-2966.2009.15302.x, `arXiv:0906.4817 [astro-ph.CO]`.

D. L. Miller and D. Branch, (1990). Supernova absolute-magnitude distributions. *AJ*, 100 : 530–539, August 1990. doi: 10.1086/115534.

H. Minkowski, (1909a). Espace et Temps. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (3e série)*, 26 : 499–517, 1909. `http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1909_3_26__499_0`.

H. Minkowski, (1909b). Raum und Zeit. *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker- Vereinigung*, 18 : 75, 1909. Traduction française dans Minkowski [1909a].

C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, (1973). *Gravitation*. Physics Series. W. H. Freeman, 1973. ISBN 9780716703440.

X. Moisson, (2000). *Astronomie Fondamentale, Mécanique C'eleste et Géodésie : Intégration du Mouvement des Planètes dans le Cadre de la Relativité Générale*. PhD thesis, IMCCE, March 2000. `http://www.imcce.fr/public/theses/moisson_thes.pdf`.

T. D. Moyer, (1971). *Mathematical formulation of the Double-Precision Orbit Determination Program (DPODP).*, volume 32. JPL Tech. Report, 1971.

H. Müller, S.-W. Chiow, S. Herrmann, S. Chu, and K.-Y. Chung, (2008). Atom-Interferometry Tests of the Isotropy of Post-Newtonian Gravity. *Physical Review Letters*, 100 (3) : 031101, January 2008. doi: 10.1103/PhysRevLett.100.031101, `arXiv:0710.3768 [gr-qc]`.

NASA, (2012). Juno : Unlocking jupiter's mysteries, 2012. `http://www.nasa.gov/mission_pages/juno/main/index.html`.

X. X. Newhall, E. M. Standish, and J. G. Williams, (1983). DE 102 - A numerically integrated ephemeris of the moon and planets spanning forty-four centuries. *A&A*, 125 : 150–167, August 1983.

A. Nicolis, R. Rattazzi, and E. Trincherini, (2009). Galileon as a local modification of gravity. *Phys. Rev. D*, 79 (6) : 064036, March 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.79.064036, `arXiv:0811.2197 [hep-th]`.

K. Nordtvedt, (1968a). Equivalence Principle for Massive Bodies. I. Phenomenology. *Physical Review*, 169 : 1014–1016, May 1968. doi: 10.1103/PhysRev.169.1014.

K. Nordtvedt, (1968b). Equivalence Principle for Massive Bodies. II. Theory. *Physical Review*, 169 : 1017–1025, May 1968. doi: 10.1103/PhysRev.169.1017.

K. Nordtvedt, (1971). Equivalence Principle for Massive Bodies. IV. Planetary Bodies and Modified Eötvös-Type Experiments. *Phys. Rev. D*, 3 : 1683–1689, April 1971. doi: 10.1103/PhysRevD.3.1683.

P. J. E. Peebles, (1993). *Principles of Physical Cosmology.* Princeton Series in Physics. Princeton University Press, 1993. ISBN 9780691019338.

A. A. Penzias and R. W. Wilson, (1965). A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. *ApJ*, 142 : 419–421, July 1965. doi: 10.1086/148307.

S. Perlmutter, (2003). Supernovae, Dark Energy, and the Accelerating Universe. *Physics Today*, 56 (4) : 040000–62, April 2003. doi: 10.1063/1.1580050.

Perlmutter, S. et al., (1999). Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae. *ApJ*, 517 : 565–586, June 1999. doi: 10.1086/307221, `arXiv:astro-ph/9812133`.

G. Petit and P. Wolf, (1994). Relativistic theory for picosecond time transfer in the vicinity of the Earth. *Astron. Astrophys.*, 286 : 971–977, June 1994.

S. Pireaux, (2008). Relativistic orbit determination with the RMI (Relativistic Motion Integrator) software for the LISA mission. In C. Charbonnel, F. Combes, & R. Samadi, editor, *SF2A-2008*, page 143, November 2008.

S. Pireaux, J.-P. Barriot, and G. Balmino, (2004). Basis for a native Relativistic Software integrating the motion of satellites. In A. Finkelstein and N. Capitaine, editors, *Proceedings of the "Journées 2003 Systèmes de Référence Spatio-Temporels"*, page 335. Institute of Applied Astronomy, St. Petersburg, 2004.

S. Pireaux, J.-P. Barriot, and P. Rosenblatt, (2005). Integrating the motion of satellites in a consistent relativisitic framework. The SCRMI prototype software. In *Proceedings of Flight Mechanics Symposium*, volume NASA/CP-2005-212789. Goddard Space Flight Center, NASA Conference publication, 2005.

S. Pireaux, J.-P. Barriot, and P. Rosenblatt, (2006). (SC) RMI : A (S)emi-(C)lassical (R)elativistic (M)otion (I)ntegrator, to model the orbits of space probes around the Earth and other planets. *Acta Astronautica*, 59 : 517–523, October 2006. doi: 10.1016/j.actaastro.2006.04.006, arXiv:gr-qc/0602008.

S. Pireaux, B. Chauvineau, and A. Hees., (2008). Relativistic versus Newtonian orbit model : the Relativistic Motion Integrator (RMI) software. Illustration with the LISA mission. *ArXiv e-prints*, January 2008, arXiv:0801.3637 [gr-qc].

E. V. Pitjeva, (2005). High-Precision Ephemerides of Planets EPM and Determination of Some Astronomical Constants. *Solar System Research*, 39 : 176–186, May 2005. doi: 10.1007/s11208-005-0033-2.

E. V. Pitjeva, (2010). EPM ephemerides and relativity. In S. A. Klioner, P. K. Seidelmann, & M. H. Soffel, editor, *IAU Symposium*, volume 261 of *IAU Symposium*, pages 170–178, January 2010. doi: 10.1017/S1743921309990342.

J. Plebański and A. Krasiński, (2006). *An introduction to general relativity and cosmology*. Cambridge University Press, 2006. ISBN 9780521856232.

H. Poincaré, (1898). La Mesure du Temps. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 6 : 1, 1898. http://www.univ-nancy2.fr/poincare/bhp/pdf/hp1898rm.pdf.

R. V. Pound and G. A. Rebka, (1959). Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance. *Physical Review Letters*, 3 : 439–441, November 1959. doi: 10.1103/PhysRevLett.3.439.

W. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and F. B. P., (2007). *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2007. ISBN 9780521880688. http://books.google.be/books?id=1aAOdzK3FegC.

J. Ramírez and S. Kopeikin, (2002). A decoupled system of hyperbolic equations for linearized cosmological perturbations. *Physics Letters B*, 532 : 1–7, April 2002. doi: 10.1016/S0370-2693(02)01471-5, arXiv:gr-qc/0110071.

B. Ratra and P. J. E. Peebles, (1988). Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field. *Phys. Rev. D*, 37 : 3406–3427, June 1988. doi: 10.1103/PhysRevD.37.3406.

Reasenberg, R. D. et al., (1979). Viking relativity experiment - Verification of signal retardation by solar gravity. *ApJl*, 234 : L219–L221, December 1979. doi: 10.1086/183144.

S. Reynaud and M.-T. Jaekel, (2007). Long Range Gravity Tests and the Pioneer Anomaly. *International Journal of Modern Physics D*, 16 : 2091–2105, 2007. doi: 10.1142/S0218271807011656, arXiv:gr-qc/0610160.

S. Reynaud and M.-T. Jaekel, (2009). Tests of general relativity in the Solar System. In E. Arimondo, W. Ertmer, W. P. Schleich, and E. M. Rasel, editors, *Atom Optics and Space Physics*, page 203, 2009, arXiv:0801.3407 [gr-qc].

L. F. Richardson and J. A. Gaunt, (1927). The Deferred Approach to the Limit. Part I. Single Lattice. Part II. Interpenetrating Lattices. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 226 : 299–361, 1927. doi: 10.1098/rsta.1927.0008.

Riess, A. G. et al., (1998). Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *AJ*, 116 : 1009–1038, September 1998. doi: 10.1086/300499, arXiv:astro-ph/9805201.

C. Ringeval, T. Suyama, T. Takahashi, M. Yamaguchi, and S. Yokoyama, (2010). Dark Energy from Primordial Inflationary Quantum Fluctuations. *Physical Review Letters*, 105 (12) : 121301, September 2010. doi: 10.1103/PhysRevLett.105.121301, arXiv:1006.0368 [astro-ph.CO].

H. P. Robertson, (1935). Kinematics and World-Structure. *ApJ*, 82 : 284, November 1935. doi: 10.1086/143681.

H. P. Robertson, (1936a). Kinematics and World-Structure II. *ApJ*, 83 : 187, April 1936. doi: 10.1086/143716.

H. P. Robertson, (1936b). Kinematics and World-Structure III. *ApJ*, 83 : 257, May 1936. doi: 10.1086/143726.

V. C. Rubin and W. K. Ford, Jr., (1970). Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. *ApJ*, 159 : 379, February 1970. doi: 10.1086/150317.

R. Saffari and S. Rahvar, (2008). f(R) gravity : From the Pioneer anomaly to cosmic acceleration. *Phys. Rev. D*, 77 (10) : 104028, May 2008. doi: 10.1103/PhysRevD.77.104028, arXiv:0708.1482.

A. San Miguel, (2007). Numerical determination of time transfer in general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 39 : 2025–2037, December 2007. doi: 10.1007/s10714-007-0499-y.

R. H. Sanders, (2005). A tensor-vector-scalar framework for modified dynamics and cosmic dark matter. *MNRAS*, 363 : 459–468, October 2005. doi: 10.1111/j.1365-2966.2005.09375.x, arXiv:astro-ph/0502222.

D. Sapone, (2010). Dark Energy in Practice. *International Journal of Modern Physics A*, 25 : 5253–5331, 2010. doi: 10.1142/S0217751X10050743, arXiv:1006.5694 [astro-ph.CO].

Schimd, C. et al., (2007). Tracking quintessence by cosmic shear. Constraints from VIRMOS-Descart and CFHTLS and future prospects. *A&A*, 463 : 405–421, February 2007. doi: 10.1051/0004-6361 :20065154, arXiv:astro-ph/0603158.

K. Schwarzschild, (1916). On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory. *Abh. Konigl. Preuss. Akad. Wissenschaften Jahre 1906,92, Berlin,1907*, pages 189–196, 1916.

I. I. Shapiro, (1964). Fourth Test of General Relativity. *Physical Review Letters*, 13 : 789–791, December 1964. doi: 10.1103/PhysRevLett.13.789.

I. I. Shapiro, C. C. Counselman, III, and R. W. King, (1976). Verification of the principle of equivalence for massive bodies. *Physical Review Letters*, 36 : 555–558, March 1976. doi: 10.1103/PhysRevLett.36.555.

Shapiro, I. I. et al., (1977). The Viking relativity experiment. *J. Geophys. Res.*, 82 : 4329–4334, September 1977. doi: 10.1029/JS082i028p04329.

C. Skordis, (2008). Generalizing tensor-vector-scalar cosmology. *Phys. Rev. D*, 77 (12) : 123502, June 2008. doi: 10.1103/PhysRevD.77.123502, arXiv:0801.1985.

C. Skordis and T. Zlosnik, (2012). Geometry of modified Newtonian dynamics. *Phys. Rev. D*, 85 (4) : 044044, February 2012. doi: 10.1103/PhysRevD.85.044044, arXiv:1101.6019 [gr-qc].

Soffel, M. et al., (2003). The IAU 2000 Resolutions for Astrometry, Celestial Mechanics, and Metrology in the Relativistic Framework : Explanatory Supplement. *Astronomical Journal*, 126 : 2687–2706, December 2003. doi: 10.1086/378162.

M. H. Soffel, (1989). *Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesy*. 1989.

P. J. Steinhardt, L. Wang, and I. Zlatev, (1999). Cosmological tracking solutions. *Phys. Rev. D*, 59 (12) : 123504, June 1999. doi: 10.1103/PhysRevD.59.123504, arXiv:astro-ph/9812313.

H. Stephani and J. Stewart, (1990). *General relativity : an introduction to the theory of the gravitational field*. Cambridge University Press, 1990. ISBN 9780521379410.

S. V. Sushkov, (2009). Exact cosmological solutions with nonminimal derivative coupling. *Phys. Rev. D*, 80 (10) : 103505, November 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.80.103505, arXiv:0910.0980 [gr-qc].

Suzuki, N. et al., (2012). The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey. V. Improving the Dark-energy Constraints above z 1 and Building an Early-type-hosted Supernova Sample. *ApJ*, 746 : 85, February 2012. doi: 10.1088/0004-637X/746/1/85, arXiv:1105.3470 [astro-ph.CO].

J. Synge, (1960). *Relativity : the general theory*. Series in physics. North-Holland Pub. Co., 1960.

G. 't Hooft and M. Veltman, (1974). One-loop divergencies in the theory of gravitation. *Annales de L'Institut Henri Poincare Section Physique Theorique*, 20 : 69–94, 1974.

T. Tamaki and S. Tsujikawa, (2008). Revisiting chameleon gravity : Thin-shell and no-shell fields with appropriate boundary conditions. *Phys. Rev. D*, 78 (8) : 084028, October 2008. doi: 10.1103/PhysRevD.78.084028, arXiv:0808.2284 [gr-qc].

A. N. Taylor, S. Dye, T. J. Broadhurst, N. Benitez, and E. van Kampen, (1998). Gravitational Lens Magnification and the Mass of Abell 1689. *ApJ*, 501 : 539, July 1998. doi: 10.1086/305827, arXiv:astro-ph/9801158.

J. H. Taylor, A. Wolszczan, T. Damour, and J. M. Weisberg, (1992). Experimental constraints on strong-field relativistic gravity. *Nature*, 355 : 132–136, January 1992. doi: 10.1038/355132a0.

P. Teyssandier and C. Le Poncin-Lafitte, (2006). Angular distances in metric theories. *ArXiv General Relativity and Quantum Cosmology e-prints*, November 2006, arXiv:gr-qc/0611078.

P. Teyssandier and C. Le Poncin-Lafitte, (2008). General post-Minkowskian expansion of time transfer functions. *CQG*, 25 : 145020, July 2008. doi: 10.1088/0264-9381/25/14/145020, arXiv:0803.0277.

P. Teyssandier and P. Tourrenc, (1983). The Cauchy problem for the R+R^2 theories of gravity without torsion. *Journal of Mathematical Physics*, 24 : 2793–2799, December 1983. doi: 10.1063/1.525659.

J. E. Tohline, (1983). Stabilizing a cold disk with a 1/r force law. In E. Athanassoula, editor, *Internal Kinematics and Dynamics of Galaxies*, volume 100 of *IAU Symposium*, page 205, 1983.

G. Tommei, A. Milani, and D. Vokrouhlický, (2010). Light-time computations for the Bepi-Colombo Radio Science Experiment. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 107 : 285–298, June 2010. doi: 10.1007/s10569-010-9273-7, `arXiv:0910.5818 [gr-qc]`.

R. Tso and Q. G. Bailey, (2011). Light-bending tests of Lorentz invariance. *Phys. Rev. D*, 84 (8) : 085025, October 2011. doi: 10.1103/PhysRevD.84.085025, `arXiv:1108.2071 [gr-qc]`.

S. Tsujikawa, T. Tamaki, and R. Tavakol, (2009). Chameleon scalar fields in relativistic gravitational backgrounds. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 5 : 20, May 2009. doi: 10.1088/1475-7516/2009/05/020, `arXiv:0901.3226 [gr-qc]`.

S. G. Turyshev and V. T. Toth, (2010). The Pioneer Anomaly. *Living Reviews in Relativity*, 13 : 4, September 2010, `arXiv:1001.3686 [gr-qc]`.

A. Čadež and U. Kostić, (2005). Optics in the Schwarzschild spacetime. *Phys. Rev. D*, 72 (10) : 104024, November 2005. doi: 10.1103/PhysRevD.72.104024, `arXiv:gr-qc/0405037`.

A. I. Vainshtein, (1972). To the problem of nonvanishing gravitation mass. *Physics Letters B*, 39 : 393–394, May 1972. doi: 10.1016/0370-2693(72)90147-5.

H. van Dam and M. Veltman, (1970). Massive and mass-less Yang-Mills and gravitational fields. *Nuclear Physics B*, 22 : 397–411, September 1970. doi: 10.1016/0550-3213(70)90416-5.

P. Van Dooren, (2008). *Théorie des matrices : notes de cours*. Université Catholique de Louvain, 2008.

A. G. Walker, (1937). On milne's theory of world-structure. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-42 (1) : 90–127, 1937. doi: 10.1112/plms/s2-42.1.90, `http://plms.oxfordjournals.org/content/s2-42/1/90.full.pdf+html`. `http://plms.oxfordjournals.org/content/s2-42/1/90.short`.

T. P. Waterhouse, (2006). An Introduction to Chameleon Gravity. *ArXiv Astrophysics e-prints*, November 2006, `arXiv:astro-ph/0611816`.

S. Weinberg, (1972). *Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. July 1972.

S. Weinberg, (1987). Anthropic bound on the cosmological constant. *Physical Review Letters*, 59 : 2607–2610, November 1987. doi: 10.1103/PhysRevLett.59.2607.

S. Weinberg, (1989). The cosmological constant problem. *Reviews of Modern Physics*, 61 : 1–23, January 1989. doi: 10.1103/RevModPhys.61.1.

S. Weinberg, (2000). The Cosmological Constant Problems (Talk given at Dark Matter 2000, February, 2000). *ArXiv Astrophysics e-prints*, May 2000, arXiv:astro-ph/0005265.

J. Weller and A. Albrecht, (2002). Future supernovae observations as a probe of dark energy. *Phys. Rev. D*, 65 (10) : 103512, May 2002. doi: 10.1103/PhysRevD.65.103512, arXiv:astro-ph/0106079.

C. M. Will, (1993). *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. March 1993.

C. M. Will, (2006). The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Reviews in Relativity*, 9 : 3, March 2006, arXiv:gr-qc/0510072. http://www.livingreviews.org/lrr-2006-3.

J. G. Williams, S. G. Turyshev, and D. H. Boggs, (2009). Lunar Laser Ranging Tests of the Equivalence Principle with the Earth and Moon. *International Journal of Modern Physics D*, 18 : 1129–1175, 2009. doi: 10.1142/S021827180901500X, arXiv:gr-qc/0507083.

J. G. Williams, S. G. Turyshev, and D. Boggs, (2012). Lunar Laser Ranging Tests of the Equivalence Principle. *Classical and Quantum Gravity*, 29 (18) : 184004, September 2012. doi: 10.1088/0264-9381/29/18/184004, arXiv:1203.2150 [gr-qc].

M. Yseboodt, J.-P. Barriot, and V. Dehant, (2003). Analytical modeling of the Doppler tracking between a lander and a Mars orbiter in terms of rotational dynamics. *Journal of Geophysical Research (Planets)*, 108 : 5076, July 2003. doi: 10.1029/2003JE002045.

V. I. Zakharov, (1970). Linearized Gravitation Theory and the Graviton Mass. *ZhETF Pis ma Redaktsiiu*, 12 : 447, 1970.

O. Zarrouati, (1987). *Trajectoires spatiales.* Editions Cépaduès, 1987.

T. G. Zlosnik, P. G. Ferreira, and G. D. Starkman, (2006). Vector-tensor nature of Bekenstein's relativistic theory of modified gravity. *Phys. Rev. D*, 74 (4) : 044037, August 2006. doi: 10.1103/PhysRevD.74.044037, arXiv:gr-qc/0606039.

T. G. Zlosnik, P. G. Ferreira, and G. D. Starkman, (2007). Modifying gravity with the aether : An alternative to dark matter. *Phys. Rev. D*, 75 (4) : 044017, February 2007. doi: 10.1103/PhysRevD.75.044017, arXiv:astro-ph/0607411.

F. Zwicky, (1933). Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helvetica Physica Acta*, 6 : 110–127, 1933.

F. Zwicky, (1937). On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae. *ApJ*, 86 : 217, October 1937. doi: 10.1086/143864.

Annexe A

Formalisme des tétrades

Sommaire

A.1 Bases du formalisme des tétrades 187
A.2 Réalisation d'une tétrade 190
A.2.1 Construction locale de tétrades 190
A.2.2 Construction de tétrade par transport 192
A.2.3 Calcul d'une tétrade initiale par un algorithme de Gram-Schmidt 194

Dans cette annexe, nous décrivons les bases du formalisme des tétrades nécessaires pour calculer la direction incidente d'un rayon lumineux. Rappelons que le principe de base des tétrades est de construire un référentiel localement Minkowskien. Nous commencerons par rappeler quelques règles de base du formalisme des tétrades. Ensuite, nous nous attaquerons aux manières de transporter des tétrades (rappelons que dans la cadre de ce travail, nous avons besoin d'une tétrade comobile).

De façon générale dans la suite de l'annexe, les quantités dont les indices/exposants sont notés entre parenthèses correspondent aux quantités exprimées dans la tétrade alors que les quantités dont les indices/exposants sont sans parenthèse sont exprimées dans la base naturelle de coordonnées.

A.1 Bases du formalisme des tétrades

Ce qui suit est une compilation d'informations essentiellement trouvées dans les références suivantes Füzfa [2010]; Weinberg [1972]; Misner et al. [1973]; Brumberg [1991]. La base naturelle de coordonnées de l'espace tangent à la variété différentielle en un point est notée par les vecteurs $\boldsymbol{\partial}_\alpha$. Les vecteurs de base de la tétrade (au même point) sont notés $\boldsymbol{e}_{(\alpha)}$. La matrice de changement de base permettant de passer de la base naturelle de coordonnées à la tétrade est notée ${\lambda_{(\alpha)}}^{\mu}$. Elle est définie par

$$\boldsymbol{e}_{(\alpha)} = {\lambda_{(\alpha)}}^{\mu} \boldsymbol{\partial}_\mu. \tag{A.1}$$

Par définition, le gros avantage d'une tétrade est que cette base se doit d'être localement orthonormée. Par conséquent, la métrique est localement Minkowskienne. Une telle base peut toujours être construite car le tenseur métrique est symétrique et dès lors il est toujours possible de ramener cette forme à une forme diagonale avec des 1, -1 et 0 par des transformations de congruence (théorème d'inertie de Sylvester Van Dooren [2008]). Ces transformations correspondent physiquement à un changement de base dans l'espace tangent à la variété différentielle.

Imposer l'orthogonalité des vecteurs de base de la tétrade revient à écrire

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_{(\alpha)}, \boldsymbol{e}_{(\beta)}) = \eta_{(\alpha)(\beta)}, \tag{A.2}$$

avec $\boldsymbol{g}(.,.)$ l'application métrique. Si on introduit les matrices de changements de base à partir de l'équation précédente, on trouve le lien entre $g_{\mu\nu}$ l'expression du tenseur métrique dans la base naturelle de coordonnées et $\eta_{(\alpha)(\beta)}$ l'expression de ce même tenseur dans la tétrade

$$\eta_{(\alpha)(\beta)} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_{(\alpha)}, \boldsymbol{e}_{(\beta)}) = \boldsymbol{g}(\lambda_{(\alpha)}{}^{\mu}\boldsymbol{\partial}_{\mu}, \lambda_{(\beta)}{}^{\nu}\boldsymbol{\partial}_{\nu}) = \lambda_{(\alpha)}{}^{\mu}\lambda_{(\beta)}{}^{\nu}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\partial}_{\mu}, \boldsymbol{\partial}_{\nu}) = \lambda_{(\alpha)}{}^{\mu}\lambda_{(\beta)}{}^{\nu}g_{\mu\nu}. \tag{A.3}$$

Etant donné que dans la base de la tétrade, la métrique est localement Minkowskienne, la théorie de la relativité restreinte s'applique localement. En particulier, d'un point de vue calculatoire, toutes les indices relatifs à la tétrade (indices entre parenthèses) peuvent être montés et descendus au moyen de la métrique de Minkowski (alors que tous les indices relatifs à la base naturelle (notés sans parenthèse) sont montés et descendus avec la métrique $g_{\mu\nu}$).

Nous pouvons introduire la transformation inverse à $\lambda_{(\alpha)}{}^{\mu}$ que nous noterons $\lambda_{\mu}{}^{(\alpha)}$

$$\lambda_{\nu}{}^{(\gamma)}\lambda_{(\beta)}{}^{\nu} = \delta^{(\gamma)}_{(\beta)}. \tag{A.4}$$

Si nous prenons la relation (A.3) et que nous la multiplions par $\eta^{(\gamma)(\alpha)}$, nous obtenons

$$\eta^{(\gamma)(\alpha)}\eta_{(\alpha)(\beta)} = \delta^{(\gamma)}_{(\beta)} = \eta^{(\gamma)(\alpha)}\lambda_{(\alpha)}{}^{\mu}\lambda_{(\beta)}{}^{\nu}g_{\mu\nu}. \tag{A.5}$$

Si on identifie les deux dernières équations, on trouve que

$$\lambda_{\nu}{}^{(\gamma)} = \eta^{(\gamma)(\alpha)}\lambda_{(\alpha)}{}^{\mu}g_{\mu\nu} = \lambda^{(\gamma)}{}_{\nu}. \tag{A.6}$$

Ceci montre que la matrice inverse de la transformation de coordonnées peut être obtenue simplement en levant et en descendant les indices en tenant compte du fait que les indices se référant à la tétrade se bougent avec la métrique de Minkowski tandis que les indices se référant à la base naturelle se bougent avec la métrique $g_{\mu\nu}$. Remarquons en passant que l'ordre d'écriture des indices pour λ n'est pas important du moment qu'on garde en tête que les indices avec parenthèses ne se somment pas avec les indices sans parenthèse. Par contre, en tant que matrice numérique, λ n'est pas symétrique.

Cette transformation inverse permet de passer de la tétrade à la base naturelle

$$\boldsymbol{\partial}_{\mu} = \lambda^{(\alpha)}_{\mu}\boldsymbol{e}_{(\alpha)} \tag{A.7}$$

mais également de faire le lien entre les bases des espaces cotangents. En effet, si on note par $\boldsymbol{dx}^{\mu}$ la base duale naturelle de coordonnées (qui est donc la base duale de $\boldsymbol{\partial}_{\mu}$) et si on note par $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$ la base duale de la tétrade $\boldsymbol{e}_{(\alpha)}$, le définition de la base duale implique que

$$\boldsymbol{e}^{(\alpha)}\left[\boldsymbol{e}_{(\beta)}\right] = \delta^{(\alpha)}_{(\beta)} \tag{A.8}$$

où $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}[\mathbf{y}]$ représente l'action de la 1-forme sur un vecteur $\mathbf{y}$. Si on insère la relation (A.1) dans cette expression, on trouve

$$\boldsymbol{e}^{(\alpha)}\left[\lambda^{\mu}_{(\beta)}\boldsymbol{\partial}_{\mu}\right] = \lambda^{\mu}_{(\beta)}\boldsymbol{e}^{(\alpha)}[\boldsymbol{\partial}_{\mu}] = \delta^{(\alpha)}_{(\beta)}. \tag{A.9}$$

Si on compare cette équation avec la relation (A.4), on trouve que $\lambda^{(\alpha)}_{\mu} = \boldsymbol{e}^{(\alpha)}[\boldsymbol{\partial}_{\mu}]$ qui est équivalent à

$$\boldsymbol{e}^{(\alpha)} = \lambda^{(\alpha)}_{\nu}\boldsymbol{dx}^{\nu}. \tag{A.10}$$

Finalement les matrices λ donnent les transformations des composantes des tenseurs. Par exemple, si on prend un vecteur quelconque de l'espace tangent $\boldsymbol{V}$ et si on note V^{μ} ses composantes dans la base naturelle et $V^{(\alpha)}$ ses composantes dans la tétrade, on peut écrire que

$$\boldsymbol{V} = V^{\mu}\boldsymbol{\partial}_{\mu} = V^{(\alpha)}\boldsymbol{e}_{(\alpha)} = V^{(\alpha)}\lambda^{\mu}_{(\alpha)}\boldsymbol{\partial}_{\mu}. \tag{A.11}$$

On trouve donc

$$V^{\mu} = V^{(\alpha)}\lambda^{\mu}_{(\alpha)}. \tag{A.12}$$

Résumé et formulaire En résumé, la matrice $\lambda^{\mu}_{(\alpha)}$ représente les coordonnées des vecteurs de base de la tétrade dans la base naturelle. Son inverse $\lambda^{(\alpha)}_{\mu}$ peut être obtenue par montée et descente successives des indices avec les métriques qui s'y rapportent ($\eta_{(\alpha)(\beta)}$ pour les indices se référant à la tétrade et $g_{\mu\nu}$ pour les indices se référant à la base naturelle)

$$\lambda^{\mu}_{(\alpha)}\lambda^{(\beta)}_{\mu} = \delta^{(\beta)}_{(\alpha)} \quad \Longrightarrow \quad \lambda^{(\alpha)}_{\mu} = g_{\mu\nu}\eta^{(\alpha)(\beta)}\lambda^{\nu}_{(\beta)} \tag{A.13}$$

Les liens entre les vecteurs de la base naturelle et de la tétrade, de même que les transformations de la base duale sont donnés par

$$\boldsymbol{e}_{(\alpha)} = \lambda^{\mu}_{(\alpha)}\boldsymbol{\partial}_{\mu} \qquad \boldsymbol{\partial}_{\mu} = \lambda^{(\alpha)}_{\mu}\boldsymbol{e}_{(\alpha)} \tag{A.14}$$

$$\boldsymbol{e}^{(\alpha)} = \lambda^{(\alpha)}_{\mu}\boldsymbol{dx}^{\mu} \qquad \boldsymbol{dx}^{\mu} = \lambda^{\mu}_{(\alpha)}\boldsymbol{e}^{(\alpha)}. \tag{A.15}$$

L'orthogonalité de la tétrade impose les relations suivantes

$$\eta_{(\alpha)(\beta)} = \lambda^{\mu}_{(\alpha)}\lambda^{\nu}_{(\beta)}g_{\mu\nu} \qquad g_{\mu\nu} = \eta_{(\alpha)(\beta)}\lambda^{(\alpha)}_{\mu}\lambda^{(\beta)}_{\nu}. \tag{A.16}$$

Les composantes contravariantes et covariantes des tenseurs se transforment de façon traditionnelle

$$V^{(\alpha)} = \lambda^{(\alpha)}_{\mu}V^{\mu} \qquad V^{\mu} = \lambda^{\mu}_{(\alpha)}V^{(\alpha)} \tag{A.17a}$$

$$V_{(\alpha)} = \lambda^{\mu}_{(\alpha)}V_{\mu} \qquad V_{\mu} = \lambda^{(\alpha)}_{\mu}V_{(\alpha)}. \tag{A.17b}$$

Finalement, l'invariant relativiste s'écrit

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = \eta_{(\alpha)(\beta)}dx^{(\alpha)}dx^{(\beta)} = (dx^{(0)})^2 - (dx^{(1)})^2 - (dx^{(2)})^2 - (dx^{(3)})^2. \tag{A.18}$$

Dans cette base, la physique de la relativité restreinte s'applique localement.

A.2 Réalisation d'une tétrade

La section précédente rappelle les propriétés importantes d'une tétrade. Dans cette section, nous allons voir comment il est possible de construire une tétrade qui soit comobile avec un observateur et qui ait un sens physique. Dans le problème qui nous intéresse, il nous faut disposer d'une tétrade en tous points de la trajectoire de l'observateur. Deux possibilités se présentent donc à nous : en chaque point, l'observateur construit localement une tétrade ou à l'opposé, l'observateur transporte une tétrade selon une loi de transport spécifique (cette tétrade n'est donc pas construite "localement" car elle dépend de la trajectoire de l'observateur). Il est intéressant de remarquer que des tétrades sont reliées entre elles uniquement par des transformations de Lorentz (boosts et rotations spatiales). Par conséquent, deux tétrades comobiles avec le même observateur ne peuvent différer que par une rotation spatiale.

A.2.1 Construction locale de tétrades

Dans cette section, nous nous intéressons aux tétrades qui sont construites localement sans nécessairement faire appel à une loi de transport. Parmi ces tétrades, deux intéressantes peuvent se trouver dans la littérature : la tétrade cinématiquement non-tournante et la tétrade de Serret-Frenet.

Tétrade cinématiquement non-tournante

Cette idée de construction de tétrade provient d'une idée Newtonienne de l'astrométrie dans laquelle on mesure la position angulaire du corps observé par rapport à un référentiel constitué d'étoiles lointaines. Ainsi, où que l'observateur se trouve, la tétrade est orientée de telle façon que ces axes spatiaux soient toujours dirigés vers la même direction. Klioner et Soffel [1998] ont donné une définition formelle d'un système de référence cinématiquement non tournant en Relativité Générale. Cette définition stipule que la transformation entre les coordonnées spatiales liées aux deux systèmes de référence ne dépend pas d'une rotation dépendante du temps. Cette définition est donc une définition qui est explicitement dépendante de coordonnées qui est par définition physiquement difficilement réalisable. Ceci peut se comprendre par le fait que physiquement, l'observation d'un objet par rapport à une source distante n'implique pas la connaissance de la position de cette source distante. En pratique, on ne connait que la direction des rayons lumineux provenant de cette source. Si on néglige la déflexion lumineuse de ce rayon, alors on peut associer la source distante à une direction particulière du système de coordonnées et la définition de Klioner et Soffel devient physiquement réalisable. Par conséquent, en utilisant cette définition (couramment utilisée), la déflexion de la lumière des étoiles lointaines est négligée ou doit être corrigée.

La construction d'une telle tétrade se fait aisément et peut se trouver dans Misner et al. [1973]; Brumberg [1991]; Soffel [1989]. Concrètement, la construction mathématique de ce type de tétrade se fait en deux étapes : la première consiste en un scaling des coordonnées pour construire une tétrade immobile (par rapport au système de coordonnées naturelles) et ensuite de

lui faire subir un boost pour qu'elle devienne comobile avec l'observateur. La dérivation explicite de cette tétrade est un peu fastidieuse mais on trouve finalement les expressions (2.3.32) et (2.3.33) de Brumberg [1991]. Cette transformation est locale et elle ne dépend que de la vitesse de l'observateur. Elle ne fait nullement appel à un transport quelconque (ce qui est son avantage considérable).

Le principal défaut de cette tétrade (surtout en ce qui nous concerne) est qu'elle dépend du jeu de coordonnées. Par conséquent, c'est extrêmement difficile (voire impossible) de construire physiquement une telle tétrade dans une théorie quelconque de la gravité.

La tétrade de Serret-Frenet

La tétrade de Serret-Frenet est construit à partir d'un vecteur tangent à la courbe et de ses dérivées successives. En 3D, le référentiel de Serret-Frenet est fortement utilisé car il donne des informations sur le comportement local de la courbe (le rayon de courbure qui donne la tendance de la courbe à s'écarter de la tangente et la torsion qui donne la tendance de la courbe à s'écarter du plan osculateur). Il se généralise aisément en 4D. L'idée est très simple et consiste à utiliser un procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt sur les dérivées successives du vecteur tangent à la courbe (le vecteur tangent qui est la quadri-vitesse) [Gourgoulhon, 2010]. Concrètement, cela revient à partir de

$$\boldsymbol{e}_{(0)} = \boldsymbol{u} = \frac{1}{c}\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}, \tag{A.19}$$

puis de calculer $\frac{D\boldsymbol{u}}{D\tau}$. Etant donné que la norme de $\boldsymbol{u}$ est constante, ce vecteur est orthogonal à sa dérivée et il suffit donc de le normer pour trouver $\boldsymbol{e}_{(1)}$

$$\boldsymbol{e}_{(1)} = \frac{D\boldsymbol{u}}{D\tau}\frac{1}{\left\|\frac{D\boldsymbol{u}}{D\tau}\right\|}. \tag{A.20}$$

Le vecteur suivant se calcule à partir de la dérivée seconde de la vitesse

$$\boldsymbol{e}_{(2)} = \left(\frac{D\boldsymbol{e}_{(1)}}{D\tau} - \left(\frac{D\boldsymbol{e}_{(1)}}{D\tau}, \boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{u}\right)\frac{1}{\left\|\frac{D\boldsymbol{e}_{(1)}}{D\tau} - \left(\frac{D\boldsymbol{e}_{(1)}}{D\tau}, \boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{u}\right\|}. \tag{A.21}$$

Le dernier vecteur est quant à lui orthogonal à tous les autres.

Cette tétrade se construit localement et elle ne fait à priori pas appel à de transport particulier. Physiquement, elle peut se construire si l'observateur possède un instrument qui lui permet de mesurer la 4-accélération (un accéléromètre) et un instrument qui lui permet de mesurer la dérivée de l'accélération (le jerk) (mais est-ce réalisable ?). Il est aussi intéressant de remarquer que cette tétrade peut aussi se construire par un transport particulier appelé le transport de Serret-Frenet. Ce transport s'écrit sous forme matricielle par

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}'_{(0)}(\tau) \\ \boldsymbol{e}'_{(1)}(\tau) \\ \boldsymbol{e}'_{(2)}(\tau) \\ \boldsymbol{e}'_{(3)}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \chi_1(\tau) & 0 & 0 \\ \chi_1(\tau) & 0 & \chi_2(\tau) & 0 \\ 0 & -\chi_2(\tau) & 0 & \chi_3(\tau) \\ 0 & 0 & -\chi_3(\tau) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{(0)}(\tau) \\ \boldsymbol{e}_{(1)}(\tau) \\ \boldsymbol{e}_{(2)}(\tau) \\ \boldsymbol{e}_{(3)}(\tau) \end{bmatrix} \tag{A.22}$$

où le $'$ représente la dérivée par rapport au temps propre et les χ_i représentent les courbures de la courbe suivie.

A.2.2 Construction de tétrade par transport

Une autre façon de construire une tétrade est de transporter une tétrade initialement donnée avec l'observateur. Cette construction nécessite une définition du transport. D'un point de vue purement mathématique, la seule condition à imposer est que la tétrade reste une tétrade et en particulier, qu'elle reste orthonormale. Avec cette condition, on peut réécrire le transport de la tétrade sous la forme [Krause, 1975]

$$\frac{D\boldsymbol{e}_{(\alpha)}}{D\tau} = A_{(\alpha)}{}^{(\beta)}\boldsymbol{e}_{(\beta)}. \tag{A.23}$$

La condition suffisante pour que la tétrade se transporte correctement est que la matrice $A_{(\alpha)(\beta)}$ soit anti-symmétrique. Cette condition est suffisante ce qui fait que n'importe quelle matrice anti-symmétrique peut servir à construire un transport qui préserve le caractère orthonormal de la tétrade.

Un vecteur comobile avec cette tétrade est un vecteur dont les composantes dans la tétrade n'évoluent pas avec le temps. Prenons par exemple un vecteur comobile $\boldsymbol{V} = V^{(\alpha)}\boldsymbol{e}_{(\alpha)} = V^{\mu}\boldsymbol{\partial}_{\mu}$. Les composantes $V^{(\alpha)}$ sont constantes dans le temps à l'instar des composantes dans la base naturelle qui vont évoluer. Pour le voir, calculons la dérivée de ce vecteur à partir de la tétrade

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{D\tau} = V^{(\alpha)}\frac{D\boldsymbol{e}_{(\alpha)}}{D\tau} = V^{(\alpha)}A_{(\alpha)}{}^{(\beta)}\boldsymbol{e}_{(\beta)} = V^{\nu}\lambda^{(\alpha)}_{\nu}A_{(\alpha)}{}^{(\beta)}\lambda^{\mu}_{(\beta)}\boldsymbol{\partial}_{\mu} \tag{A.24}$$

et égalons cette expression avec la dérivée de ce vecteur calculée dans la base naturelle $\frac{D\boldsymbol{V}}{D\tau} = \frac{DV^{\mu}}{D\tau}\boldsymbol{\partial}_{\mu}$ pour trouver

$$\frac{DV^{\mu}}{D\tau} + A^{\mu}{}_{\nu}V^{\nu} = 0 \tag{A.25}$$

où la matrice $A^{\mu}{}_{\nu}$ est définie par

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu} = -\lambda^{(\alpha)}_{\nu}A_{(\alpha)(\beta)}\lambda^{(\beta)}_{\mu}. \tag{A.26}$$

Finalement, cette dernière propriété permet de montrer que n'importe quel vecteur dont la norme reste constante le long de la ligne d'univers de l'observateur définit un transport de tétrade. En effet, si on norme le vecteur, on a $D(V^{\mu}V_{\mu})/D\tau = 0$ qui est équivalent à $DV^{\mu}/D\tau V_{\mu} = 0$. Si on définit

$$A^{\mu\nu} = (V^{\mu}\frac{DV^{\nu}}{D\tau} - V^{\nu}\frac{DV^{\mu}}{D\tau}), \tag{A.27}$$

la propriété (A.25) est automatiquement satisfaite. Remarquons que nous pouvons ajouter une matrice de rotation à la matrice A si cette matrice est orthogonale au vecteur $\boldsymbol{V}$.

Transport de Serret-Frenet

On peut transporter n'importe quelle tétrade en utilisant le transport de Serret-Frenet défini par (A.22). Les composantes de la tétrade dans la tétrade de Serret-Frenet sont ainsi constants dans le temps. Et par définition, le vecteur $\boldsymbol{e}_{(0)}$ est la quadri-vitesse de l'observateur tout le long de la ligne d'univers de l'observateur. Par contre, si la construction de la tétrade de Serret-Frenet localement est aisément interprétable physiquement, le transport est plus délicat à interpréter physiquement.

Transport de Fermi-Walker

L'application des relations (A.25) et (A.27) à la quadri-vitesse dont la norme est constante dans le temps donne lieu au transport de Fermi-Walker :

$$\frac{DV^\mu}{D\tau} = \left(u^\nu \frac{Du^\mu}{D\tau} - u^\mu \frac{Du^\nu}{D\tau} \right) V_\nu \tag{A.28}$$

où u^μ est la quadri-vitesse de l'observateur. En particulier, les vecteurs de base de la tétrade sont transportés Fermi-Walker

$$\frac{D\boldsymbol{e}_{(\alpha)}}{D\tau} = \frac{D\boldsymbol{u}}{D\tau} \left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_{(\alpha)} \right) - \boldsymbol{u} \left(\frac{D\boldsymbol{u}}{D\tau}, \boldsymbol{e}_{(\alpha)} \right) \tag{A.29}$$

La composante 0 de cette équation est triviale alors que la composante i donne (en utilisant l'orthonormalité de la tétrade)

$$\frac{D\boldsymbol{e}_{(i)}}{D\tau} = -\boldsymbol{u} \left(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_{(i)} \right) \tag{A.30}$$

où $\boldsymbol{a} = D\boldsymbol{u}/D\tau$. L'énorme avantage de ce transport est qu'il correspond physiquement au transport d'un gyroscope. Par conséquent, une tétrade transportée par Fermi-Walker correspond physiquement à un référentiel local comobile avec l'observateur dont les axes spatiaux sont donnés par des gyroscopes comobiles avec l'observateur. En passant, il est intéressant de préciser que dans Krause [1975], il est montré que le transport de Fermi-Walker et la transport de Serret-Frenet ne diffèrent que par une rotation spatiale.

Cette solution est celle qui convient le mieux dans une approche où on veut une description mathématique qui soit invariante sous transformations de coordonnées et qui soit physiquement réalisable.

Le désavantage de cette méthode est qu'elle n'est pas locale dans le sens où il faut intégrer l'équation de Fermi-Walker le long de la trajectoire de l'observateur à partir d'une tétrade initiale. En termes de composantes dans la base naturelle, l'équation à intégrer pour trouver les composantes de la tétrade est

$$\frac{D\lambda^\mu_{(i)}}{D\tau} = \frac{d\lambda^\mu_{(i)}}{d\tau} + c\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\lambda^\alpha_{(i)}u^\beta = -u^\mu a_\nu \lambda^\nu_{(i)} \tag{A.31}$$

où $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ sont les symboles de Christoffel de la métrique $g_{\mu\nu}$. L'évolution du vecteur (0) de la tétrade est triviale car il s'agit de la quadri-vitesse de l'observateur.

Il est également possible d'exprimer cette dernière équation en faisant intervenir le temps coordonné t au lieu du temps propre τ ainsi que des vitesses coordonnées $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ au lieu des quadri-vitesses u^α. Ceci se fait en multipliant la dernière expression par $d\tau/dt$ et nous obtenons ainsi

$$\frac{d\lambda^\mu_{(i)}}{dt} = -\lambda^\alpha_{(i)} \left(\Gamma^\mu_{\alpha 0} c + \Gamma^\mu_{\alpha j} v^j \right) - v^\mu a_\nu \lambda^\nu_{(i)} \tag{A.32}$$

où par soucis d'écriture, je note $v^0 = c$.

Notons que dans le cas où la trajectoire de l'observateur est une géodésique, on a $a^\mu = \frac{Du^\mu}{D\tau} = 0$ et le dernier terme disparait.

En résumé, le transport de Fermi-Walker permet de construire une tétrade qui se réalise physiquement par le transport de gyroscope et qui se calcule mathématiquement en intégrant les équations de propagation

$$\frac{d\lambda^{\mu}_{(i)}}{dt} = -\lambda^{\alpha}_{(i)} \left(\Gamma^{\mu}_{\alpha 0} c + \Gamma^{\mu}_{\alpha j} v^{j} \right) \tag{A.33}$$

valides si l'observateur suit une géodésique. Le vecteur indexé (0) est déjà intégré dans les équations du mouvement vu que nous intégrons la vitesse coordonnée et l'équation du temps propre et que

$$\lambda^{\mu}_{(0)} = u^{\mu} = (\frac{dt}{d\tau}, \frac{1}{c}\frac{dt}{d\tau} v^{i}). \tag{A.34}$$

Par conséquent, l'intégration de la tétrade transportée Fermi-Walker demande l'intégration de 12 équations et demande des conditions initiales supplémentaires correspondant à la tétrade au temps initial.

A.2.3 Calcul d'une tétrade initiale par un algorithme de Gram-Schmidt

Les deux méthodes ci-dessus demandent d'intégrer une équation différentielle pour transporter une tétrade le long de la ligne d'univers de l'observateur mais il faut d'abord déterminer une tétrade initiale. Une façon de faire serait de prendre la transformation qui définit localement une tétrade cinématiquement non tournante au temps initial. Cependant, étant donné que les formules ne sont valables qu'au premier ordre, il est intéressant de présenter une méthode générique pour trouver une tétrade initiale. Cette méthode se base sur le principe d'orthogonalisation de Gram-Schmidt (bien connu en géométrie euclidienne et en algèbre linéaire).

La méthode consiste à partir d'une base quelconque et ensuite d'orthogonaliser les vecteurs les uns par rapport aux autres. Dans notre cas, on inclura évidemment la quadri-vitesse comme vecteur de base. Un exemple de base est donné par

$$\tilde{\lambda}^{\mu}_{(0)} = u^{\mu}, \quad \tilde{\lambda}^{\mu}_{(i)} = \delta^{\mu}_{(i)}. \tag{A.35}$$

Il est évident qu'il s'agit d'une base de notre espace à 4 dimensions. Il est aussi clair qu'elle n'est pas orthonormée. Je note par $\tilde{\boldsymbol{e}}_{(\alpha)}$ les vecteurs de cette base dont les composantes naturelles sont données dans la dernière expression. En partant de ces vecteurs, on construit une base orthonormée de la façon suivante. Le premier vecteur est trivial

$$\boldsymbol{e}_{(0)} = \tilde{\boldsymbol{e}}_{(0)} = \boldsymbol{u} \qquad \lambda^{\mu}_{(0)} = \tilde{\lambda}^{\mu}_{(0)} = u^{\mu}. \tag{A.36}$$

Le second est obtenu en prenant le second vecteur de base et en l'orthogonalisant par rapport au précédent

$$\boldsymbol{e}_{(1)} = \left[\tilde{\boldsymbol{e}}_{(1)} + \left(\tilde{\boldsymbol{e}}_{(1)}, \boldsymbol{u} \right) \boldsymbol{u} \right] \frac{1}{\alpha} \qquad \text{ou} \qquad \lambda^{\mu}_{(1)} = \left[\delta^{\mu}_{1} + u_1 u^{\mu} \right] \frac{1}{\alpha} \tag{A.37}$$

où α est un scalaire qui sert à normaliser ce vecteur à 1. Il est donné par

$$\alpha^2 = \left(\tilde{\boldsymbol{e}}_{(1)}, \tilde{\boldsymbol{e}}_{(1)} \right) + \left(\tilde{\boldsymbol{e}}_{(1)}, \boldsymbol{u} \right)^2 = g_{11} + u_1^2 \tag{A.38}$$

où pour la dernière égalité, on a utilisé l'expression des composantes des vecteurs (A.35).

Le troisième vecteur de la tétrade est construit à partir de $\tilde{\boldsymbol{e}}_{(2)}$ qu'on orthogonalise par rapport aux deux vecteurs précédents

$$\boldsymbol{e}_{(2)} = \left[\tilde{\boldsymbol{e}}_{(2)} + \left(\tilde{\boldsymbol{e}}_{(2)}, \boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{u} - \left(\tilde{\boldsymbol{e}}_{(2)}, \boldsymbol{e}_{(1)}\right)\boldsymbol{e}_{(1)}\right]\frac{1}{\beta} \qquad \text{ou} \qquad \lambda^{\mu}_{(2)} = \left[\delta^{\mu}_{2} + u_2 u^{\mu} - \lambda^{\mu}_{(1)}\lambda_{2(1)}\right]\frac{1}{\beta} \tag{A.39}$$

où encore une fois β est un facteur de normalisation qui vaut

$$\beta^2 = \left(\tilde{\boldsymbol{e}}_{(2)}, \tilde{\boldsymbol{e}}_{(2)}\right) + \left(\tilde{\boldsymbol{e}}_{(2)}, \boldsymbol{u}\right)^2 - \left(\tilde{\boldsymbol{e}}_{(2)}, \boldsymbol{e}_{(1)}\right)^2 = g_{22} + u_2^2 - \left(\lambda_{2(1)}\right)^2 . \tag{A.40}$$

Finalement le dernier vecteur de la tétrade s'obtient de façon similaire

$$\boldsymbol{e}_{(3)} = \left[\tilde{\boldsymbol{e}}_{(3)} + \left(\tilde{\boldsymbol{e}}_{(3)}, \boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{u} - \left(\tilde{\boldsymbol{e}}_{(3)}, \boldsymbol{e}_{(1)}\right)\boldsymbol{e}_{(1)} - \left(\tilde{\boldsymbol{e}}_{(3)}, \boldsymbol{e}_{(2)}\right)\boldsymbol{e}_{(2)}\right]\frac{1}{\gamma} \qquad \text{ou} \tag{A.41}$$

$$\lambda^{\mu}_{(3)} = \left[\delta^{\mu}_{3} + u_3 u^{\mu} - \lambda^{\mu}_{(1)}\lambda_{3(1)} - \lambda^{\mu}_{(2)}\lambda_{3(2)}\right]\frac{1}{\gamma} \tag{A.42}$$

où la normalisation donne la valeur de γ

$$\gamma^2 = \left(\tilde{\boldsymbol{e}}_{(3)}, \tilde{\boldsymbol{e}}_{(3)}\right) + \left(\tilde{\boldsymbol{e}}_{(3)}, \boldsymbol{u}\right)^2 - \left(\tilde{\boldsymbol{e}}_{(3)}, \boldsymbol{e}_{(1)}\right)^2 - \left(\tilde{\boldsymbol{e}}_{(3)}, \boldsymbol{e}_{(2)}\right)^2 = g_{33} + u_3^2 - \left(\lambda_{3(1)}\right)^2 - \left(\lambda_{3(2)}\right)^2 . \tag{A.43}$$

Ces équations très simples à implémenter nous donnent donc directement l'expression d'une tétrade. N'importe quelle autre tétrade initiale peut être obtenue par rotation spatiale à partir de celle-ci. Par exemple, notons $\bar{\lambda}$ une autre tétrade, on aura

$$\bar{\lambda}^{\mu}_{(\alpha)} = R^{\mu}{}_{\nu}\lambda^{\nu}_{(\alpha)} \tag{A.44}$$

avec $R^0{}_0 = 1$, $R^0{}_i = R^i{}_0 = 0$ et $R^i{}_j$ est une matrice de rotation à trois dimensions (c'est-à dire une matrice telle que $R^i{}_j R_k{}^j = \delta^i_k$). Cet algorithme a été testé sous un code MatLab et fonctionne parfaitement bien.

Annexe B

Equations de propagation des rayons lumineux

Sommaire

B.1 Dérivation d'un point de vue corpusculaire 197
B.1.1 Masse du photon 198
B.1.2 Vitesse de propagation et invariant relativiste 198
B.1.3 Equation du mouvement 199
B.2 Dérivation d'un point de vue ondulatoire 199
B.2.1 Equations de Maxwell 199
B.2.2 Limite de l'optique géométrique 201

Il est intéressant de se poser la question de la dérivation des équations de propagation des rayons lumineux d'un point de vue fondamental. Il est couramment admis que la lumière se propage en suivant une géodésique nulle. D'où cela vient-il ? Dans quelle limite ceci est-il vrai ? C'est à ces questions que tente de répondre cette annexe théorique. D'un point de vue fondamental, la théorie adaptée à la description des interactions électromagnétiques est l'électrodynamique quantique (QED). Sans prendre la peine de remonter jusqu'à l'étude de QED pour en prendre la limite classique (dans le sens $\hbar \to 0$), nous proposons deux dérivations de l'équation des géodésiques pour la lumière. La première méthode est basée sur une approche corpusculaire en traitant l'équation du mouvement d'un photon tandis que la seconde méthode se base sur une approche ondulatoire.

B.1 Dérivation d'un point de vue corpusculaire

La dérivation ci-dessous est effectuée en adoptant un point de vue corpusculaire sur le signal électromagnétique en traitant le photon comme une particule et en dérivant ses équations du mouvement.

B.1.1 Masse du photon

Le photon est une particule de masse nulle. D'un point de vue théorique, la masse nulle du photon est requise pour assurer l'invariance de jauge de QED. En effet, un terme de masse (pour le photon) dans le lagrangien de QED briserait l'invariance de jauge $U(1)$ de la théorie [Goldhaber et Nieto, 1971]. Par conséquent, l'application de cette invariance de jauge pose une contrainte théorique sur la masse du photon qui se doit d'être nulle. D'un point de vue expérimental, la limite actuelle sur la masse du photon est donnée par Beringer et al. [2012]

$$m_\gamma < 10^{-18} eV. \tag{B.1}$$

B.1.2 Vitesse de propagation et invariant relativiste

En relativité restreinte, les particules de masse nulle ont un comportement très spécifique. Pour le voir, il faut considérer l'énergie E du photon. D'un point de vue quantique, Einstein a expliqué l'effet photo-électrique en émettant l'hypothèse que l'énergie du photon est quantifiée [Einstein, 1905a, 1909], ce qui lui valut le prix Nobel de Physique en 1921. Cette prédiction fut confirmée expérimentalement par Compton [1923] (Compton obtint le Nobel de physique en 1927). L'énergie d'un photon est donc proportionnelle à sa fréquence $E = h\nu$. D'autre part, dans le cadre de la relativité restreinte, Einstein a montré que l'énergie d'une particule de masse m se déplaçant à une vitesse $\vec{V}$ par rapport à un référentiel inertiel s'écrit

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{B.2}$$

Ainsi, la seule possibilité pour qu'une particule de masse nulle ($m = 0$) puisse avoir une énergie non-nulle est qu'elle se déplace à la vitesse de la lumière c.

Etant donné que la vitesse d'une particule non massive est celle de la lumière, cela signifie que l'invariant relativiste évalué dans un référentiel inertiel s'annule

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = 0. \tag{B.3}$$

Si nous divisons cette relation par $d\lambda^2$ (λ étant une paramétrisation de la trajectoire du photon), nous obtenons alors

$$0 = \left(\frac{cdt}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2 = -\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}. \tag{B.4}$$

Cette relation valable en relativité restreinte s'étend à la RG en remplaçant la métrique de Minkowski par la métrique de l'espace-temps courbé $g_{\mu\nu}$. En posant $k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, nous pouvons écrire en toute généralité la relation

$$\boxed{k_\mu k^\mu = 0}. \tag{B.5}$$

B.1.3 Equation du mouvement

La dérivation des équations du mouvement pour une particule massive se fait à partir de l'action (2.9)

$$S = -mc^2 \int d\tau. \tag{B.6}$$

Il est évident que cette action ne peut convenir pour des particules non-massives. Par contre, elle peut s'étendre comme indiqué dans le cours de Gérard [2007]

$$\tilde{S} = -\frac{c^2}{2} \int \left\{ -e^{-1} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + m^2 e \right\} d\lambda \tag{B.7}$$

où λ est un paramètre affin et e est un multiplicateur de Lagrange. Dans le cas massif, la variation de cette action par rapport au multiplicateur de Lagrange donne la contrainte

$$e = \frac{1}{m} \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \tag{B.8}$$

qui réinjectée dans l'action (B.7) est équivalente à l'action classique d'une particule massive. Par contre, dans le cas de particules de masse nulle, cette action devient

$$\tilde{S} = \frac{c^2}{2e} \int g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda. \tag{B.9}$$

La variation de cette action (ou encore l'application des équations d'Euler-Lagrange sur le lagrangien $L = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$ telle que réalisée dans Hobson et al. [2006, chap. 3.19]) donne l'équation des géodésiques

$$\boxed{\frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0} \tag{B.10}$$

où nous avons posé $k^\mu = dx^\mu / d\lambda$.

Les équations (B.5) et (B.10) représentent les équations de propagation du photon. Ce jeu d'équations correspond à une géodésique nulle.

B.2 Dérivation d'un point de vue ondulatoire

L'autre méthode pour dériver l'équation de la propagation de la lumière est de partir de l'électrodynamique classique et d'en prendre la limite de l'optique géométrique. Cette méthode est présentée dans Misner et al. [1973, chap. 22.4] ou encore dans Stephani et Stewart [1990, chap. 8.4].

B.2.1 Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell en RG se dérivent en utilisant le principe d'équivalence d'Einstein à partir des équations de l'électrodynamique de la relativité restreinte. Mathématiquement, le

principe d'équivalence se traduit par le remplacement de la métrique de Minkowski par $g_{\mu\nu}$ et des dérivées partielles par des dérivées covariantes. Ce remplacement peut se faire directement dans l'action ou dans les équations de champs. L'action d'un champ électromagnétique est donnée par [Hobson et al., 2006; Stephani et Stewart, 1990]

$$S_{em} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}A^\mu j_\mu\right] \tag{B.11}$$

où A^μ est le quadri-vecteur potentiel électro-magnétique, $F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}$ est le tenseur électromagnétique (parfois appelé tenseur de Faraday) et j^μ est le quadri-vecteur densité de courant. La variation de cette action par rapport au quadri-potentiel donne les équations de Maxwell

$$\frac{\delta S_{em}}{\delta A_\nu} = 0 \quad \Longrightarrow \quad F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{c}j^\nu. \tag{B.12}$$

Cette équation est la même que celle de la relativité restreinte dans laquelle la dérivée partielle est remplacée par une dérivée covariante. Ce premier jeu d'équations correspond aux équations de Maxwell qui comportent des termes de source. Les deux autres équations de Maxwell (celles sans terme de source) s'écrivent sous la forme

$$F_{\mu\nu;\sigma} + F_{\nu\sigma;\mu} + F_{\sigma\mu;\nu} = 0 \tag{B.13}$$

et sont automatiquement satisfaites par la définition du tenseur de Faraday en terme du quadri-potentiel.

En insérant la définition du tenseur $F^{\mu\nu}$ dans les équations de Maxwell (B.12), nous obtenons les équations

$$F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = A^{\nu;\mu}{}_{;\mu} - A^{\mu;\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{c}j^\nu. \tag{B.14}$$

Pour continuer, il faut utiliser une relation (valide pour n'importe quel vecteur B^α) qui se démontre aisément à partir de la définition de la dérivation covariante et de la définition du tenseur de Ricci (cette relation se trouve par exemple dans Misner et al. [1973, chap. 16.3] ou est dérivée partiellement dans Plebański et Krasiński [2006, chap. 6])

$$B^{\mu;\alpha}{}_{;\mu} = B^\mu{}_{;\mu}{}^{;\alpha} + R^\alpha{}_\sigma B^\sigma. \tag{B.15}$$

En utilisant cette relation dans l'équation du potentiel, nous obtenons

$$A^{\nu;\mu}{}_{;\mu} - A^\mu{}_{;\mu}{}^{;\nu} - R^\nu{}_\sigma A^\sigma = \frac{1}{c}j^\nu. \tag{B.16}$$

Finalement, en adoptant la jauge de Lorentz

$$A^\mu{}_{;\mu} = 0, \tag{B.17}$$

nous obtenons l'équation

$$A^{\nu;\mu}{}_{;\mu} - R^\nu{}_\sigma A^\sigma = \frac{1}{c}j^\nu. \tag{B.18}$$

Remarquons en passant que cette équation n'est pas directement dérivable en prenant l'équation de la relativité restreinte ($A^{\nu,\mu}{}_{,\mu} = j^\nu/c$) et en remplaçant les dérivées partielles par des dérivées covariantes. Ceci s'explique par le fait que la règle qui consiste à remplacer les dérivées partielles par des dérivées covariantes doit s'appliquer sur les champs physiques (ici le champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$) et non sur le potentiel A^μ non-observable. Ce problème est discuté dans Misner et al. [1973, box 16.1 et chap. 22.4].

B.2.2 Limite de l'optique géométrique

L'optique géométrique est obtenue depuis les équations de Maxwell dans la limite des faibles longueurs d'ondes. Une conséquence en est la perte de la nature ondulatoire de la lumière et des effets qui en sont liés (la diffusion par exemple).

Pour calculer cette limite (la dérivation est inspirée de Stephani et Stewart [1990, chap. 8.4] et de Misner et al. [1973, chap. 22.5]), considérons une onde monochromatique (des cas plus complexes peuvent êtres exprimés par sommation d'ondes monochromatiques) dont le potentiel peut s'écrire sous la forme

$$A^\mu(x^\alpha) = \Re\left[\mathcal{A}^\mu(x^\alpha)e^{i\omega S(x^\alpha)}\right] \tag{B.19}$$

où $\mathcal{A}^\mu(x^\alpha)$ est une amplitude que nous supposerons varier lentement dans le temps et dans l'espace par rapport à la phase S. Remplaçons la paramétrisation du quadri-potentiel dans l'équation de Maxwell (B.18) dans le vide pour trouver

$$\Re\left[e^{i\omega}\left(\mathcal{A}^{\nu;\mu}{}_{;\mu} + i\omega\left(\mathcal{A}^{\nu;\mu}S_{;\mu} + \mathcal{A}^\nu{}_{;\mu}S^{;\mu} + \mathcal{A}^\nu S^{;\mu}_{;\mu}\right) - \omega^2\mathcal{A}^\nu S^{;\mu}S_{;\mu} - R^\nu{}_\sigma\mathcal{A}^\sigma\right)\right] = 0. \tag{B.20}$$

Quatre longueurs caractéristiques peuvent être définies :
- $\lambda = c\frac{2\pi}{\omega}$ la longueur d'onde de l'onde considérée.
- $\ell_A \sim |\mathcal{A}^\nu| \,/\, |\mathcal{A}^{\nu;\mu}|$ la longueur caractéristique de la variation de l'amplitude (dans un référentiel inertiel).
- $\ell_k \sim |S^{;\mu}_{;\mu}| \,/\, |S^{;\mu}_{;\mu}| = |k| \,/\, |k_{;\mu}|$ la longueur caractéristique de variation de la longueur d'onde (dans un référentiel inertiel).
- $\ell_R \sim |R^\nu{}_\sigma|^{-1/2}$ la longueur typique de la courbure de l'espace-temps.

La condition nécessaire pour appliquer l'optique géométrique est que la longueur d'onde λ soit nettement plus petite que les autres longueurs caractéristiques du problème.

$$\lambda \ll \ell_A, \quad \lambda \ll \ell_k, \quad \lambda \ll \ell_R. \tag{B.21}$$

Dans ces conditions, le terme en ω^2 est dominant dans l'équation (B.20) et nous obtenons l'équation

$$\boxed{S^{;\mu}S_{;\mu} = k^\mu k_\mu = 0}. \tag{B.22}$$

Pour terminer, il suffit de prendre la dérivée covariante de cette équation $0 = (S^{;\mu}S_{;\mu})_{;\alpha} = 2S^{;\mu}S_{;\mu\alpha}$ et d'intervertir les dérivées covariantes (qui commutent dans ce cas particulier) pour trouver

$$0 = S^{;\mu}S_{;\alpha\mu} = 0 = k^\mu k_{\alpha;\mu}. \tag{B.23}$$

où il est possible de reconnaître l'équation des géodésiques. En effet, en élevant l'indice α, la dernière équation devient

$$0 = k^\mu\left(\frac{\partial k^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}k^\nu\right). \tag{B.24}$$

Il ne reste plus qu'à identifier le vecteur k^μ avec le vecteur tangent au rayon lumineux (ce qui s'exprime par $k^\mu = dx^\mu/d\lambda$ où λ est un paramètre affin) pour obtenir l'équation usuelle

$$\boxed{\frac{dk^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0}. \tag{B.25}$$

Ceci finit de montrer comment il est possible de dériver l'équation des géodésiques nulles à partir des équations de Maxwell en faisant l'hypothèse de l'optique géométrique qui est vérifiée dans la limite des courtes longueurs d'onde telle que précisée par les conditions (B.21).

Annexe C

Métrique Einstein-Infeld-Hoffmann

Sommaire

C.1 Métrique EIH 203

C.2 Jauge harmonique 204

C.3 Symboles de Christoffel 205

C.4 Equations du mouvement 205

C.5 Equation du temps propre 206

C.6 Transport parallèle 206

L'objectif de cette annexe est de rappeler quelques résultats à propos de la métrique Einstein-Infeld-Hoffmann (EIH). Cette métrique caractérise la géométrie de l'espace-temps pour un ensemble de corps ponctuels en RG au premier ordre Post-Newtonien. Les premières dérivations de cette métrique furent données par [de Sitter, 1916; Einstein et al., 1938; Einstein et Infeld, 1940; Infeld, 1957]. Cette métrique est également celle adoptée par les conventions IAU [Soffel et al., 2003] pour décrire le Système Solaire (système de référence barycentrique).

C.1 Métrique EIH

L'expression de la métrique EIH en *jauge harmonique* est donnée par

$$g_{00} = -1 + \frac{2w}{c^2} - \frac{2w^2}{c^4} + \mathcal{O}(c^{-6}) = -1 + \frac{2w_0}{c^2} - \frac{2}{c^4}\left(w_0^2 + \Delta\right) + \mathcal{O}(c^{-6}) \tag{C.1a}$$

$$g_{0i} = -\frac{4w^i}{c^3} + \mathcal{O}(c^{-5}) \tag{C.1b}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij}\left(1 + \frac{2w}{c^2}\right) + \mathcal{O}(c^{-4}) = \delta_{ij}\left(1 + \frac{2w_0}{c^2}\right) + \mathcal{O}(c^{-4}) \tag{C.1c}$$

où l'expression des potentiels est donnée par

$$w_0(\vec{x}_i) = \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \frac{Gm_j}{r_{ij}} \tag{C.2}$$

$$w^k(\vec{x}_i) = \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \frac{Gm_j}{r_{ij}} v_j^k \tag{C.3}$$

$$\Delta(\vec{x}_i) = \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \frac{Gm_j}{r_{ij}} \left[-2v_j^2 + \sum_{k\neq j} \frac{Gm_k}{r_{jk}} + \frac{1}{2}\frac{(\vec{r}_{ij}\cdot\vec{v}_j)^2}{r_{ij}^2} + \frac{1}{2}(\vec{x}_{ji}\cdot\vec{a}_j) \right], \tag{C.4}$$

avec $\vec{x}_i$ le point considéré, $\vec{x}_j$, $\vec{v}_j$ et $\vec{a}_j$ la position, la vitesse et l'accélération des planètes en coordonnées barycentiques, $\vec{x}_{ij} = \vec{x}_j - \vec{x}_i$, $r_{ij} = \|\vec{x}_{ij}\|$, $v_i = \|\vec{v}_i\|$.

C.2 Jauge harmonique

Comme indiqué ci-dessus, nous avons décidé d'utiliser la jauge harmonique qui est celle recommandée par l'IAU [Soffel et al., 2003]. La jauge harmoniques est définie par

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0 \tag{C.5}$$

Il est également possible de montrer que cette condition est équivalente à [Weinberg, 1972]

$$\left(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\right)_{,\nu} = 0. \tag{C.6}$$

Ceci est encore équivalent à avoir des coordonnées qui respectent

$$\Box x^{\mu} = 0 \tag{C.7}$$

où $\Box$ est le D'Alembertien covariant. Au premier ordre, les conditions ci-dessus deviennent Damour et al. [1991]

$$\tfrac{1}{2}g_{00,0} + \tfrac{1}{2}\delta^{ij}g_{ij,0} - \delta^{ij}g_{0i,j} = \mathcal{O}(c^{-5}) \tag{C.8}$$

$$\tfrac{1}{2}g_{00,k} - \tfrac{1}{2}\delta^{ij}g_{ij,k} + \delta^{ij}g_{ik,j} = \mathcal{O}(c^{-4}) \tag{C.9}$$

puis finalement, en usant la métrique (C.1), la première de ces équations devient

$$\partial_t w + \partial_i w_i = \mathcal{O}(c^{-2}) \tag{C.10}$$

tandis que la seconde équation est trivialement satisfaite par la métrique (C.1).

Une autre jauge particulièrement utilisée dans la littérature est la jauge *Standard Post-Newtonian* (définie par Will [1993]) dans laquelle est définie la métrique Post-Newtonienne. Pour obtenir la métrique dans cette jauge à partir de la jauge harmonique, une transformation d'ordre $1/c^4$ sur la variable temporelle est nécessaire. Cette transformation est développée dans l'annexe B de Soffel et al. [2003].

C.3 Symboles de Christoffel

Les symboles de Christoffel se calculent directement par la relation (5)

$$\Gamma^0_{00} = -w_{0,t}/c^3 + \mathcal{O}(c^{-5}) \tag{C.11a}$$
$$\Gamma^0_{i0} = \Gamma^0_{0i} = -w_{0,i}/c^2 + \mathcal{O}(c^{-4}) \tag{C.11b}$$
$$\Gamma^0_{ij} = \frac{2w^i,j}{c^3} + \frac{2w^j,i}{c^3} + \frac{2\delta_{ij}w_{0,t}}{c^3} + \mathcal{O}(c^{-5}) \tag{C.11c}$$
$$\Gamma^i_{00} = -\frac{w_{0,i}}{c^2} + \frac{4w_0 w_{0,i}}{c^4} + \frac{\Delta_{,i}}{c^4} - \frac{4w^i_{,t}}{c^4} + \mathcal{O}(c^{-6}) \tag{C.11d}$$
$$\Gamma^i_{j0} = \Gamma^i_{0j} = \frac{w_{0,t}\delta_{ij}}{c^3} - \frac{2w^i_{,j}}{c^3} + \frac{2w^j_{,i}}{c^3} + \mathcal{O}(c^{-5}) \tag{C.11e}$$
$$\Gamma^i_{jk} = \frac{w_{0,j}}{c^2}\delta_{ik} + \frac{w_{0,k}}{c^2}\delta_{ij} - \frac{w_{0,i}}{c^2}\delta_{ij} + \mathcal{O}(c^{-4}). \tag{C.11f}$$

Les dérivées des potentiels se calculent aisément

$$w_{0,j} = \sum_{k\neq i} \frac{Gm_k}{r^3_{ik}} x^j_{ik} \tag{C.12a}$$
$$w_{0,t} = -\sum_{k\neq i} \frac{Gm_k}{r^3_{ik}} (\vec{x}_{ik}\cdot\vec{v}_k) \tag{C.12b}$$
$$w^l_{,j} = \sum_{k\neq i} \frac{Gm_k}{r^3_{ik}} x^j_{ik} v^l_k \tag{C.12c}$$
$$w^l_{,t} = \sum_{k\neq i} \frac{Gm_k}{r_{ik}} a^l_k - \sum_{k\neq i} \frac{Gm_k}{r^3_{ik}} (\vec{x}_{ik}\cdot\vec{v}_k) v^l_k \tag{C.12d}$$
$$\begin{aligned}\Delta_{,j} = &\sum_{k\neq i} \frac{Gm_k}{r^3_{ik}} x^j_{ik} \left[-2v^2_k + \sum_{l\neq k} \frac{Gm_l}{r_{kl}} + \frac{1}{2}\frac{(\vec{x}_{ik}\cdot\vec{v}_k)^2}{r^2_{ik}} - \frac{1}{2}(\vec{x}_{ik}\cdot\vec{a}_k) \right] \\ &+ \sum_{k\neq i} \frac{Gm_k}{r_k} \left[\frac{(\vec{x}_{ik}\cdot\vec{v}_k)^2}{r^4_{ik}} x^j_{ik} - \frac{(\vec{x}_{ik}\cdot\vec{v}_k)}{r^2_{ik}} v^j_k + \frac{1}{2} a^j_k \right].\end{aligned} \tag{C.12e}$$

C.4 Equations du mouvement

Les équations du mouvement peuvent se dériver en utilisant l'équation des géodésiques (2.14). Une autre manière consiste à dériver les équations à partir du principe de moindre action (2.9), ce qui revient à appliquer les équations d'Euler-Lagrange sur le Lagrangien

$$\begin{aligned} L &= -mc\frac{d\tau}{dt} = -mc^2\sqrt{-g_{00} - 2g_{0j}v^j/c - g_{ij}v^i v^j/c^2} \\ &= -m\left(c^2 - w_0 - \frac{v^2}{2} + \frac{w_0^2 + \Delta}{c^2} + 4\frac{w^i v^i}{c^2} - \frac{w_0 v^2}{c^2} - \frac{w_0^2}{2c^2} - \frac{v^4}{8c^2} - \frac{w_0 v^2}{2c^2} \right) + \mathcal{O}(c^{-4}). \end{aligned} \tag{C.13}$$

Les constantes multiplicatives et additives ne changeant en rien les équations du mouvement, nous pouvons utiliser les équations d'Euler-Lagrange sur le lagrangien

$$L = w_0 + \frac{v^2}{2} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{v^4}{8} + \frac{3}{2}w_0 v^2 - \frac{w_0^2}{2} - \Delta - 4\left(\vec{w}\cdot\vec{v}\right)\right) + \mathcal{O}(c^{-4}). \tag{C.14}$$

L'application des équations d'Euler-Lagrange donne

$$\vec{a} = \vec{\nabla}w_0 + \frac{1}{c^2}\left[\vec{\nabla}w_0\left(v^2 - 4w_0\right) - \vec{\nabla}\Delta - 4\left(\vec{\nabla}w_0\cdot\vec{v}\right)\vec{v} + 4\left(\vec{\nabla}\times\vec{w}\right)\times\vec{v} - 3w_{0,t}\vec{v} + 4\vec{w}_{,t}\right]. \tag{C.15}$$

Après substitution de l'expression des potentiels, nous obtenons

$$\frac{d^2\vec{x}_i}{dt^2} = \vec{a}_i = \vec{a}_i^{(0)} + \frac{1}{c^2}\vec{a}_i^{(1)} + \mathcal{O}(c^{-4}) \tag{C.16}$$

avec

$$\vec{a}_i^{(0)} = \sum_{j\neq i}\frac{Gm_j}{r_{ij}^3}\vec{x}_{ij} \tag{C.17a}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_i^{(1)} = {} & \sum_{j\neq i}\frac{Gm_j}{r_{ij}^3}\vec{x}_{ij}\left[-4\sum_{k\neq i}\frac{Gm_k}{r_{ik}} + \sum_{k\neq j}\frac{Gm_k}{r_{jk}}\left(-1 + \frac{\vec{x}_{ij}\cdot\vec{x}_{jk}}{2r_{jk}^2}\right)\right. \\ & \left. + v_i^2 - 4\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j + 2v_j^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{\vec{v}_j\cdot\vec{x}_{ij}}{r_{ij}}\right)^2\right] \\ & + \sum_{j\neq i}\frac{Gm_j}{r_{ij}^3}\left[4\vec{v}_i\cdot\vec{x}_{ij} - 3\vec{v}_j\cdot\vec{x}_{ij}\right]\left(\vec{v}_j - \vec{v}_i\right) + \frac{7}{2}\sum_{j\neq i}\sum_{k\neq j}\frac{Gm_j}{r_{ij}}\frac{Gm_k}{r_{jk}^3}\vec{x}_{jk}.\end{aligned} \tag{C.17b}$$

C.5 Equation du temps propre

L'équation d'évolution du temps propre dans une métrique EIH (C.1) se dérive aisément à partir de (2.17)

$$\frac{d\tau_i}{dt} = \sqrt{-g_{00} - 2g_{0j}v^j/c - g_{ij}v^i v^j/c^2}. \tag{C.18}$$

L'insertion de la métrique (C.1) donne

$$\begin{aligned}\frac{d\tau_i}{dt} = {} & 1 - \sum_{j\neq i}\frac{Gm_j}{r_{ij}c^2} - \frac{v_i^2}{2c^2} + \frac{1}{c^4}\left(-\frac{v_i^4}{8} + \sum_{j\neq i}\frac{Gm_j}{r_{ij}}\left[-\frac{3}{2}v_i^2 - 2v_j^2 + 4\vec{v}_j\cdot\vec{v}_i\right.\right. \\ & \left.\left. + \frac{1}{2}\sum_{k\neq i}\frac{Gm_k}{r_{ik}} + \sum_{k\neq j}\frac{Gm_k}{r_{jk}}\left(1 - \frac{\vec{x}_{ij}\cdot\vec{x}_{jk}}{2r_{jk}^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{x}_{ij}\cdot\vec{v}_j}{r_{ij}}\right)^2\right]\right) + \mathcal{O}(c^{-6}).\end{aligned} \tag{C.19}$$

C.6 Transport parallèle

L'équation du transport parallèle d'un vecteur A^μ dans une métrique EIH se dérive à partir de (2.54)

$$\frac{dA^\mu}{dt} = -c\Gamma^\mu_{\alpha 0}A^\alpha - \Gamma^\mu_{\alpha j}A^\alpha v^j. \tag{C.20}$$

En séparant la composante 0 des composantes i de la dernière équation et en injectant l'expression des symboles de Christoffel (C.11), nous obtenons finalement

$$\frac{dA^0}{dt} = \frac{A^0}{c^2}\left(w_{0,t} + w_{0,j}v^j\right) + \frac{A^j}{c}w_{0,j} + \mathcal{O}(c^{-3}) \tag{C.21a}$$

$$\begin{aligned}\frac{dA^j}{dt} &= \frac{A^0}{c}w_{0,j} \\ &+ \frac{A^l}{c^2}\Big(2w_{j,l} - 2w_{l,j} + w_{0,j}v^l - w_{0,l}v^j - \delta_{jl}(w_{0,t} + w_{0,k}v^k)\Big) + \mathcal{O}(c^{-3}).\end{aligned} \tag{C.21b}$$

Finalement, après avoir remplacé les potentiels par leurs expressions, l'équation du transport parallèle s'écrit

$$\frac{dA^0}{dt} = \sum_k \frac{Gm_k}{c^2 r_{ik}^3}\left[-A^0\vec{x}_{ik}\cdot\vec{v}_{ik} + c\vec{A}\cdot\vec{x}_{ik}\right] + \mathcal{O}(c^{-3}) \tag{C.22a}$$

$$\begin{aligned}\frac{dA^j}{dt} &= \sum_k \frac{Gm_k}{c^2 r_{ik}^3}\left[c\, x_{ik}^j A^0 + (2v_k^j - v_i^j)\vec{x}_{ik}\cdot\vec{A} + x_{ik}^j(\vec{v}_i - 2\vec{v}_k)\cdot\vec{A} + A^j\vec{x}_{ik}\cdot\vec{v}_{ik}\right] \\ &\quad + \mathcal{O}(c^{-3}).\end{aligned} \tag{C.22b}$$

où $\vec{v}_{ik} = \vec{v}_k - \vec{v}_i$ et $\vec{A} = A^i$ est la partie spatiale du vecteur A^μ.

Annexe D

Simulations en RG et dérivées partielles

Sommaire

D.1 Partie dynamique 209
D.1.1 Equations du mouvement et équations variationnelles 210
D.1.2 Equation du temps propre et équation variationnelle 211
D.1.3 Evolution de la tétrade et équations variationnelles 212
D.2 Fonctions de mesure 213
D.2.1 Range et ses dérivées partielles 213
D.2.2 Doppler et ses dérivées partielles 214
D.2.3 Mesures angulaires et leurs dérivées partielles 217

Cette annexe présente les équations utilisées pour simuler les signaux en RG de même que les équations nécessaires pour calculer les dérivées partielles de ces signaux par rapport aux conditions initiales et masses des planètes. Ces équations constituent la base du logiciel d'ajustement présenté au chapitre 3. Comme indiqué dans la section 3.3, le calcul se fait en deux étapes : la partie dynamique et la partie relative aux fonctions de mesure.

Nous noterons par $\vec{x}_i$ les coordonnées des différents corps, $\vec{v}_i = \dot{\vec{x}}_i$ les vitesses de ces corps, $\vec{x}_{ij} = \vec{x}_j - \vec{x}_i$ et $r_{ij} = \|\vec{x}_{ij}\|$. Finalement, nous noterons $\vec{f}_{il} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial p_l}$, $g_{il} = \frac{\partial \tau_i}{\partial p_l}$ et $h_{i\mu l} = \frac{\partial \lambda^{\mu}_{(i)}}{\partial p_l}$ avec p_l les différents paramètres à ajuster.

D.1 Partie dynamique

Dans cette partie, nous allons développer les équations du mouvement, l'équation du temps propre et l'équation de propagation de la tétrade ainsi que les équations variationnelles correspondantes.

D.1.1 Equations du mouvement et équations variationnelles

Les équations du mouvement utilisées sont les équations EIH (C.17) qui s'écrivent sous la forme

$$\ddot{\vec{x}}_i = \vec{a}_i = \sum_{j\neq i} \frac{Gm_j}{r_{ij}^3}\vec{x}_{ij} + \sum_{j\neq i} \frac{Gm_j}{c^2 r_{ij}^3}\vec{x}_{ij}A_{ij} + \sum_{j\neq i} \frac{Gm_j}{c^2 r_{ij}^3}\vec{B}_{ij} + \frac{7}{2}\sum_{j\neq i}\sum_{k\neq j} \frac{Gm_j}{c^2 r_{ij}}\frac{Gm_k}{r_{jk}^3}\vec{x}_{jk} \tag{D.1}$$

avec

$$A_{ij} = -4\sum_{k\neq i}\frac{Gm_k}{r_{ik}} + \sum_{k\neq j}\frac{Gm_k}{r_{jk}}\left(-1 + \frac{\vec{x}_{ij}\cdot\vec{x}_{jk}}{2r_{jk}^2}\right) + v_i^2 - 4\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j + 2v_j^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{\vec{v}_j\cdot\vec{x}_{ij}}{r_{ij}}\right)^2 \tag{D.2}$$

$$\vec{B}_{ij} = [4\vec{v}_i\cdot\vec{x}_{ij} - 3\vec{v}_j\cdot\vec{x}_{ij}]\,(\vec{v}_j - \vec{v}_i). \tag{D.3}$$

Les équations variationnelles correspondantes s'obtiennent en variant cette équation par rapport à un paramètre p_l

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{f}}_{il} = \frac{\partial \vec{a}_i}{\partial p_l} &= \sum_{j\neq i}\frac{Gm_j}{r_{ij}^3}\left((\vec{f}_{jl}-\vec{f}_{il}) + 3\frac{(\vec{f}_{il}-\vec{f}_{jl})\cdot\vec{x}_{ij}}{r_{ij}^2}\vec{x}_{ij}\right)\\
&+\sum_{j\neq i}\frac{Gm_j}{c^2 r_{ij}^3}\left[\left((\vec{f}_{jl}-\vec{f}_{il}) + 3\frac{(\vec{f}_{il}-\vec{f}_{jl})\cdot\vec{x}_{ij}}{r_{ij}^2}\vec{x}_{ij}\right)A_{ij} + \vec{x}_{ij}\frac{\partial A_{ij}}{\partial p_l}\right]\\
&+\sum_{j\neq i}\frac{Gm_j}{c^2 r_{ij}^3}\left(3\frac{\vec{x}_{ij}(\vec{f}_{il}-\vec{f}_{jl})}{r_{ij}^2}\vec{B}_{ij} + \frac{\partial \vec{B}_{ij}}{\partial p_l}\right)\\
&+\frac{7}{2}\sum_{j\neq i}\sum_{k\neq j}\frac{Gm_j}{c^2 r_{ij}}\frac{Gm_k}{r_{jk}^3}\left[\vec{f}_{kl}-\vec{f}_{jl} + \frac{\vec{x}_{ij}\cdot(\vec{f}_{il}-\vec{f}_{jl})}{r_{ij}^2}\vec{x}_{jk} + 3\frac{\vec{x}_{jk}\cdot(\vec{f}_{jl}-\vec{f}_{kl})}{r_{jk}^2}\vec{x}_{jk}\right]\\
&+\left.\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial p_l}\right|_{\vec{x}_j,\vec{v}_j\ cst}
\end{aligned} \tag{D.4}$$

où le dernier terme de ce développement est présent si p_l est un paramètre qui intervient explicitement dans le calcul de la force (ici le seul paramètre intervenant de manière explicite est la masse des corps m_l). Les dérivées des termes A et B sont données par

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_{ij}}{\partial p_l} &= \left[4\sum_{k\neq i}\frac{Gm_k}{r_{ik}^3}\vec{x}_{ik}\cdot(\vec{f}_{kl}-\vec{f}_{il}) - \sum_{k\neq j}\frac{Gm_k}{r_{jk}^3}\vec{x}_{jk}\cdot(\vec{f}_{kl}-\vec{f}_{jl})\left(-1+\frac{\vec{x}_{ij}\cdot\vec{x}_{jk}}{2r_{jk}^2}\right)\right.\\
&+\sum_{k\neq j}\frac{Gm_k}{r_{jk}}\left(\frac{(\vec{f}_{jl}-\vec{f}_{il})\cdot\vec{x}_{jk} + \vec{x}_{ij}\cdot(\vec{f}_{kl}-\vec{f}_{jl})}{2r_{jk}^2} - \frac{\vec{x}_{ij}\cdot\vec{x}_{jk}}{r_{jk}^4}\vec{x}_{jk}\cdot(\vec{f}_{kl}-\vec{f}_{jl})\right)\\
&+2\vec{v}_i\cdot\dot{\vec{f}}_{il} - 4(\dot{\vec{f}}_{il}\cdot\vec{v}_j + \vec{v}_i\cdot\dot{\vec{f}}_{jl}) + 4\vec{v}_j\cdot\dot{\vec{f}}_{jl}\\
&\left.-3\left(\frac{\vec{v}_j\cdot\vec{x}_{ij}}{r_{ij}}\right)\left(\frac{\dot{\vec{f}}_{jl}\cdot\vec{x}_{ij} + \vec{v}_j\cdot(\vec{f}_{jl}-\vec{f}_{il})}{r_{ij}} - \frac{\vec{v}_j\cdot\vec{x}_{ij}}{r_{ij}^3}\vec{x}_{ij}\cdot(\vec{f}_{jl}-\vec{f}_{il})\right)\right]
\end{aligned} \tag{D.5}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{B}_{ij}}{\partial p_l} &= \left[(\vec{f}_{jl}-\vec{f}_{il})\cdot(4\vec{v}_i - 3\vec{v}_j) + 4\vec{x}_{ij}\cdot\dot{\vec{f}}_{il} - 3\vec{x}_{ij}\cdot\dot{\vec{f}}_{jl}\right](\vec{v}_j - \vec{v}_i)\\
&+[4\vec{v}_i\cdot\vec{x}_{ij} - 3\vec{v}_j\cdot\vec{x}_{ij}]\,(\dot{\vec{f}}_{jl} - \dot{\vec{f}}_{il}).
\end{aligned} \tag{D.6}$$

La dérivation par rapport aux termes de masse (le dernier terme de l'expression (D.4)) s'exprime par

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial m_l}\right|_{\vec{x}_j,\vec{v}_j\ cst} &= \frac{G\vec{x}_{il}}{r_{il}^3}(1-\delta_{il}) + \frac{G\vec{x}_{il}}{c^2 r_{il}^3}A_{il}(1-\delta_{il}) \\ &+ \sum_{j\neq i}\frac{Gm_j}{c^2 r_{ij}^3}\vec{x}_{ij}\left[-4\frac{G}{r_{il}}(1-\delta_{il}) + \frac{G}{r_{jl}}\left(-1+\frac{\vec{x}_{ij}\cdot\vec{x}_{jl}}{2r_{jl}^2}\right)(1-\delta_{jl})\right] \\ &+ \frac{G}{c^2 r_{il}^3}\vec{B}_{il}(1-\delta_{il}) + \frac{7}{2}\sum_{j\neq l}\frac{G}{c^2 r_{il}}\frac{Gm_j}{r_{lj}^3}\vec{x}_{lj}(1-\delta_{il}) + \frac{7}{2}\sum_{j\neq i}\frac{Gm_j}{c^2 r_{ij}}\frac{G}{r_{jl}^3}\vec{x}_{jl}(1-\delta_{lj}).\end{aligned} \tag{D.7}$$

D.1.2 Equation du temps propre et équation variationnelle

L'équation du temps propre est donné par l'équation (C.19) qui s'écrit

$$\frac{d\tau_i}{dt} = a_{\tau_i} = 1 - \sum_{j\neq i}\frac{Gm_j}{r_{ij}c^2} - \frac{v_i^2}{2c^2} + \frac{1}{c^4}\left(-\frac{v_i^4}{8} + \sum_{j\neq i}\frac{Gm_j}{r_{ij}}C_{ij}\right) \tag{D.8}$$

avec

$$\begin{aligned}C_{ij} &= -\frac{3}{2}v_i^2 - (\gamma+1)v_j^2 + 4\vec{v}_j\cdot\vec{v}_i \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k\neq i}\frac{Gm_k}{r_{ik}} + \sum_{k\neq j}\frac{Gm_k}{r_{jk}}\left(1-\frac{\vec{x}_{ij}\cdot\vec{x}_{jk}}{2r_{jk}^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{x}_{ij}\cdot\vec{v}_j}{r_{ij}}\right)^2\end{aligned} \tag{D.9}$$

L'équation variationnelle correspondante se dérive alors

$$\begin{aligned}\dot{g}_{il} &= \frac{\partial a_{\tau_i}}{\partial p_l} = \sum_{j\neq i}\frac{Gm_j}{r_{ij}^3 c^2}\vec{x}_{ij}\cdot(\vec{f}_{jl}-\vec{f}_{il}) - \frac{\vec{v}_i\cdot\dot{\vec{f}}_{il}}{c^2} \\ &- \frac{v_i^2\vec{v}_i\cdot\dot{\vec{f}}_{il}}{2c^4} + \sum_{j\neq i}\frac{Gm_j}{r_{ij}c^4}\left(\frac{\vec{x}_{ij}\cdot(\vec{f}_{il}-\vec{f}_{jl})}{r_{ij}^2}C_{ij} + \frac{\partial C_{ij}}{\partial p_l}\right) + \left.\frac{\partial a_{\tau_i}}{\partial p_l}\right|_{\vec{x}_j,\vec{v}_j\ cst}\end{aligned} \tag{D.10}$$

avec

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_{ij}}{\partial p_l} &= -3\vec{v}_i\cdot\dot{\vec{f}}_{il} - 4\vec{v}_j\cdot\dot{\vec{f}}_{jl} + 4(\vec{v}_i\cdot\dot{\vec{f}}_{jl} + \vec{v}_j\cdot\dot{\vec{f}}_{il}) \\ &- \frac{1}{2}\sum_{k\neq i}\frac{Gm_k}{r_{ik}^3}\vec{x}_{ik}\cdot(\vec{f}_{kl}-\vec{f}_{il}) - \sum_{k\neq j}\frac{Gm_k}{r_{jk}^3}\vec{x}_{jk}\cdot(\vec{f}_{kl}-\vec{f}_{jl})\left(1-\frac{\vec{x}_{ij}\cdot\vec{x}_{jk}}{2r_{jk}^2}\right) \\ &+ \sum_{k\neq j}\frac{Gm_k}{r_{jk}}\left(\frac{(\vec{f}_{il}-\vec{f}_{jl})\cdot\vec{x}_{jk} + \vec{x}_{ij}\cdot(\vec{f}_{jl}-\vec{f}_{kl})}{2r_{jk}^2} + \frac{\vec{x}_{ij}\cdot\vec{x}_{jk}}{r_{jk}^4}\vec{x}_{jk}\cdot(\vec{f}_{kl}-\vec{f}_{jl})\right) \\ &+ \frac{\vec{x}_{ij}\cdot\vec{v}_j}{r_{ij}}\left(\frac{(\vec{f}_{jl}-\vec{f}_{il})\cdot\vec{v}_j + \vec{x}_{ij}\cdot\dot{\vec{f}}_{jl}}{r_{ij}} + \frac{\vec{x}_{ij}\cdot\vec{v}_j}{r_{ij}^3}\vec{x}_{ij}\cdot(\vec{f}_{il}-\vec{f}_{jl})\right).\end{aligned} \tag{D.11}$$

Finalement, comme pour les équations du mouvement, il reste à calculer la partie dépendant directement des paramètres p_l : $\left.\frac{\partial a_{\tau_i}}{\partial p_l}\right|_{\vec{x}_j,\vec{v}_j\ cst}$. Si p_l est une condition initiale, cette dérivée est

nulle et si p_l est une des masses, alors

$$\left.\frac{\partial a_{\tau_i}}{\partial m_l}\right|_{\vec{x}_j,\vec{v}_j\ cst} = -\frac{G}{r_{il}c^2}(1-\delta_{il}) + \frac{G}{r_{il}c^4}(1-\delta_{il})C_{il} + \sum_{j\neq i}\frac{Gm_j}{r_{ij}c^4}\left[\frac{1}{2}\frac{G}{r_{il}}(1-\delta_{il}) + \frac{G}{r_{jl}}(1-\delta_{jl})\left(1-\frac{\vec{x}_{ij}\cdot\vec{x}_{jl}}{2r_{jl}^2}\right)\right]. \tag{D.12}$$

D.1.3 Evolution de la tétrade et équations variationnelles

Les équations d'évolution de la tétrade $\lambda^\mu_{(i)}$ sont données par (C.22), c'est-à-dire par

$$\frac{d\lambda^0_{(i)}}{dt} = a_{\lambda^0_{(i)}} = \sum_{j\neq i}\frac{Gm_j}{c^2r_{ij}^3}D_{ij} \tag{D.13a}$$

$$\frac{d\lambda^k_{(i)}}{dt} = a_{\lambda^k_{(i)}} = \sum_{j\neq i}\frac{Gm_j}{c^2r_{ij}^3}E_{ikj} \tag{D.13b}$$

avec

$$D_{ij} = -\lambda^0_{(i)}\vec{x}_{ij}\cdot\vec{v}_{ij} + c\vec{\lambda}_{(i)}\cdot\vec{x}_{ij} \tag{D.14}$$

$$E_{ikj} = c\,x^k_{ij}\lambda^0_{(i)} + (2v^k_j - v^k_i)\vec{x}_{ij}\cdot\vec{\lambda}_{(i)} + x^k_{ij}(\vec{v}_i - 2\vec{v}_j)\cdot\vec{\lambda}_{(i)} + \lambda^k_{(i)}\vec{x}_{ij}\cdot\vec{v}_{ij}. \tag{D.15}$$

Les équations variationnelles correspondantes s'écrivent alors

$$\dot{h}_{i0l} = \sum_{j\neq i}\frac{Gm_j}{c^2r_{ij}}\left[\frac{\partial D_{ij}}{\partial p_l} - 3\frac{\vec{x}_{ij}\cdot(\vec{f}_{jl}-\vec{f}_{il})}{r_{ij}^2}D_{ij}\right] + \left.\frac{\partial a_{\lambda^0_{(i)}}}{\partial p_l}\right|_{\vec{x}_j,\vec{v}_j\ cst} \tag{D.16}$$

$$\dot{h}_{ikl} = \sum_{j\neq i}\frac{Gm_j}{c^2r_{ij}}\left[\frac{\partial E_{ikj}}{\partial p_l} - 3\frac{\vec{x}_{ij}\cdot(\vec{f}_{jl}-\vec{f}_{il})}{r_{ij}^2}E_{ikj}\right] + \left.\frac{\partial a_{\lambda^k_{(i)}}}{\partial p_l}\right|_{\vec{x}_j,\vec{v}_j\ cst} \tag{D.17}$$

avec

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial p_l} = -h_{i0l}\vec{x}_{ij}\cdot\vec{v}_{ij} - \lambda^0_{(i)}(\vec{f}_{jl}-\vec{f}_{il})\cdot\vec{v}_{ij} - \lambda^0_{(i)}\vec{x}_{ij}\cdot(\dot{\vec{f}}_{jl}-\dot{\vec{f}}_{il}) + ch_{ikl}x^k_{ij} + c\vec{\lambda}_{(i)}\cdot(\vec{f}_{jl}-\vec{f}_{il}) \tag{D.18}$$

$$\frac{\partial E_{ikj}}{\partial p_l} = cx^k_{ij}h_{i0l} + c\lambda^0_{(i)}(f^k_{jl}-f^k_{il}) + (2\dot{f}^k_{jl}-\dot{f}^k_{il})\vec{x}_{ij}\cdot\vec{\lambda}_{(i)} + 2(v^k_j-v^k_i)(\vec{f}_{jl}-\vec{f}_{il})\cdot\vec{\lambda}_{(i)} + 2(v^k_j-v^k_i)x^m_{ij}h_{iml} + (f^k_{jl}-f^k_{il})(\vec{v}_i-2\vec{v}_j)\cdot\vec{\lambda}_{(i)} + x^k_{ij}(\dot{\vec{f}}_{il}-2\dot{\vec{f}}_{jl})\cdot\vec{\lambda}_{(i)} + x^k_{ij}(v^m_i-2v^m_j)h_{iml} + h_{ikl}\vec{x}_{ij}\cdot v_{ij} + \lambda^k_{(i)}(\vec{f}_{jl}-\vec{f}_{il})\cdot\vec{v}_{ij} + \lambda^k_{(i)}\vec{x}_{ij}\cdot(\dot{\vec{f}}_{jl}-\dot{\vec{f}}_{il}). \tag{D.19}$$

Finalement, les dérivées partielles par rapport aux masses incluent les termes

$$\left.\frac{\partial a_{\lambda^0_{(i)}}}{\partial p_l}\right|_{\vec{x}_j,\vec{v}_j\ cst} = (1-\delta_{il})\frac{G}{c^2r_{il}^3}D_{il} \tag{D.20}$$

$$\left.\frac{\partial a_{\lambda^k_{(i)}}}{\partial p_l}\right|_{\vec{x}_j,\vec{v}_j\ cst} = (1-\delta_{il})\frac{G}{c^2r_{il}^3}E_{ikl}. \tag{D.21}$$

D.2 Fonctions de mesure

Après avoir développé les équations de la dynamique, de même que leurs dérivées partielles, nous pouvons maintenant écrire les fonctions de mesures et leurs dérivées. L'intégration des équations de la dynamique fournit l'évolution des coordonnées des corps ($\vec{x}_i$ et $\vec{v}_i$), du temps propre des corps (τ_i) et de la tétrade ($\lambda^{\mu}_{(i)}$) de même que les dérivées partielles de ces quantités ($\vec{f}_{il}$, $\dot{\vec{f}}_{il}$, g_{il} et $h_{i\mu l}$).

D.2.1 Range et ses dérivées partielles

La définition du Range est donnée par (2.1) et il se calcule en plusieurs étapes que nous allons expliciter en développant explicitement le calcul des dérivées partielles :

– calcul du temps coordonnée de réception $t_r = t_r(\tau_r)$ en inversant la relation du temps propre intégrée dans la partie dynamique. Par contre, la dérivée partielle $\frac{\partial t_r}{\partial p_l}$ n'est pas disponible directement depuis l'intégration de la dynamique. En effet, l'intégration de la dynamique fournit $g_{il}(t) = \frac{\partial \tau_i}{\partial p_l}$. Si on note $t(\tau); p_l$ la fonction réciproque de $\tau(t; p_l)$, nous avons, pour tout temps s la relation $\tau(t(s; p_l); p_l) = s$. En dérivant cette dernière expression par rapport à p_l, nous obtenons

$$\frac{\partial t_r}{\partial p_l} = -\frac{\partial \tau_r}{\partial p_l}\frac{1}{\frac{\partial \tau_r}{\partial t}} = -\frac{g_{rl}}{a_{\tau_r}} \tag{D.22}$$

qui s'obtient de l'intégration de la dynamique.

– calcul du temps de propagation Minkowskien t_{em} solution de

$$t_r - t_{em} = \frac{\|\vec{x}_e(t_{em}) - \vec{x}_r(t_r)\|}{c} \tag{D.23}$$

par l'Algorithme 1 (page 47). La dérivée partielle de ce temps d'émission Minkowskien s'obtient en utilisant le théorème de dérivation des fonctions implicites. La dérivation de la dernière expression donne

$$\frac{\partial t_{em}}{\partial p_l} = \frac{\partial t_r}{\partial p_l} - \frac{\vec{x}_e(t_{em}) - \vec{x}_r(t_r)}{c\,\|\vec{x}_e(t_{em}) - \vec{x}_r(t_r)\|} \cdot \left(\vec{v}_e(t_{em})\frac{\partial t_{em}}{\partial p_l} - \vec{v}_r(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial p_l} + \left.\frac{\partial \vec{x}_e}{\partial p_l}\right|_{t_{em}} - \left.\frac{\partial \vec{x}_r}{\partial p_l}\right|_{t_r} \right). \tag{D.24}$$

Après regroupement des termes intéressant, nous obtenons

$$\frac{\partial t_{em}}{\partial p_l} = \frac{\frac{\partial t_r}{\partial p_l} - \frac{\vec{x}_e(t_{em}) - \vec{x}_r(t_r)}{c\|\vec{x}_e(t_{em}) - \vec{x}_r(t_r)\|} \cdot \left(\vec{f}_{el}(t_{em}) - \vec{f}_{rl}(t_r) - \vec{v}_r(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial p_l} \right)}{1 + \frac{\vec{v}_e(t_{em}) \cdot (\vec{x}_e(t_{em}) - \vec{x}_r(t_r))}{c\|\vec{x}_e(t_{em}) - \vec{x}_r(t_r)\|}}. \tag{D.25}$$

– calcul de la correction du type Shapiro et du temps coordonnée d'émission t_e par la relation

$$t_e = t_{em} - \sum_i \frac{2Gm_i}{c^3} \ln \frac{r_{ei} + r_{ri} + r_{re}}{r_{ei} + r_{ri} - r_{re}} \tag{D.26}$$

où

$$r_{ei} = \|\vec{x}_e(t_{em}) - x_i(t_r)\| \tag{D.27a}$$

$$r_{ri} = \|\vec{x}_r(t_r) - x_i(t_r)\| \tag{D.27b}$$

$$r_{re} = \|\vec{x}_r(t_r) - x_e(t_{em})\| \tag{D.27c}$$

La dérivée partielle se calcule aisément

$$\frac{\partial t_e}{\partial p_l} = \frac{\partial t_{em}}{\partial p_l} - \sum_i \frac{2Gm_i}{c^3}\left[\frac{\frac{\partial r_{ei}}{\partial p_l} + \frac{\partial r_{ri}}{\partial p_l} + \frac{\partial r_{re}}{\partial p_l}}{r_{ei} + r_{ri} + r_{re}} - \frac{\frac{\partial r_{ei}}{\partial p_l} + \frac{\partial r_{ri}}{\partial p_l} - \frac{\partial r_{re}}{\partial p_l}}{r_{ei} + r_{ri} - r_{re}}\right] \tag{D.28}$$

avec

$$\frac{\partial r_{ei}}{\partial p_l} = \frac{\vec{x}_e(t_{em}) - \vec{x}_i(t_r)}{r_{ei}} \cdot \left[\vec{f}_{el}(t_{em}) - \vec{f}_{il}(t_r) + \vec{v}_e(t_{em})\frac{\partial t_{em}}{\partial p_l} - \vec{v}_i(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial p_l}\right] \tag{D.29a}$$

$$\frac{\partial r_{ri}}{\partial p_l} = \frac{\vec{x}_r(t_r) - \vec{x}_i(t_r)}{r_{ri}} \cdot \left[\vec{f}_{rl}(t_r) - \vec{f}_{il}(t_r) + (\vec{v}_r(t_r) - \vec{v}_i(t_r))\frac{\partial t_r}{\partial p_l}\right] \tag{D.29b}$$

$$\frac{\partial r_{re}}{\partial p_l} = \frac{\vec{x}_r(t_r) - \vec{x}_e(t_{em})}{r_{re}} \cdot \left[\vec{f}_{rl}(t_r) - \vec{f}_{el}(t_{em}) + \vec{v}_r(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial p_l} - \vec{v}_e(t_{em})\frac{\partial t_{em}}{\partial p_l}\right] \tag{D.29c}$$

Remarquons que si le paramètre par rapport auquel nous dérivons est une masse, il faut en plus ajouter la contribution suivante

$$\frac{\partial t_e}{\partial m_l} = -\frac{2G}{c^3}\ln\frac{r_{el} + r_{rl} + r_{re}}{r_{el} + r_{rl} - r_{re}}. \tag{D.30}$$

– conversion entre temps coordonné et temps propre $\tau_e = \tau_e(t_e)$ en évaluant directement la relation du temps propre intégrée dans la partie dynamique. La dérivée partielle donne

$$\frac{\partial \tau_e}{\partial p_l} = \left.\frac{\partial \tau_e}{\partial p_l}\right|_{t=t_e} + \left.\frac{\partial \tau_e}{\partial t}\right|_{t=t_e}\frac{\partial t_e}{\partial p_l} = g_{el}(t_e) + a_{\tau_e}(t_e)\frac{\partial t_e}{\partial p_l}. \tag{D.31}$$

– calcul du Range $R(\tau_r) = c(\tau_r - \tau_e(\tau_r))$ et sa dérivée partielle

$$\frac{\partial R}{\partial p_l} = -c\frac{\partial \tau_e}{\partial p_l}. \tag{D.32}$$

D.2.2 Doppler et ses dérivées partielles

En RG, le Doppler se dérive à partir de la métrique EIH. Si nous nous limitons à l'ordre $1/c^3$ [Blanchet et al., 2001], nous pouvons écrire

$$D(\tau_r) = \frac{E_e}{E_r}\frac{q_r}{q_e} \tag{D.33}$$

avec

$$q_r = 1 - \frac{\vec{N}_{er}\cdot\vec{v}_r(t_r)}{c} - 2(1+\gamma)\sum_i \frac{Gm_i}{c^3}\frac{\vec{N}_{er}\cdot\vec{v}_r(t_r)(r_{ei}+r_{ri}) - r_{re}\frac{\vec{r}_{ri}\cdot\vec{v}_{ri}}{r_{ri}}}{(r_{ei}+r_{ri})^2 - r_{re}^2} \tag{D.34}$$

$$q_e = 1 - \frac{\vec{N}_{er}\cdot\vec{v}_e(t_{em})}{c} - 2(1+\gamma)\sum_i \frac{Gm_i}{c^3}\frac{\vec{N}_{er}\cdot\vec{v}_e(t_{em})(r_{ei}+r_{ri}) + r_{re}\frac{\vec{r}_{ei}\cdot\vec{v}_{ei}}{r_{ei}}}{(r_{ei}+r_{ri})^2 - r_{re}^2} \tag{D.35}$$

$$E_e = 1 - v_e^2(t_{em})/2c^2 - \sum_i \frac{Gm_i}{\bar{r}_{ei}c^2} \tag{D.36}$$

$$E_r = 1 - v_r^2(t_r)/2c^2 - \sum_i \frac{Gm_i}{r_{ri}c^2} \tag{D.37}$$

où les rayons sont donnés par (D.27) et où

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{ri} &= \vec{x}_i(t_r) - \vec{x}_r(t_r) && \text{(D.38a)}\\
\vec{r}_{ei} &= \vec{x}_i(t_r) - \vec{x}_e(t_{em}) && \text{(D.38b)}\\
\vec{v}_{ri} &= \vec{v}_i(t_r) - \vec{v}_r(t_r) && \text{(D.38c)}\\
\vec{v}_{ei} &= \vec{v}_i(t_r) - \vec{v}_e(t_{em}) && \text{(D.38d)}\\
\bar{r}_{ei} &= \|\vec{x}_e(t_{em}) - x_i(t_{em})\| && \text{(D.38e)}\\
\vec{N}_{er} &= \frac{\vec{x}_r(t_r) - \vec{x}_e(t_{em})}{r_{er}}. && \text{(D.38f)}
\end{aligned}$$

La dérivée du Doppler s'écrit donc comme étant

$$\frac{\partial D}{\partial p_l} = \frac{\partial E_e}{\partial p_l}\frac{q_r}{q_e E_r} - \frac{\partial E_r}{\partial p_l}\frac{E_e q_r}{E_r^2 q_e} + \frac{\partial q_r}{\partial p_l}\frac{E_e}{E_r q_e} - \frac{E_e q_r}{E_r q_e^2}\frac{\partial q_e}{\partial p_l} \tag{D.39}$$

Nous allons traiter les termes un à un. Pour commencer,

$$\frac{\partial E_e}{\partial p_l} = -\frac{1}{c^2}\left\{\dot{\vec{f}}_{el}(t_{em}) + \vec{a}_e(t_{em})\frac{\partial t_{em}}{\partial p_l}\right\}\cdot\vec{v}_e(t_{em}) + \sum_i \frac{G m_i}{r_{ei}^2 c^2}\frac{\partial \bar{r}_{ei}}{\partial p_l} \tag{D.40}$$

avec

$$\frac{\partial r_{ei}}{\partial p_l} = \frac{\vec{x}_e(t_{em}) - \vec{x}_i(t_{em})}{r_{ei}}\cdot\left[\vec{f}_{el}(t_{em}) - \vec{f}_{il}(t_{em}) + (\vec{v}_e(t_{em}) - \vec{v}_i(t_r))\frac{\partial t_{em}}{\partial p_l}\right] \tag{D.41}$$

et

$$\frac{\partial E_r}{\partial p_l} = -\frac{1}{c^2}\left\{\dot{\vec{f}}_{rl}(t_r) + \vec{a}_r(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial p_l}\right\}\cdot\vec{v}_r(t_r) + \sum_i \frac{G m_i}{r_{ri}^2 c^2}\frac{\partial r_{ri}}{\partial p_l} \tag{D.42}$$

Dans cette expression, tout provient de l'intégration de la dynamique sauf les accélérations qu'il faut réévaluer et les termes $\frac{\partial t_{em/r}}{\partial p_l}$ qui ont été calculés à la section précédente. Les dérivées partielles des distances r_{ei} et r_{ri} sont données aux expressions (D.29).

Avant de nous attaquer aux dérivées de q_r et de q_e, il est utile de calculer la dérivée de $\vec{N}_{er}$:

$$\frac{\partial \vec{N}_{er}}{\partial p_l} = \frac{1}{r_{er}}\left(\vec{f}_{rl}(t_r) + \vec{v}_r(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial p_l} - \vec{f}_{el}(t_{em}) - \vec{v}_e(t_{em})\frac{\partial t_{em}}{\partial p_l}\right) - \frac{\vec{x}_r(t_r) - \vec{x}_e(t_{em})}{r_{er}^2}\frac{\partial r_{er}}{\partial p_l} \tag{D.43}$$

A nouveau tout est donné par la dynamique et la dérivé de r_{er} est exprimée à la relation (D.29).

Nous pouvons maintenant attaquer la dérivée de q_r et q_e. Pour ce faire, le dénominateur sera noté par F_i

$$F_i = (r_{ei} + r_{ri})^2 - r_{re}^2 \tag{D.44}$$

et les numérateurs par G_{ri} et G_{ei}

$$\begin{aligned}
G_{ri} &= \vec{N}_{er}\cdot\vec{v}_r(t_r)(r_{ei} + r_{ri}) - r_{re}\frac{\vec{r}_{ri}\cdot\vec{v}_{ri}}{r_{ri}} && \text{(D.45)}\\
G_{ei} &= \vec{N}_{er}\cdot\vec{v}_e(t_{em})(r_{ei} + r_{ri}) + r_{re}\frac{\vec{r}_{ei}\cdot\vec{v}_{ei}}{r_{ei}} && \text{(D.46)}
\end{aligned}$$

On trouve alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_r}{\partial p_l} &= -\frac{\partial \vec{N}_{er}}{\partial p_l}\cdot\frac{\vec{v}_r}{c}-\frac{\vec{N}_{er}}{c}\cdot\left(\dot{\vec{f}}_{rl}(t_r)+\vec{a}_r(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial p_l}\right)\\ &\quad -4\sum_i\frac{Gm_i}{c^3}\left(\frac{1}{F_i}\frac{\partial G_{ri}}{\partial p_l}-\frac{G_{ri}}{F_i^2}\frac{\partial F_i}{\partial p_l}\right)\end{aligned} \tag{D.47}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_e}{\partial p_l} &= -\frac{\partial \vec{N}_{er}}{\partial p_l}\cdot\frac{\vec{v}_e(t_{em})}{c}-\frac{\vec{N}_{er}}{c}\cdot\left(\dot{\vec{f}}_{el}(t_{em})+\vec{a}_e(t_{em})\frac{\partial t_{em}}{\partial p_l}\right)\\ &\quad -4\sum_i\frac{Gm_i}{c^3}\left(\frac{1}{F_i}\frac{\partial G_{ei}}{\partial p_l}-\frac{G_{ei}}{F_i^2}\frac{\partial F_i}{\partial p_l}\right)\end{aligned} \tag{D.48}$$

avec

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_{ri}}{\partial p_l} &= \frac{\partial \vec{N}_{er}}{\partial p_l}\cdot\vec{v}_r(t_r)(r_{ei}+r_{ri})+\vec{N}_{er}\cdot\left(\dot{\vec{f}}_{rl}(t_r)+\vec{a}_r(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial p_l}\right)(r_{ei}+r_{ri})\\ &\quad +\vec{N}_{er}\cdot\vec{v}_r(t_r)\frac{\partial(r_{ei}+r_{ri})}{\partial p_l}-\frac{\partial r_{re}}{\partial p_l}\frac{\vec{r}_{ri}(t_r)\cdot\vec{v}_{ri}(t_r)}{r_{ri}}+\frac{r_{re}}{r_{ri}^2}\frac{\partial r_{ri}}{\partial p_l}\vec{r}_{ri}(t_r)\cdot\vec{v}_{ri}(t_r)\\ &\quad -\frac{r_{re}}{r_{ri}}\left\{\left(\vec{f}_{il}(t_r)+\vec{v}_i(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial p_l}-\vec{f}_{rl}(t_r)-\vec{v}_r(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial p_l}\right)\cdot\vec{v}_{ri}(t_r)\right.\\ &\quad \left.+\vec{r}_{ri}(t_r)\cdot\left(\dot{\vec{f}}_{il}(t_r)+\vec{a}_i(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial p_l}-\dot{\vec{f}}_{rl}(t_r)-\vec{a}_r(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial p_l}\right)\right\}\end{aligned} \tag{D.49}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_{ei}}{\partial p_l} &= \frac{\partial \vec{N}_{er}}{\partial p_l}\cdot\vec{v}_e(t_{em})(r_{ei}+r_{ri})+\vec{N}_{er}\cdot\left(\dot{\vec{f}}_{el}(t_{em})+\vec{a}_e(t_{em})\frac{\partial t_{em}}{\partial p_l}\right)(r_{ei}+r_{ri})\\ &\quad +\vec{N}_{er}\cdot\vec{v}_e(t_{em})\frac{\partial(r_{ei}+r_{ri})}{\partial p_l}+\frac{\partial r_{re}}{\partial p_l}\frac{\vec{r}_{ei}\cdot\vec{v}_{ei}}{r_{ei}}-\frac{r_{re}}{r_{ei}^2}\frac{\partial r_{ei}}{\partial p_l}\vec{r}_{ei}\cdot\vec{v}_{ei}\\ &\quad +\frac{r_{re}}{r_{ei}}\left\{\left(\vec{f}_{il}(t_r)+\vec{v}_i(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial p_l}-\vec{f}_{el}(t_{em})-\vec{v}_e(t_{em})\frac{\partial t_{em}}{\partial p_l}\right)\cdot\vec{v}_{ei}(t_{em})\right.\\ &\quad \left.+\vec{r}_{ei}\cdot\left(\dot{\vec{f}}_{il}(t_r)+\vec{a}_i(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial p_l}-\dot{\vec{f}}_{el}(t_{em})-\vec{a}_e(t_{em})\frac{\partial t_{em}}{\partial p_l}\right)\right\}\end{aligned} \tag{D.50}$$

et finalement

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_l} = 2(r_{ei}+r_{ri})\left(\frac{\partial r_{ei}}{\partial p_l}+\frac{\partial r_{ri}}{\partial p_l}\right)-2r_{re}\frac{\partial r_{re}}{\partial p_l} \tag{D.51}$$

Finalement, dans le cas où le paramètre p_l est une masse de l'un des corps du système, il faut ajouter les contributions suivantes aux expressions précédentes

$$\frac{\partial E_e}{\partial m_l} = -\frac{G}{\bar{r}_{el}c^2} \tag{D.52}$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial m_l} = -\frac{G}{r_{rl}c^2} \tag{D.53}$$

$$\frac{\partial q_r}{\partial m_l} = -4\frac{G}{c^3}\frac{G_{rl}}{F_l} \tag{D.54}$$

$$\frac{\partial q_e}{\partial m_l} = -4\frac{G}{c^3}\frac{G_{el}}{F_l} \tag{D.55}$$

D.2.3 Mesures angulaires et leurs dérivées partielles

Le dernier type de mesure simulée concerne les mesures angulaires. Nous allons développer les étapes nécessaires pour calculer cette fonction de mesure et expliciter le calcul de leurs dérivées partielles.

– calcul du vecteur d'onde de l'onde électromagnétique à la réception dans la base globale de coordonnées

$$\hat{k}_i = \frac{k_i}{k_0} = \vec{N}_{er} + \sum_i \frac{4Gm_i}{c^2}\left[\vec{N}_{er}(r_{ei}+r_{ri}) - \frac{r_{re}}{r_{ri}}\vec{x}_{ir}\right]. \tag{D.56}$$

La dérivée partielle se calcule aisément

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{k}_i}{\partial p_l} &= \frac{\partial \vec{N}_{er}}{\partial p_l} + \sum_i \frac{4Gm_i}{c^2}\left[\frac{\partial \vec{N}_{er}}{\partial p_l}(r_{ei}+r_{ri}) + \vec{N}_{er}\frac{\partial(r_{ei}+r_{ri})}{\partial p_l} - \frac{\partial r_{re}}{\partial p_l}\frac{\vec{x}_{ri}(t_r)}{r_{ri}}\right. \\ &\left. + \frac{r_{re}}{r_{ri}^2}\frac{\partial r_{ri}}{\partial p_l}\vec{x}_{ri}(t_r) - \frac{r_{re}}{r_{ri}}\left(\vec{f}_{rl}(t_r) - \vec{f}_{il}(t_r) + (\vec{v}_r(t_r) - \vec{v}_i(t_r))\frac{\partial t_r}{\partial p_l}\right)\right]\end{aligned} \tag{D.57}$$

où toutes les dérivées partielles apparaissant ont déjà été calculées auparavant.

– expression de ce vecteur d'onde dans la base locale (dans la tétrade)

$$n^i = -\frac{\lambda^0_{(i)} + \lambda^j_{(i)}\hat{k}_j}{\lambda^0_{(0)} + \lambda^j_{(0)}\hat{k}_j} \tag{D.58}$$

et sa dérivée partielle

$$\frac{\partial n^i}{\partial p_l} = -\frac{h_{i0l} + h_{ijl}\hat{k}_j + \lambda^j_{(i)}\frac{\partial \hat{k}_j}{\partial p_l}}{\lambda^0_{(0)} + \lambda^j_{(0)}\hat{k}_j} + \frac{(\lambda^0_{(i)} + \lambda^j_{(i)}\hat{k}_j)\cdot\left(h_{00l} + h_{0jl}\hat{k}_j + \lambda^j_{(0)}\frac{\partial \hat{k}_j}{\partial p_l}\right)}{(\lambda^0_{(0)} + \lambda^j_{(0)}\hat{k}_j)^2} \tag{D.59}$$

où les quantités $h_{i\mu l}$ proviennent de la dynamique.

– expression en termes d'ascension droite et de déclinaison en identifiant

$$\vec{n} = (\cos\alpha\cos\delta, \sin\alpha\cos\delta, \sin\delta) \tag{D.60}$$

ce qui donne

$$\alpha = \arctan\frac{n^2}{n^1} \tag{D.61}$$

$$\delta = \arcsin n^3. \tag{D.62}$$

Finalement, les dérivées partielles de ces expressions s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p_l} = \frac{-n^2\frac{\partial n^1}{\partial p_l} + n^1\frac{\partial n^2}{\partial p_l}}{(n^1)^2 + (n^2)^2} \tag{D.63}$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial p_l} = \frac{\frac{\partial n^3}{\partial p_l}}{\sqrt{1-(n^3)^2}}. \tag{D.64}$$

Annexe E

Publications réalisées dans le cadre de cette thèse

E.1 Publications

J.-P. Bruneton, M. Rinaldi, A. Kanfon, A. Hees, S. Schlögel, and A. Füzfa, Fab Four : When John and George play gravitation and cosmology. ***accepted*** *in Advances in Astronomy*, Mars 2012, `arXiv:1203.4446 [gr-qc]`.

A. Hees, B. Lamine, S. Reynaud, M.-T. Jaekel, C. Le Poncin-Lafitte, V. Lainey, A. Füzfa, J.-M. Courty, V. Dehant, and P. Wolf, Radioscience simulations in General Relativity and in alternative theories of gravity. ***accepted*** *in Class. Quantum Grav.*, Octobre 2012, `arXiv:1201.5041 [gr-qc]`.

A. Hees et A. Füzfa, Combined cosmological and solar system constraints on chameleon mechanism, *Phys. Rev. D*, 85(10) : 103005, May 2012. doi: 10.1103/PhysRevD.85.103005, `arXiv:1111.4784 [gr-qc]`.

L. Bergamin, P. Delva, and A. Hees, Vibrating systems in Schwarzschild spacetime : toward new experiments in gravitation ? *Classical and Quantum Gravity*, 26(18) : 185006, September 2009. doi: 10.1088/0264-9381/26/18/185006, `arXiv:0901.2306 [gr-qc]`.

E.2 Proceedings de conférence

A. Hees, S. Bertone, and C. Le Poncin-Lafitte, Frequency shift up to the 2PM approximation. *SF2A-2012 : Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics*, 2012, arXiv:1210.2577 [gr-qc].

P. Delva, L. Bergamin, and A. Hees, The Motion of Vibrating Systems in General Relativity. In *Proceedings of the Twelfth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, edited by Thibault Damour, Robert T. Jantzen and Remo Ruffini. ISBN 978-981-4374-51-4. Singapore : World Scientific*, p. 1548, 2012.

A. Hees, P. Wolf, B. Lamine, S. Reynaud, M.-T. Jaekel, C. Le Poncin-Lafitte, V. Lainey, A. Füzfa, and V. Dehant, Radioscience simulations in General Relativity and in alternative theories of gravity. In E. Augé, J. Dumarchez, and J. Trân Thanh Vân, editors, *Proceedings of the XLVIth Rencontres de Moriond and GPhys Colloquium 2011 : Gravitational Waves and Experimental Gravity*, p. 259, Vietnam, May 2011. Thê Giói Publishers, arXiv:1105.5927 [gr-qc].

A. Hees and A. Füzfa, Cosmological and solar-system constraints on tensor-scalar theory with chameleon effect. In E. Augé, J. Dumarchez, and J. Trân Thanh Vân, editors, *Proceedings of the XLVIth Rencontres de Moriond and GPhys Colloquium 2011 : Gravitational Waves and Experimental Gravity*, p. 427, Vietnam, May 2011. Thê Giói Publishers.

A. Hees, P. Wolf, B. Lamine, S. Reynaud, M. T. Jaekel, C. Le Poncin-Lafitte, V. Lainey, and V. Dehant : Testing gravitation in the Solar System with radio science experiments. In G. Alecian, K. Belkacem, R. Samadi & D. Valls-Gabaud, editor, *SF2A-2011 : Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics*, p. 653-658, December 2011, arXiv:1110.0659 [gr-qc].

A. Hees, P. Wolf, C. Le Poncin-Lafitte, and V. Dehant : Relativistic effects in the Bepicolombo mission. In *European Planetary Science Congress 2010*, page 626, September 2010.

A. Hees and S. Pireaux : A relativistic motion integrator : numerical accuracy and illustration with BepiColombo and Mars-NEXT, In S. A. Klioner, P. K. Seidelmann, & M. H. Soffel, editor, *IAU Symposium*, volume 261 of *IAU Symposium*, p. 144-146, January 2010. doi: 10.1017/S1743921309990299, arXiv:0908.1654 [gr-qc].

A. Hees, L. Bergamin, and P. Delva : The motion of vibrating systems in Schwarzchild spacetime. In S. A. Klioner, P. K. Seidelmann, & M. H. Soffel, editor, *IAU Symposium*, volume 261 of *IAU Symposium*, p. 147-151, January 2010. doi: 10.1017/S1743921309990305.